ARTYKUŁY

ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
XXXIV / 2004, s. 46–65*

Krzysztof MAŚLANKA

Obserwatorium Astronomiczne U.J.
Kraków

HIPOTEZA HILBERTA-PÓLYI — UNIFIKACJA NA NAJGŁĘBSZYM POZIOMIE

1. MATEMATYKA A FIZYKA

Dogłębne badania wzajemnych powiązań matematyki i fizyki prowadzą do wielu wniosków, często nieoczywistych, często wręcz zaskakujących, zawsze jednak bardzo inspirujących. W niniejszym artykule przedstawimy jeden z tych fascynujących epizodów, który przez ostatnie ćwierć wieku rozgrywał się, i wciąż się rozgrywa, na granicy najczystszej matematyki — teorii liczb — oraz najbardziej żywej fizyki — mechaniki kwantowej. Jest to pierwsze polskojęzyczne opracowanie tego wątku, który wciąż znajduje się we wstępnej fazie rozwoju, i którego głębokie skutki dla dalszego rozwoju zarówno fizyki, jak i matematyki są trudne do przecenienia. Jedno wiemy na pewno: jest związek zupełnie nieoczekiwany i bardzo głęboki — by nie powiedzieć (brak tu dobrego słowa) — intymny. Nie trzeba dodawać, że wymaga on zastosowania kilku trudnych formalizmów fizyki matematycznej.

Trudno zrozumieć, dlaczego tak czysta dziedzina matematyki jak teoria liczb miałaby znaleźć zastosowanie w mechanice kwantowej; jeszcze trudniej pogodzić się z myślą, że jest to relacja wzajemna, jakiej wcześniej nigdy nie było: klucz do beznadziejnie trudnego pro-

---

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

blemu matematycznego może tkwić w poznawalnej doświadczalnie strukturze świata kwantów!

Można względnie łatwo zrozumieć fakt przydatności np. analizy matematycznej w mechanice nieba, równań różniczkowych cząstkowych w hydrodynamice, czy rachunku prawdopodobieństwa w teorii gier losowych. Wspomniane gałęzie matematyki powstawały równolegle z rozwojem odpowiednich dziedzin, na ich konkretne potrzeby. Często tworzone były przez tych samych ludzi. Newton uważany jest za jednego z największych fizyków, ale w każdym zbiorze biografii wielkich matematyków zajmuje również poczesne miejsce; podobnie jak Euler, Laplace, Gauss, Riemann, Hamilton, Dirac i inni[1].

Jednak większość dziedzin matematyki powstawała spontanicznie, pod wpływem nieskrępowanej intuicji „czystych” matematyków, dla których inspiracją było wyłącznie szukanie obiektywnych prawidłowości, nie zaś jakiekolwiek zastosowania. Co więcej, niektórzy wręcz chlubili się z tego, bowiem brak zastosowań praktycznych oznacza też brak zastosowań wątpliwych etycznie. Oto wyznanie wybitnego matematyka angielskiego, Godfreya Harolda Hardy'ego (1877-1947):

> Nigdy nie robiłem nic „przydatnego”. Żadne z moich odkryć w najmniejszym nawet stopniu nie wpływa (i nie zanosi się, by wpłynęło) — dobrze lub źle, pośrednio lub bezpośrednio — na urok naszego świata [...][2].
>
> Prawdziwy matematyk bez trudu dojdzie do jednego pokrzepiającego wniosku: prawdziwa matematyka nie ma wpływu na wojnę. Nikt nie odkrył jeszcze żadnego wojennego celu, któremu miałaby służyć teoria liczb lub teoria względności i wydaje się mało prawdopodobne, by komuś się to udało. Są, co prawda, działy matematyki stosowanej, takie jak balistyka i aerodynamika, które rozmyślnie rozwinięto na potrzeby wojny, i które wymagają dość skomplikowanej techniki; chyba trudno nazwać je trywialnymi, lecz żadna z tych nauk nie pretenduje

---

[1] W latach trzydziestych XX wieku, głównie za sprawą (skądinąd bardzo konsekwentnego) programu francuskiej grupy matematycznej publikującej monografie pod pseudonimem N. Bourbaki, drogi matematyków i fizyków rozeszły się.

[2] G.H. Hardy: *Apologia matematyka*, tłum. M. Fedyszak. Prószyński i S-ka, Warszawa 1997, s. 101.

> do miana prawdziwej matematyki. Prawdę powiedziawszy, są one odrażające i nieznośnie nudne [...]. Matematyka jest [...] nieszkodliwym i niewinnym zajęciem[3].

