ARTYKUŁY

Zagadnienia Filozoficzne
w Nauce
XXXIV / 2004, s. 3–21*

Krzysztof WÓJTOWICZ

Instytut Filozofii
Uniwersytet Warszawski

FILOZOFIA MATEMATYKI GÖDLA NA TLE NEOPOZYTYWISTYCZNEJ KONCEPCJI MATEMATYKI

Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie stanowiska Gödla wobec neopozytywistycznej koncepcji matematyki. Nie chodzi w nim jednak o pełną rekonstrukcję stanowiska logicznych pozytywistów w sprawie statusu matematyki, ale głównie o prezentację poglądów Gödla na tym tle (tym samym stanowisko logicznego pozytywizmu zaprezentowane jest w zasadzie jedynie w szkicowy sposób). Praca ta nie stanowi również próby pełnego zaprezentowania stanowiska Gödla, a jedynie pewnych wybranych jego aspektów[1].

Gödel bywa niekiedy kojarzony z Kołem Wiedeńskim. Rzeczywiście, regularnie uczestniczył on w posiedzeniach Koła w latach 1926-28 (wprowadzony tam przez Hansa Hahna, który był jednym z nauczycieli Gödla na studiach). Fakt, że Gödel zajmował się logiką formalną, nauką o najwyższym stopniu ścisłości, może kojarzyć się może z postulatem precyzji i naukowości filozofii przyjmowanym i akcentowanym w Kole Wiedeńskim. Jednak filozoficzne poglądy Gödla, nie były typowe dla tego środowiska filozoficznego — wręcz przeciwnie[2]. Tak

---

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

[1]Czytelnik znajdzie szerszą prezentację filozoficznego stanowiska Gödla w [Wójtowicz 1996] oraz [Wójtowicz 2002].

[2]W nauce i filozofii nowożytnej brak jest — według Gödla — postępu w autentycznym rozumieniu. Ograniczamy się bowiem do zbierania informacji, rezygnując

też postrzegał to Gödel, negatywnie odnosząc się do pozytywistycznego „ducha czasu" i do panującej wśród logicznych pozytywistów koncepcji matematyki jako składni języka nauki.

1. STATUS MATEMATYKI Z PUNKTU WIDZENIA LOGICZNEGO POZYTYWIZMU

Wśród logicznych pozytywistów dominowało nastawienie zdecydowanie antymetafizyczne. W szczególności odnosiło się to do matematyki. Założenie o istnieniu „królestwa abstraktów" byłoby nie do pogodzenia z materialistycznym i scjentystycznym nastawieniem logicznych pozytywistów. Nic więc dziwnego, że logiczni pozytywiści (w szczególności Carnap) starali się podać interpretację matematyki, jako pozbawionego interpretacji systemu zdań pomocniczych.

Czytelną prezentację stanowiska Carnapa w istotnym dla tej dyskusji zakresie zawiera praca [Carnap 1950]. Carnap rozważa tam zależności między problemem istnienia obiektów, o których mówi dana teoria, a strukturą języka, w którym ta teoria jest sformułowana. Wskazuje w tym artykule sposób, w jaki należy analizować i interpretować język teorii naukowej, aby uniknąć wniosków natury „metafizycznej". W języku naukowym wprowadza się bowiem pojęcia, które nie odnoszą się bezpośrednio do danych doświadczenia. W bogatych językach można w bardziej efektywny sposób prowadzić rozumowania, formułować teorie i je uzasadniać ([Carnap 1950, 241-242]). Stanowi to powód, dla którego posługujemy się takimi bogatymi językami (kry-

---

z poznania natury rzeczywistości [*Gödel 1961, 377]. Nauka nie jest w stanie wyjaśnić wszystkich problemów; fizyka ogranicza się zaś jedynie do stawiania hipotez, negując możliwość poznania „istoty świata". Mamy coraz więcej informacji, ale nie towarzyszy im wzrost prawdziwego rozumienia. Te zjawiska, widoczne według Gödla w nauce i filozofii nowożytnej stanowią początek końca nauki teoretycznej i prowadzą do wyrugowania problematyki metafizycznej, do pesymizmu poznawczego, połączonego ze sceptycyzmem, płytkim scjentyzmem i materializmem. Tego typu stanowiska (charakterystyczne — według niego — dla neopozytywizmu) Gödel zalicza do grupy „antymetafizycznej". Sam natomiast jest zwolennikiem grupy „metafizycznej" — tj. takich nurtów filozoficznych, w ramach których prowadzi się analizy metafizyczne i teologiczne.