Za jedną z najbardziej „niewinnych" dziedzin matematyki uchodziła zawsze teoria liczb. Obok geometrii to jedna z najstarszych dziedzin matematyki. Ćwierć wieku temu okazało się jednak, że duże liczby pierwsze mają kluczowe znaczenie w teorii szyfrów[4]. Nie czynią więc wprawdzie zła bezpośrednio, lecz mogą np. służyć do przenoszenia zaszyfrowanych meldunków czy rozkazów o mało pokojowej treści. Zatem byłby to raczej wyjątek od sformułowanej powyżej przez Hardy'ego reguły. Jak widać, należy być bardzo ostrożnym przy formułowaniu wszelkich radykalnych poglądów. Historia rozwoju idei jest trudna do przewidzenia, zaś próby prognozowania zwykle nie wytrzymują późniejszej konfrontacji z rzeczywistością. W świetle tego, co wiemy obecnie, przytoczony powyżej pogląd Hardy'ego wymaga, co najmniej, korekty. Nawet tak „prawdziwa" matematyka jak teoria liczb może, niczym przysłowiowa moneta, mieć niejedną stronę.

2. HIPOTEZA RIEMANNA

Pojęcie nieskończoności, wraz z różnymi swymi wariantami, należy do języka potocznego. Należy też do paru dziedzin nauki, gdzie kojarzy się zwykle z czymś niemożliwym, nieosiągalnym lub granicznym. Niekiedy miewa zabarwienie wręcz mistyczne. Ale najlepiej zadomowiło się w matematyce, gdzie, oczywiście, nie ma miejsca na mistycyzm, czy brak precyzji.

---

[3]G.H. Hardy: *ibid.*, s. 95.

[4]W r. 1917 pracujący dla korporacji AT&T Vernam opracował sposób szyfrowania komunikatów. W r. 1977 opublikowano tzw. *public key cryptography* (szyfrowanie z kluczem publicznym), w którym zasadniczą rolę odgrywają duże liczby pierwsze i stąd entuzjazm, z jakim witany jest każdy rekord w tej dziedzinie. Aktualny (grudzień 2001) ma postać tzw. liczby Mersenne'a $2^{13466917} - 1$; w zapisie dziesiętnym liczba ta posiada 4053946 cyfr.

Czy fakt, że wszystkie bez wyjątku punkty, z całej nieskończonej ich ilości, leżą dokładnie na linii prostej może mieć jakiekolwiek znaczenie? Jak sprawdzić, że tak jest faktycznie?

Istnieje jeden ważny przykład takiego liniowego rozkładu: zespolone rozwiązania równania $\zeta(\rho) = 0$. Wiadomo, że jest ich nieskończenie wiele. W literaturze fachowej przyjęło się nazywać je „zerami". Funkcję ζ określa się za pomocą szeregu

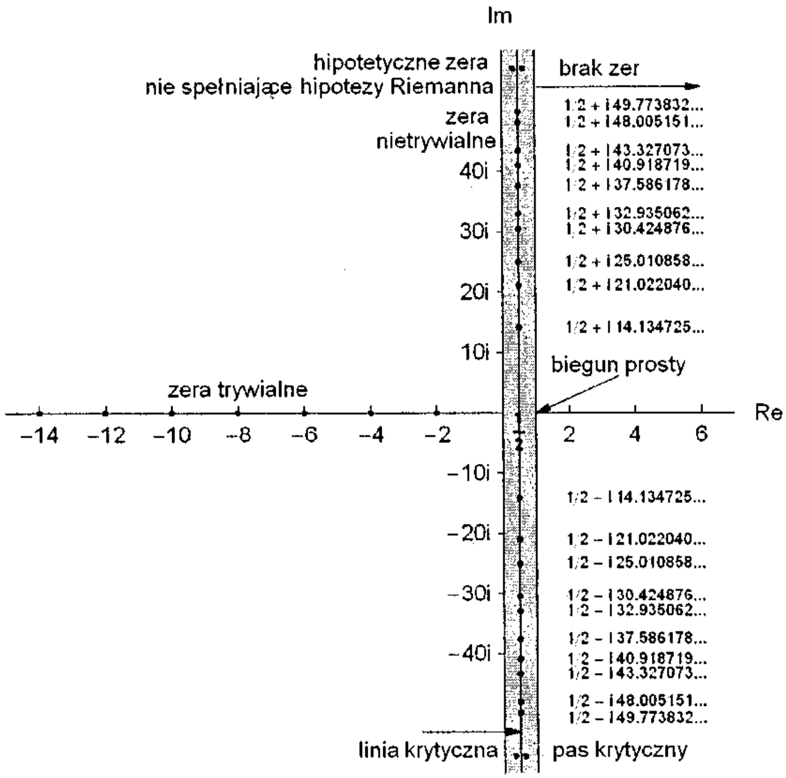
$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + ..., \qquad \mathrm{Re}(s) > 1$$

Ma ona zasadnicze znaczenie w analitycznej teorii liczb: w niej właśnie zawarta jest tajemnica rozmieszczenia liczb pierwszych[5].

W przełomowej pracy z r. 1859 Riemann postawił hipotezę, że *wszystkie* zespolone rozwiązania ρ równania $\zeta(\rho) = 0$ leżą na linii prostej. Kierował się intuicją, a także bardzo pomysłowymi obliczeniami numerycznymi, o czym dowiedziano się przypadkiem, dopiero kilkadziesiąt lat po jego śmierci z analizy pozostawionych przezeń notatek. Jak stwierdził Riemann, co najmniej trzy (a być może nawet 20) z początkowych obliczonych zer układa się dokładnie wzdłuż pewnej prostej. Dziś wiemy, że na tej prostej leży ich ponad 50 miliardów; nie natrafiono, jak dotąd, na żaden wyjątek. Z przyziemnego punktu widzenia to „dużo". Z punktu widzenia nieskończoności to infinitezymalnie mało.

W r. 1914 wspominany powyżej Hardy wykonał ważny krok: pokazał, że nieskończenie wiele rozwiązań równania $\zeta(\rho) = 0$ leży na linii prostej. Wciąż jednak nie wiadomo, czy są tam wszystkie. Matematycy to, w pewnym sensie, skrajny przypadek biurokratów — jeśli już dopuszczają wyjątki od reguły, to chcą dokładnie wiedzieć jakie. Zwłaszcza, że w tym przypadku owe wyjątki zburzyłyby pewien estetyczny schemat zawarty w twierdzeniu o liczbach pierwszych.

[5]K. Maślanka, *Riemann i jego funkcja ζ*, Zagadnienia Filozoficzne w Nauce, XXX, 2002, s. 18.



Czarne punkty oznaczają rozwiązania równania $\zeta(\rho) = 0$. *A priori* można rozważać trzy ich rodzaje: *trywialne*: $-2, -4, -6, \ldots$; *nietrywialne*: $1/2 \pm \gamma$, które, zgodnie z intuicją Riemanna, leżą na linii krytycznej, oraz — ewentualnie — *hipotetyczne*, nie spełniające hipotezy Riemanna, dla których część rzeczywista byłaby różna od ″. Tych ostatnich prawdopodobnie nie ma, niemniej nikt, jak dotąd, nie wykluczył ich istnienia w sposób ścisły.

O tym, jak poważnie i ambicjonalnie traktował Hardy znalezienie dowodu postawionej przez Riemanna hipotezy, świadczy następujące, autentyczne zdarzenie. Hardy był znanym, nieco cynicznym agnostykiem. W swej świadomości dopuszczał jednak miejsce dla Boga jako istoty wszechmocnej oraz inteligentnej, ale przekornej, która lubi drażnić się z ludźmi. Często więc starał się wyprowadzać Go w pole, stosując zagrania podwójnie przekorne. Jedna ze znanych anegdot opowiada, że będąc w poważnym (tak przynajmniej sądził) niebezpieczeństwie w czasie podróży morskiej do Danii, wysłał pocztówkę do znajomych o treści jawnie nieprawdziwej: „Udowodniłem hipotezę Riemanna". Po swym szczęśliwym powrocie tłumaczył to tak: „Gdybym był zginął, wówczas, podobnie jak Fermat, przeszedłbym do historii jako ten, który rozwiązał najtrudniejszy problem matematyczny. Ale zazdrosny o moją pośmiertną sławę Bóg nie dopuściłby do tego. Jedyne więc, co Mu pozostało, to ocalić mnie."

3. HIPOTEZA HILBERTA-PÓLYI

Jest rzeczą dziwną, by nie powiedzieć: upokarzającą, że w tym najważniejszym ze swych nierozwiązanych zagadnień „królowa nauk" będzie zmuszona zwrócić się o skuteczną pomoc do fizyki. I to w kwestii dziedziny tak starej i tak szacownej jak teoria liczb, którą z kolei nazwano wzniośle „królową matematyki"[6]. Fizyka bowiem potrafi sformułować warunki, które sprawią, że wszystkie punkty, z nieskończonej ich ilości, ułożą się dokładnie wzdłuż pewnej prostej. Są to pewne warunki symetrii, od kilkudziesięciu już lat z powodzeniem stosowane w mechanice kwantowej. W powszechnie przyjętym języku tej teorii, czyli w formalizmie przestrzeni Hilberta, mówimy, że każdej

[6]Znane powiedzenie „księcia matematyków", skądinąd też astronoma i fizyka, Karla Friedricha Gaussa, jest częścią jego dłuższej wypowiedzi: „Matematyka jest królową nauk, zaś arytmetyka [= teoria liczb] jest królową matematyki. Często zniża się do tego, by służyć astronomii oraz innym naukom przyrodniczym, lecz niezależnie od tego należy się jej pierwsze miejsce." (Cytat za: E.T. Bell, *The Queen of the Sciences*, Baltimore, 1931) — Pierwsza część tej wypowiedzi to zgrabny, ale dość pusty slogan, z którym trudno polemizować, a jeszcze trudniej wysnuć zeń jakieś konstruktywne wnioski. Co do drugiej części, to jest ona bardziej konkretna, ale dyskusyjna. W moim przekonaniu matematyka nie „służy" żadnej innej nauce; jej niezależność i samowystarczalność jest immanentna. Co najwyżej *użycza* niektórych ze swych technik, głównie fizyce, astronomii oraz naukom technicznym.