terium wprowadzania nowych terminów ma zatem charakter czysto pragmatyczny). Jednak z samego faktu posługiwania się takim językiem nie wynikają żadne wnioski dotyczące istnienia desygnatów tych nowych pojęć. Stwierdzenie, iż istnieją byty, o których mówią wprowadzone do teorii terminy, jest jedynie pozbawionym treści poznawczej pseudo-stwierdzeniem. [Carnap 1950, 241]. W szczególności, według Carnapa, stosowanie języka odwołującego się do przedmiotów abstrakcyjnych *„nie implikuje przyjęcia ontologii platonistycznej ale jest całkowicie zgodne z empiryzmem i ściśle naukowym myśleniem”* [Carnap 1950, 234].

Aby uzasadnić „antymetafizyczną” teorię języka nauki, Carnap wprowadza rozróżnienie na „wewnętrzne” (*internal*) i „zewnętrzne” (*external*) kwestie istnienia. Wychodzi on od obserwacji, że w każdej nauce mamy do czynienia z pewnym systemem pojęciowym (*conceptual framework*). Pytania wewnętrzne i odpowiedzi na nie są formułowane poprzez wprowadzenie nowych wyrażeń językowych i ich analizę syntaktyczną. Ich celem jest wyjaśnienie, jakiego typu postulaty egzystencjalne są wnioskami z przyjętej teorii. Pytania zewnętrzne dotyczą problemu istnienia — niezależnego od teorii — „systemu bytów jako całości” [Carnap 1950, 234]. Jednak według Carnapa, jedyne sensowne pytania dotyczące zagadnień istnienia (jak to określa Carnap: istnienia w naukowym sensie), to pytania o istnienie wewnątrz pewnego schematu.

Jako ilustrację swojej tezy Carnap analizuje pytanie o istnienie świata rzeczy. Według niego spór ten jest sporem jałowym, ponieważ pytanie o istnienie świata rzeczy jest źle postawione. Skoro stosujemy język, w którym mowa jest o obiektach fizycznych, to możemy w sensowny sposób zadawać pytania dotyczące istnienia poszczególnych elementów tego systemu, czyli poszczególnych przedmiotów fizycznych. Wszystkie te pytania sa jednak stawiane i rozstrzygane wewnątrz systemu pojęciowego odnoszącego się do świata rzeczy. W szczególności pytanie o istnienie danej rzeczy jest wewnętrznym pytaniem danego systemu pojęciowego, gdyż pojęcie „realności” jest pojęciem wewnątrzsystemowym. Natomiast pytanie o istnienie świata rzeczy wykracza poza granice pytan naukowych. Zaakceptowanie języka, w którym mówimy o rzeczach i nawet akceptacja twierdzeń (w ramach tego języka), że istnieją obiekty określonego typu, nie powinno byc więc interpretowane jako stwierdzenie, że ktoś żywi przekonanie o realności świata rzeczy [Carnap 1950, 235].

Koncepcja Carnapa w istotny sposób opiera się na podziale zdań na syntetyczne i analityczne. Zdania syntetyczne odnoszą się do rzeczywistości, ich prawdziwość zależna jest od struktury tej rzeczywistości. Prawdziwość zdan analitycznych wynika natomiast jedynie z przyjęcia odpowiednich postulatów znaczeniowych. Zdania matematyki zaliczają się do zdań analitycznych; występujące w nich pojęcia nie posiadają desygnatów i nie odnoszą się do żadnego przedmiotu badań. Ułatwiają one jedynie przekształcanie zdań dotyczących rzeczywistości [Carnap 1932, 69]. Niezrozumienie tego faktu prowadzi w szczególności do przypisywania platonistycznych przekonań komuś, kto posługuje się językiem fizyki wraz z matematycznym instrumentarium [Carnap 1950, 242][3].