mierzalnej wielkości fizycznej odpowiada tzw. liniowy operator hermitowski. Zgodnie z ważnym twierdzeniem matematycznym, każdy taki operator posiada dyskretne widmo wartości własnych, a wszystkie one są *rzeczywiste*. To jeszcze nie brzmi specjalnie interesująco; trzeba jednak pamiętać, że liczby rzeczywiste są szczególnymi przypadkami tworów ogólniejszych: liczb zespolonych. Te ostatnie mają interpretację punktów na płaszczyźnie; z punktu widzenia owej płaszczyzny wszystkie liczby rzeczywiste leżą *dokładnie na prostej*. I to jest bardzo obiecujący klucz do dowodu hipotezy Riemanna: jeśli, oznaczywszy rozwiązania równania $\zeta(\rho) = 0$ jako $\rho = 1/2 + i\gamma$, znajdziemy taki operator hermitowski, którego wartościami własnymi byłyby liczby γ, to hipoteza ta byłaby prawdziwa.

Trzeba otwarcie przyznać, że jest to bardzo ogólnikowe sformułowanie; nikt jak dotąd nie skonstruował takiego operatora[7]; nie wiemy nawet nic o własnościach ewentualnej przestrzeni, w której miałby on działać.

Mimo to, powyższy szkic rozumowania, choć tak daleki od matematycznej precyzji, jest obecnie jedną z najbardziej obiecujących dróg do stwierdzenia ewentualnej prawdziwości hipotezy Riemanna. Nosi on tradycyjną nazwę hipotezy Hilberta-Pólyi. W świadomości fizyków matematycznych od dłuższego czasu istniało przekonanie o prawdziwości tej hipotezy. Nie było jednak żadnych udokumentowanych śladów jej powstania w literaturze. Stanowiła ona swoistą „mądrość ludową” datowaną na rok ok. 1910. Jednak pierwsza drukowana wzmianka o niej pochodzi dopiero z pracy Montgomery'ego z r. 1973 na temat istnienia korelacji zer funkcji ζ Riemanna. Sporo światła na jej historię rzuca korespondencja przytoczona na końcu tego artykułu.

[7]Jedynym znanym mi wyjątkiem jest praca S. Okubo *Lorentz-invariant Hamiltonian and Riemann Hypothesis*, quant-ph/9707036, 17 July 1997. Autor twierdzi, że skonstruował „dwuwymiarowy, lorentzowsko niezmienniczy hamiltonian, który może mieć związek z hipotezą Riemanna”. – Podjęto też obiecujące próby skonstruowania wnęki mikrofalowej, której widmo drgań własnych miałoby symulować widmo pewnych układów czysto kwantowych (A. Richter, Politechnika w Darmstadt).

4. PRZYPADKOWE SPOTKANIE

Dawno już minęły te romantyczne czasy, gdy w nauce udawało się odkryć coś ważnego w sposób przypadkowy[8]. Dzisiejsza nauka, oglądana od strony kuchni, przypomina bardziej wyczynowy sport: wszystko wydaje się precyzyjnie zaplanowane, wszystko odbywa się w atmosferze olbrzymiej konkurencji. A jednak o tej jednej ważnej kwestii zadecydował szczęśliwy traf: przypadkowe spotkanie dwu wybitnych specjalistów. Wszystko to stało w okresie, gdy obydwie strony, tj. i matematyka, i fizyka, dojrzały do takiej owocnej interakcji: w okresie nagromadzenia dostatecznej ilości wiedzy i zrozumienia stosownych prawidłowości.

Zdarzyło się to w r. 1972, w budynku zwanym Fuld Hall w Institute for Advanced Study w Princeton, New Jersey — sławnym i zasłużonym ośrodku fizyki teoretycznej wybudowanym w latach trzydziestych ubiegłego stulecia, który gościł m.in. Alberta Einsteina, Kurta Gödla i in. Niezmordowanym „katalizatorem" przypadkowego spotkania był hinduski teoretyk liczbowy, Daman Chowla[9], zaś jego uczestnikami byli: matematyk Hugh Montgomery[10] oraz fizyk Freeman Dyson[11].

To jedyne w swym rodzaju, przypadkowe a tak brzemienne w skutki, spotkanie przy herbacie opisali szczegółowo w niedawno

---

[8]W XIX wieku pewien technik sprawdzający nowy teleskop optyczny (zanim jeszcze zaczęli używać go astronomowie) odkrył przypadkiem nowy księżyc Saturna.

[9]Sarva Daman Chowla (1907-1995), wybitny matematyk hinduski, godny kontynuator tradycji zapoczątkowanej przez Ramanujana.

[10]Hugh L. Montgomery, specjalista od teorii liczb, obecnie profesor University of Michigan.

[11]Freeman Dyson, ur. 1923. „The best English theorist since Dirac" — taką pochlebną referencję wystawił młodemu Dysonowi w r. 1949 sławny amerykański fizyk jądrowy, Hans Bethe.

wydanych książkach: Karl Sabbagh oraz John Derbyshire[12]. Oto fragment z książki Sabbagha opisujący ów epizod:

> Wspomina Hugh Montgomery: [Hinduski matematyk zajmujący się teorią liczb, Chowla] zapytał mnie: „Spotkałeś Dysona?" Odparłem: „Nie". Wtedy on: „No to pójdziemy i przedstawię cię Dysonowi". Na to ja: „Nie, nie. Ja rozumiem, ale nie ma potrzeby spotykania się z Dysonem".
>
> Chowla chodził tam i z powrotem, w końcu siłą wywlókł mnie z pokoju. Nie miałem najmniejszej ochoty zawracać głowy [Dysonowi]. Nie sądziłem, bym miał mu coś ciekawego do powiedzenia. Lecz kiedy Chowla przedstawił mnie Dysonowi, ten przyjął mnie bardzo uprzejmie. Potem zapytał, nad czym pracuję; więc powiedziałem mu, że przyglądam się zerom funkcji dzeta.
>
> Potem Montgomery przeszedł do konkretów i kiedy wspomniał o formule, która, jak udowodnił, opisuje statystyczny rozkład zer, Dyson ożywił się wyraźnie. Zobaczywszy
>
> $$1 - \left(\frac{sin(\pi x)}{\pi x}\right)^2$$
>
> powiedział coś w rodzaju: „No, to jest gęstość korelacji par dla wartości własnych macierzy w unitarnym zespole gaussowskim [*Gaussian Unitary Ensemble*]".
>
> „Nigdy dotąd nie słyszałem żadnego z tych określeń — przyznaje dalej Montgomery. Słów Dysona nie pamiętam dokładnie, bo wszystkie te terminy słyszałem później tyle razy, ale powiedział na pewno: *korelacja par* i coś w rodzaju: *macierze losowe*".
>
> Tak więc Dyson dostrzegł związek pomiędzy dwiema, zdawałoby się odmiennymi, dziedzinami wiedzy: fizyką kwantową oraz teorią liczb. Okazało się, że fizycy, poszukując sposobów opisu zachowania np. skomplikowanych jąder atomowych,

[12]K. Sabbagh, *Dr. Riemann's Zeros*, Atlantic, 2002; J. Derbyshire, *Prime Obsession: Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics*, Joseph Henry Press, 2003. – Obydwie te książki, mimo że napisane przez nie-specjalistów, zyskały bardzo pochlebne opinie wśród zawodowych matematyków, por. np. recenzja pióra E. Bombieriego: *The Indivisible Man*, American Scientist, July/August 2003.

> natknęli się na formuły bardzo podobne do proponowanego przez Montgomery'ego dla opisu rozkładu zer funkcji dzeta Riemanna.
>
> Zapytałem dalej Montgomery'ego, czy dużo zajmował się tymi matematycznymi tworami, o których mówił Dyson, znanymi jako macierze losowe. „Nigdy wcześniej nie widziałem macierzy losowej — odparł. – Później zresztą też raczej nie." Ale dla Freemana Dysona ta wymiana zdań przy herbacie oznaczała zupełną zmianę dotychczasowego kierunku badań.
>
> „O ile mi wiadomo — mówi Montgomery — Dyson nie myślał o tym wszystkim po naszej pięciominutowej rozmowie. Nie spotkaliśmy się od tej pory, tak więc była to nasza jedyna rozmowa w życiu. Za to bardzo owocna: całkiem przypadkowe odkrycie we właściwym momencie. Ja miałem wynik, trzeba tylko było połączenia i on je dostarczył. Wszystko to nie zmieniło matematyki, a jedynie nasze zrozumienie w kwestii tego, z czym wiąże się matematyka. Sądzę, że w czasie, który upłynął od naszej rozmowy i tak ktoś inny dostrzegłby to połączenie... to już przecież niemal trzydzieści lat. [...]"
>
> Skutkiem tej jednej rozmowy było zupełnie nowe podejście do hipotezy Riemanna, jak również ta fascynująca możliwość, że — w jakiś istotny sposób — kwantowy Wszechświat zachowuje się tak, jakby był sterowny przez rozmieszczenie zer funkcji dzeta Riemanna. Z tej rozmowy narodziło się zupełnie nowe podejście do hipotezy Riemanna, więcej: *możliwość, iż w jakiś bardzo istotny sposób zachowanie się świata kwantów wynika z rozmieszczenia zer funkcji dzeta Riemanna* [podkreślenie moje: K.M.][13].

Ostatnie zdanie z przytoczonego obszernego cytatu z książki Sabbagha niemal pokrywa się z kwestią, którą wygłasza główny bohater filmu *Beautiful mind*, wybitny matematyk John Nash, w scenie wykładu na konferencji w Uniwersytecie Columbia (1959 r.), kiedy