Zwięzłe podsumowanie poglądów Carnapa na relację pomiędzy analizami lingwistycznymi a zagadnieniami ontologicznymi stanowi następujący fragment:

> „*[D]ecydującym pytaniem nie jest rzekomy ontologiczny problem istnienia obiektów abstrakcyjnych, ale raczej pytanie o to, czy użycie abstrakcyjnych form lingwistycznych, czy [...] użycie zmiennych wykraczających poza zmienne dla rzeczy (lub dane fenomenalistyczne), jest skuteczne i owocne dla celów [...] analizy, interpretacji, wyjaśniania lub konstruowania [...] języka naukowego.*” [Carnap 1950, 247].

[3]Warto tu przypomnieć krytykę Quine'a, który odrzucał możliwość dokonania podziału zdań na analityczne i syntetyczne: „*[J]esteśmy skłonni zakładać ogólnie, że prawdziwość zdań daje się rozłożyć na komponent językowy i komponent faktualny. Przy tym założeniu wydaje się racjonalne sądzić, że w przypadku pewnych zdań ów komponent faktualny powinien być zerowy: byłyby to właśnie zdania analityczne. Lecz przy całej apriorycznej racjonalności tego pomysłu linia graniczna pomiędzy zdaniami analitycznymi i syntetycznymi po prostu nie została poprowadzona. Przekonanie, że rozróżnienie to jest w ogóle wykonalne jest nieempirycznym dogmatem empirystów, ich metafizycznym artykułem wiary*” [Quine 1953, 57-58].

Kwestie ontologiczne nie są więc — w gruncie rzeczy — pytaniami „o postać świata”, lecz dotyczą jedynie kwestii wyboru dogodnego dla potrzeb nauki schematu pojęciowego. „*Bądźmy ostrożni w wygłaszaniu stwierdzeń i krytyczni przy ich badaniu, ale tolerancyjni w dopuszczaniu form lingwistycznych*” [Carnap 1950, 248]. Zaś wy-bór języka, schematu pojęciowego, czy nawet logiki jest sprawa całkowicie dowolną i podlegajaca wyłącznie kryteriom pragmatycznym:

> „*Naszą sprawą jest nie ustanawiać zakazy, lecz dochodzić do umów.[...] W logice nie ma moralności. Każdy ma prawo budować własną logikę, tj. własną formę języka, tak jak sobie życzy. Jedyne, czego się od niego wymaga, jeśli pragnie dyskusji nad swoją logiką, to to, by sformułował jasno stosowane przez siebie metody i podał reguły syntaktyczne zamiast argumentów filozoficznych*” [Carnap 1937, 78-79].

W myśl stanowiska pozytywizmu logicznego nie wszystkie wyrażenia mają korelaty semantyczne — niektóre bowiem pełnią rolę czysto pomocniczą. Taka właśnie jest sytuacja w wypadku matematyki. Matematyka składa się z prawd wewnątrzsystemowych — tj. takich, których przyjęcie jest warunkiem wstępnym tworzenia teorii naukowych. Musi je przyjąć każdy użytkownik języka, aby w ogóle mógł się tym językiem sensownie posługiwać. Matematyka nie opisu-je zatem żadnych faktycznych stanów rzeczy, ale jedynie odzwierciedla pewne konwencje składniowe dotyczące użycia znaków. Jest oczywiście przydatna (nawet niezbędna) przy konstruowaniu teorii naukowych, ale nie dlatego, że opisuje jakiś fragment rzeczywistości, ale ze względu na to, że w każdym takim opisie konieczne jest wstępne przyjęcie pewnych konwencji. Matematyka jest zaś po prostu zapisem tych konwencji przyjmowanych w naukach przyrodniczych. Wedle słów Hempla matematyka stanowi jedynie „teoretyczną sokowirówkę” [Hempel 1945, 379]. Pozwala ona jedynie na sprawniejsze prowadzenie pewnych rozumowań i do tego sprowadza się jej rola.

2. STANOWISKO GÖDLA WOBEC „SYNTAKTYCZNEJ” INTEPRETACJI MATEMATYKI

Gödla rekonstrukcja interpretacji syntaktycznej. Gödel zdecydowanie odrzuca punkt widzenia logicznych pozytywistów. W [*Gödel 1953/9][4] w następujący sposób rekonstruuje syntaktyczną intepretację matematyki:

1. Celem interpretacji syntaktycznej jest eliminacja odwołań do intuicji matematycznej, ale bez naruszania użyteczności matematyki dla nauk empirycznych. Konieczne jest zatem objęcie tą interpretacją całej matematyki klasycznej.