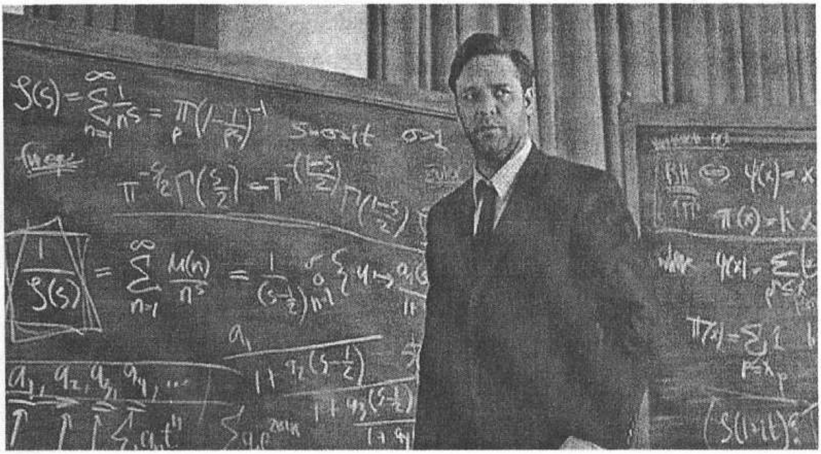
[13] K. Sabbagh, *ibid.*, p.134-136. – Autor tej książki zastosował prostą, lecz skuteczną i popularną, zwłaszcza w Stanach, metodę: jej rdzeń stanowią liczne krótkie wywiady z fachowcami z „pierwszej linii frontu" badań naukowych, przedzielone popularnonaukowym (nie zawsze ścisłym) „wypełniaczem". – Na temat spotkania Montgomery'ego z Dysonem por. też: Ivars Peterson, *The return of zeta*, *The Weekly Newsmagazine of Science*, http://www.sciencenews.org.

to nieoczekiwanie ujawnia się rzeczywisty, i nader niepokojący, stan jego psychiki. Wydaje mu się, że wśród audytorium krążą tajemnicze postacie agentów służb specjalnych.

> Nash:. ..*And so we see that if the zeroes of the Riemann zeta function correspond to singularities in the space-time then conventional number theory breaks down in the face of relativistic exploration... Sometimes, our expectations are betrayed by the numbers... And variables are impossible to assign any rational value...*
>
> *Widzimy więc, że jeśli zera funkcji dzeta Riemanna odpowiadają osobliwościom w czasoprzestrzeni, wówczas w badaniach nad teorią względności tradycyjna teoria liczb załamuje się... Niekiedy liczby zawodzą nasze oczekiwania... A zmiennym nie da się przypisać żadnych wartości rzeczywistych...*

Mam wrażenie, że scenarzyści tego — skądinąd bardzo odpowiedzialnie potraktowanego — filmu musieli jednak sugerować się późniejszymi o kilkanaście lat odkryciami, chcąc wykreować swego bohatera nie tylko na geniusza, ale wręcz — nie wiem, dlaczego i na ile świadomie — na proroka. Gdyby bowiem Nash, co raczej wątpliwe, faktycznie powiedział coś takiego (w roku 1959!), byłyby to słowa doprawdy prorocze. Z punktu widzenia psychologii wspomniana kwestia to swoisty, poszarpany „strumień świadomości”. Niemniej twórcy filmu zadbali o matematyczną precyzję swego dzieła: np. we wspomnianej scenie wykładu wszystkie formuły dotyczące teorii liczb na trzech widocznych w tle tablicach są poprawne i zestawione w sposób bardzo logiczny[14].

[14] *A Beautiful Mind*, 2001, reżyseria Ron Howard, w roli profesora Nasha Russel Crowe, na postawie książki S. Nasar, *A Beautiful Mind: A Biography of John Forbes Nash, Jr., Winner of the Nobel Prize in Economics*, Simon&Schuster, 1998; tłum. polskie: *Piękny umysł*, 2001.

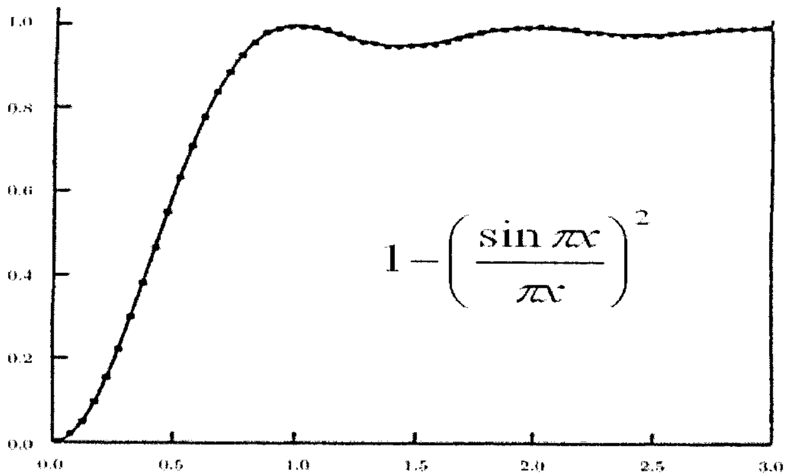


5. PRZYCZYNY KOINCYDENCJI

Powołaniem fizyki teoretycznej jest m.in. szukanie i wyjaśnianie zagadkowych koincydencji. Ukrytym założeniem jest zawsze to, że nie może za tym stać przypadek. Najsławniejszym przykładem jest oczywiście — znana od czasów Galileusza — równość masy bezwładnej i grawitacyjnej, w której Einstein rozpoznał klucz do zagadki grawitacji. Z kolei równość ładunków elektrycznych protonu i elektronu może okazać się kluczem do zrozumienia istoty elektromagnetyzmu.