2. Pod pojęciem „języka” należy rozumieć pewien symbolizm, który może być faktycznie obecny w świecie fizycznym.

3. Z tego samego powodu reguły składni muszą być finitystyczne (w szczególności nie mogą zawierać odwołań do nieskończonych klas wyrażeń, gdyż tutaj już musielibyśmy odwoływać się do jakiejś intuicji).

4. Reguła dotycząca wyrażeń może być uznana za regułę czysto syntaktyczną, wtedy, gdy nie implikuje żadnych zdań faktycznych, tj. zdań dotyczących rzeczywistości pozajęzykowej. W szczególności reguły składniowe muszą być niesprzeczne (w przeciwnym wypadku wynikałoby z nich dowolne zdanie, a więc także każde zdanie dotyczące rzeczywistości empirycznej)[5].

5. Wyrażenie „matematyka może być *interpretowana* jako składnia języka” znaczy:

---

[4]Jest to rękopis artykułu, który Gödel pisał do tomu poświęconego Carnapowi, redagowanego przez Schlippa w serii *Library of Living Philosophers* (Gödel napisał już wcześniej artykuł do tej serii, do tomu poświęconemu Russellowi). Gödel sporządził kilka wersji tego artykułu, ostatecznie jednak niezadowolony z końcowego efektu żadnej z nich nie opublikował, obawiając się, że publikacja artykułu w niedojrzałej wersji może — w świetle istnienia powszechnych stereotypów — raczej zaszkodzić dyskusji (list do Schlippa z 3.02.1959).

[5]Teoria T jest sprzeczna, jeśli dla pewnego zdania φ, T dowodzi zarówno φ jak i $\neg\varphi$. Jednak wówczas, na mocy prawa rachunku zdań $(\varphi\wedge\neg\varphi)\Rightarrow\alpha$, T dowodzi dowolnego zdania α sformułowanego w języku teorii T.

5.1. Formalne aksjomaty i procedury dowodowe mogą być wyprowadzone z reguł składniowych;

5.2. Zdania, które uzasadnialiśmy poprzez odwołania do intuicyjnej prawdziwości aksjomatów mogą być uzasadnione przez rozważania czysto syntaktyczne.

Gödel zauważa, że jeśli uznamy matematykę za system zdań prawdziwych, to np. rozstrzygnięcie hipotezy Goldbacha dostarczyłoby wiedzy na temat zachowania maszyny liczącej[6]. Natomiast sam fakt, że hipoteza Goldbacha wynika z pewnych dowolnie przyjętych założeń dotyczących operowania pewnymi symbolami nie implikuje nic na temat zachowania tej maszyny.

Gödel oczywiście potwierdza, iż „mechaniczny” dowód prowadzi do tych samych zdań co dowód „intuicyjny”. Jest między nimi jednak pewna różnica:

> „*[M]atematyczna intuicja dodatkowo dostarcza przekonania, że jeśli te zdania wyrażają obserwowalne fakty i zostały uzyskane przez zastosowanie matematyki do sprawdzonych praw fizycznych [...], to te fakty zostaną potwierdzone przez obserwację (lub obliczenia). Dlatego składnia, jeśli ma stanowić akceptowalny subsytut dla matematycznej intuicji, musi także dostarczyć dostatecznych powodów dla tych przekonań, a w tym celu konieczny jest dowód niesprzeczności*” [*Gödel 1953/9, 340].

6. Dlatego należy zażądać, aby:

6.1. W dowodach matematycznych, a także w dowodzie niesprzeczności były używane jedynie pojęcia syntaktyczne (tj. pojęcia odnoszące się do skończonych kombinacji symboli).

6.2. Używane procedury dowodowe były oczywiste dla każdego, kto w ogóle wie, jak posługiwać się wprowadzonymi pojęciami[7].

---

[6]Gdyby pewna maszyna licząca miała za zadanie sprawdzanie, czy kolejne liczby naturalne nie obalają hipotezy Goldbacha (tj. hipotezy, że każda liczba parzysta jest sumą dwóch liczb pierwszych), to rozstrzygnięcie hipotezy Goldbacha dostarczyłoby wiedzy na temat tego, czy maszyna ta się kiedykolwiek zatrzyma, czy też będzie działać w nieskończoność.