I oto kolejna zagadkowa koincydencja: równość statystycznych rozkładów zer funkcji ζ, odpowiedzialnych za rozkład liczb pierwszych, z jednej strony, oraz poziomów kwantowych, z drugiej[15]. Śmiały, lecz przecież tak atrakcyjny wniosek narzuca się od razu: funkcja ζ reprezentuje jakiś absolutny, „God-given" układ kwantowy; jego poziomy energetyczne to zera tej funkcji, stąd hipoteza Riemanna musi być prawdziwa.

[15]Należy z naciskiem podkreślić, że rozkład ten jest bardzo wyrafinowany (opisuje go nieliniowe równanie różniczkowe typu Painleve V), zaś zgodność, mierzona testem Kołmogorowa-Smirnowa, jest bardzo duża.



Formuła, która pojawiła się w rozważaniach Montgomery'ego na temat zer funkcji ζ, a w której Dyson rozpoznał tzw. funkcję korelacji par dla wartości własnych dużych macierzy losowych, używanych od lat 50-tych ubiegłego wieku do opisu rezonansów ciężkich jąder atomowych. Krzywa ciągła to wykres tej funkcji. Kropki oznaczają, uzyskaną numerycznie, funkcję korelacji par dla 8 milionów zer w pobliżu zera nr 10^{20}. Zgodność obu rozkładów jest uderzająca. Przebadano też kilka innych, znacznie bardziej wyrafinowanych statystyk.

Obecny status tej idei daleki jest od tego, by uznać go za podręcznikowy paradygmat. Jest jednak rzeczą nieprawdopodobną, by był to jedynie kuriozalny przypadek, lub wyjątkowa złośliwość Stwórcy przy projektowaniu praw fundamentalnych. Asekuracyjnie przytoczę tu dwa skrajne poglądy, wierząc, że obiektywna prawda — jak zwykle — leży gdzieś pomiędzy nimi (choć sam uważam, że leży ona znacznie bliżej pierwszego z tych poglądów).

Wybitny i autorytatywny angielski teoretyk, prof. Michael Berry jest entuzjastą takiego podejścia. Jego zdaniem jesteśmy świadkami

> „pojawienia się nowej nauki, która prowadzi do odkrycia nieznanych obszarów zachowania się układów mikroskopowych"

> [an emerging science that is leading to the discovery of unfamiliar regimes of behaviour in microscopic systems][16].

Natomiast specjalista od chaosu kwantowego, R.V. Jensen, daleki jest od jakiegokolwiek entuzjazmu. Jego zdaniem, wspomniana koncepcja to tylko

„kiepsko zdiagnozowana choroba, której nieliczne objawy poznaliśmy" [a poorly characterized disease for which we have only identified some of the symptoms][17].

APPENDIX: KILKA LISTÓW

Prof. Andrew M. Odlyzko (Andrzej Odłyżko), matematyk polskiego pochodzenia, od lat 60-tych ubiegłego wieku w USA. Ukończył studia matematyczne w California Institute of Technology, pracował w AT&T Bell Laboratories, obecnie jest szefem centrum obliczeniowego University of Minnesota. Zdobył rozgłos m.in. podaniem (wspólnie z Hermanem te Riele) dowodu nieprawdziwości hipotezy Mertensa — 88 lat po jej opublikowaniu. Opracował też (wspólnie z Arnoldem Schönhage'm) wyrafinowaną, lecz nader skuteczną metodę obliczania „wysokich" zer funkcji Riemanna, bez konieczności liczenia wszystkich poprzednich.

Na początku lat 80-tych Odlyzko postanowił zbadać pochodzenie hipotezy Hilberta-Pólyi. W dalszym ciągu przedstawię kilka listów z jego korespondencji, na opublikowanie których był uprzejmy wyrazić zgodę.

Pierwsza z odpowiedzi George'a Pólyai jest, jak się zdaje, jedynym udokumentowanym świadectwem w tej kwestii.

---

[16] M.V. Berry, *Quantum physics on the edge of chaos*, New Scientist, Nov. 19, 1987, 44-47.

[17] R.V. Jensen, *Classical chaos*, American Scientist 75, 1987.

KORESPONDENCJA Z GEORGE'M PÓLYA

G. Pólya (1887-1985), wybitny matematyk amerykański pochodzenia węgierskiego. Pisząc zamieszczone poniżej listy miał 94 lata. Zgodnie z informacją pochodzącą od matematyka N.G. de Bruijna, będąc w podeszłym wieku, Pólya zazwyczaj dyktował listy swej żonie, zaś sam jedynie je podpisywał. Fakt, że obydwa poniższe listy napisał własnoręcznie dowodzi, że poruszany w nich problem zainteresował go w sposób szczególny. Okoliczności sformułowania hipotezy zawarte w pierwszym z listów są zgodne z tym, co w prywatnej rozmowie z Pólyą usłyszał matematyk Denis Hejhal.

ANDREW ODLYZKO DO GEORGE'A PÓLYAI, 8 GRUDNIA 1981

Drogi Profesorze Pólya,

słyszałem przy kilku okazjach, że Pan oraz Hilbert[18] założyliście niezależnie, że zera funkcji dzeta Riemanna mogą odpowiadać wartościom własnym pewnego samosprzężonego operatora hermitowskiego. Czy mógłby Pan podać mi jakieś referencje? Czy mógłby Pan również powiedzieć, kiedy to założenie zostało poczynione oraz jakie rozumowanie stało wtedy za tym?

Powodem mojego pytania jest to, że planuję napisanie artykułu przeglądowego na temat rozkładu zer funkcji dzeta. Otrzymałem kilka wyników teoretycznych; co więcej, wykonałem szczegółowe obliczenia numeryczne zer dzety i porównałem ich rozkład z rozkładem wartości własnych losowych macierzy hermitowskich, które z kolei były bardzo poważnie brane pod uwagę przez fizyków.

Jeśli istnieje operator hermitowski stowarzyszony z funkcją dzeta, wówczas, w jakimś sensie, można by oczekiwać, że będzie on miał własności losowego operatora hermitowskiego, a ten z kolei byłby podobny do losowej macierzy hermitowskiej. Odkryłem, że statystyczny

[18]David Hilbert (1862-1943), uważany jest za ostatniego z wielkich matematyków, którzy byli w stanie ogarnąć całość zgromadzonej do jego czasów wiedzy matematycznej.

rozkład zer funkcji dzeta jest faktycznie podobny do rozkładu wartości własnych losowych macierzy hermitowskich typu unitarnego.

Byłbym wdzięczny za wszelkie informacje lub komentarze, które byłby Pan uprzejmy mi przekazać.

Z poważaniem,

Andrew Odlyzko

GEORGE PÓLYA DO ANDREW ODLYZKO, 3 STYCZNIA 1982

Drogi Panie Odlyzko,

bardzo dziękuję za list z 8 grudnia. Mogę Panu powiedzieć jedynie o tym, co przydarzyło się mnie. Gdzieś na początku roku 1914 skończył się mój dwuletni pobyt w Getyndze. Próbowałem nauczyć się od Landaua[19] analitycznej teorii liczb. Któregoś dnia zapytał mnie: „Zna pan trochę fizyki. Czy zna pan jakiś powód fizyczny, dla którego hipoteza Riemanna powinna być prawdziwa?"

Odparłem: „Byłoby tak w przypadku, gdyby nietrywialne zera funkcji ζ były tak powiązane z problemem fizycznym, że hipoteza Riemanna byłaby równoważna temu, iż wszystkie wartości własne zagadnienia fizycznego są rzeczywiste."

Uwagi tej nigdy nie opublikowałem, niemniej jakoś rozpowszechniła się i wciąż się o niej pamięta.

Z najlepszymi pozdrowieniami, szczerze oddany

George Pólya

ANDREW ODLYZKO DO GEORGE'A PÓLYA'I, 18 STYCZNIA 1982

Drogi Profesorze Pólya,

bardzo dziękuję za list z dnia 3 stycznia wraz z informacją co do genezy Pańskiej hipotezy dotyczącej zer funkcji dzeta.

[19]Edmund Georg Hermann Landau (1877-1938), następca Hermanna Minkowskiego na katedrze w Getyndze, wybitny specjalista od teorii liczb.

Być może wiadomo Panu, że fizycy prowadzili zakrojone na szeroką skalę badania rozkładu wartości własnych losowych macierzy hermitowskich. Uważa się dalej, że jeśli istnieje operator związany z funkcją dzeta, to jego wartości własne mogłyby, w jakimś sensie, zachowywać się jak wartości własne losowych macierzy hermitowskich. Ciąg takich rozumowań jest, rzecz jasna, bardzo wątły, lecz, co ciekawe, wydaje się pracować, jak to pokazują załączone wykresy oraz inne otrzymane przeze mnie wyniki. W każdym razie prześlę Panu kopie moich prac na ten temat, z prośbą o komentarz, gdy tylko będą one gotowe.

Z poważaniem,

Andrew M. Odlyzko

GEORGE PÓLYA DO ANDREW ODLYZKO, 26 KWIETNIA 1982

Drogi dr Odlyzko,

proszę wybaczyć opóźnienie tej odpowiedzi na Pana list ze stycznia. Od niemal dwu lat jestem chory. Nie mogłem czytać. Kilka dni temu dostałem maszynę do czytania, co pozwoliło mi przeczytać Pana listy. Nie rozumiem jeszcze [przysłanych mi] wykresów, ale czekam na pracę, którą Pan zapowiedział.

Z poważaniem,

G. Pólya

W tym czasie drugi z współtwórców omawianej hipotezy, David Hilbert (1862-1943) nie żył już od blisko 40-tu lat. Jedną z żyjących osób, która intensywnie współpracowała z Hilbertem była Olga Taussky-Todd. Niestety, pomimo pełnej chęci pomocy, ten pośredni ślad nie okazał się tak owocny jak poprzedni.