[7]W kolejnej wersji rękopisu Gödel formułuje swoje stanowisko w nieco inny sposób: 1. Intuicja matematyczna może zostać zastąpiona przez konwencje dotyczące

Analiza Gödla. Po dokonaniu takiej rekonstrukcji stanowiska „syntaktycznego", Gödel przechodzi do jego analizy. Zauważa, że dla zaakceptowania konwencjonalistycznej koncepcji matematyki konieczna byłaby wiedza, że przyjmowany system jest niesprzeczny. W innym wypadku taki system w oczywisty sposób byłby pozbawiony wartości, jako że w systemie sprzecznym można udowodnić wszystkie zdania, w szczególności zdania empiryczne. Byłoby jednak niedopuszczalne, aby z samych konwencji syntaktycznych wynikały jakiekolwiek zdania empiryczne. Warunek niesprzeczności jest więc warunkiem *sine qua non*. Na mocy II twierdzenia Gödla wiemy jednak, że niesprzeczności takiego systemu nie da się udowodnić w nim samym. Aby zatem rozpoznać i uzasadnić niesprzeczność takiego systemu konieczne jest odwołanie się do pozasystemowych prawd — dla rozpoznania których konieczna jest jednak jakaś forma intuicji, umożliwiającej wgląd w znaczenia abstrakcyjnych pojęć (tj. pojęć nie odnoszących się jedynie do kombinacji symboli) [*Gödel 1953/9, 357]:

> „*[N]iezależnie od tego, jak będą formułowane reguły syntaktyczne, moc i użyteczność powstającej w ten sposób matematyki jest proporcjonalna do mocy intuicji matematycznej koniecznej do udowodnienia dopuszczalności tych systemów. [...] jest jasne, że intuicja matematyczna nie może zostać zastąpiona przez konwencje, ale jedynie przez konwencje plus intuicję matematyczną*" [*Gödel 1953/59, 358][8].

używania symboli. 2. W przeciwieństwie do innych nauk, opisujących pewne przedmioty i fakty, nie istnieją żadne matematyczne przedmioty ani fakty. 3. Uznanie matematyki za system konwencji umożliwia pogodzenie apriorystycznej wizji matematyki z ścisłym empiryzmem. Wiemy bowiem *a priori*, jednak bez odwoływania się do jakiejkolwiej apriorycznej intuicji, że nie można doświadczalnie obalić konwencji dotyczących posługiwania się symbolami. [*Gödel 1953/9, 356].

[8]Oto inny, często cytowany fragment, dotyczący intuicji matematycznej: „*Pomimo ich [obiektów teorii mnogości — K.W.] oddalenia od danych zmysłowych mamy coś w rodzaju percepcji obiektów teorii mnogości, co widać z faktu, że aksjomaty narzucają się nam jako prawdziwe. Nie widzę powodu, aby mieć mniej zaufania do tego rodzaju percepcji, tj. do intuicji matematycznej, niż do percepcji zmysłowej, która pozwala nam budować teorie fizyczne, w oczekiwaniu, że przyszłe dane zmysłowe będą z nią zgodne, i co więcej oczekiwać, że problem, który teraz nie jest rozstrzygalny,*

Stwierdzenie, iż nie istnieją żadne matematyczne przedmioty ani fakty jest fałszywe. Gdyby bowiem to, co nam wydaje się obiektywną treścią matematyki było zaledwie złudzeniem, to powinniśmy być w stanie tworzyć matematykę nie odwołując się do tej pseudotreści. Zauważyć tu należy, że Gödel odwołuje się tu do argumentów natury psychologicznej: skoro nie da się tworzyć matematyki bez przyjmowania, że matematyka ma treść, to znaczy to, że matematyka rzeczywiście ma treść. Można byłoby jednak interpretować ten fakt także w tym duchu, że nasza struktura umysłowa jest taka, że do uprawiania matematyki potrzebny jest ten „wspornik psychologiczny". Jednak fakt ten miałby znaczenie czysto psychologiczne i tym samym argument Gödla nie byłby konkluzywny. Gödel podaje jednak także inne argumenty na rzecz tezy, iż zdania matematyczne mają obiektywną treść:

1. Konwencje dotyczące użycia symboli są pozbawione treści o tyle tylko, o ile nie dodają nic do teorii. Jeśli bowiem np. pewna operacja fizyczna jest łączna — pisze Gödel — to wynika stąd, że wolno przyjąć konwencję dotyczącą opuszczania nawiasów[9]. Oczywiście, jeśli uznamy, że nasza teoria opisuje świat, a w teorii tej znajduje się konwencja dotycząca opuszczania nawiasów, to z tej konwencji wynika łączność danej operacji fizycznej. Jednak oczywiście pierwotnym faktem jest łączność tej operacji fizycznej — dopiero na niej opiera się uzasadnienie odpowiedniej konwencji językowej. W wypadku konwencji dotyczących użycia symboli matematycznych sytuacja jest podobna: konwencje implikują te fakty, które uzasadniają dopuszczalność

jest mimo to sensowny i może zostać rozstrzygnięty w przyszłości" [Gödel 1947/64, 271].

[9]Oznaczmy bowiem wynik zastosowania pewnej operacji fizycznej do obiektów a, b jako a*b. Wtedy (a*b)*c oznacza obiekt powstały w wyniku zastosowania danej operacji do obiektów a oraz b i następnie do ponownego zastosowania tej operacji do powstałego obiektu a*b i obiektu c. Łączność operacji fizycznej oznaczanej przez * znaczy, że wynik tej operacji jest niezależny od kolejności: (a*b)*c = a*(b*c). Bez straty jednoznaczności można zatem przyjąć konwencję pozwalającą na opuszczenie nawiasów.

przyjęcia tych konwencji. Jednak pierwotne w porządku uzasadniania są właśnie te fakty[10].

2. To, że można przeprowadzić program syntaktyczny wynika z zaledwie dwóch faktów:

2.1. Prawdy matematyczne wynikają ze stosunkowo niewielkiej ilość prawd pierwotnych.

2.2. Są one „oddzielalne” od innych stwierdzeń, ponieważ nie wynikają z nich żadne stwierdzenia empiryczne.

Gödel odwołuje się tu następnie do pewnego eksperymentu myślowego: gdybyśmy mieli jakiś zmysł, którego postrzeżenia byłyby dostatecznie regularne i oddzielone od pozostałych zmysłów, to moglibyśmy intepretować stwierdzenia dotyczące przedmiotów postrzeganych przez ten zmysł jako pozbawione treści konwencje syntaktyczne[11]. Dokładnie tak jest jednak według Gödla w wypadku intuicji matematycznej. Uznanie zdania „to jest czerwone” za dotyczące obiektywnych danych, zaś zdania wyrażającego *modus ponens*, czy zasadę indukcji za pozbawiony treści opis pewnej konwencji językowej, jest czysto arbitralne. Różnica polega bowiem jedynie na tym, że w wypadku pierwszego zdania mówimy o zależności między obiektem, a pewnym pojęciem, zaś w drugim wypadku — o zależnościach między pojęciami. [*Gödel 1953/59, 359].

3. Fakt, że przyjmiemy interpretację syntaktyczną — w myśl której znaczenie symbolu sprowadza się do reguł jego użycia — nie znaczy wcale, że matematyka staje się bardziej konwencjonalna (w sensie: dowolna) niż inne nauki. Podobnie można bowiem postąpić w innych naukach: zamiast stwierdzić istnienie opisu przedmiotu, można po prostu stwierdzić, że przyjmujemy (jako konwencję) prawdziwość pewnych zdań. W obu wypadkach dojdziemy do tych samych wniosków.

---

[10]„W duchu” interpretacji syntaktycznej byłoby zatem uznanie praw fizyki za pewne konwencje przyjmowane w naszej teorii.

[11]Rzeczywiście — twierdzenie dotyczące przedmiotów tego zmysłu nie miałyby związku z twierdzeniami dotyczącymi pozostałych zmysłów. Nie byłoby zatem metody uzasadnienia istnienia obiektów tego zmysłu przez powołanie się na teorie konstruowane w oparciu o świadectwo innych zmysłów.

Gödel ma tu zapewne na myśli fakt, że interpretację taką można przyjąć także w wypadku innych nauk empirycznych, traktując np. tezy dotyczące istnienia obiektów fizycznych dostarczających nam danych zmysłowych jako konwencje, umożliwiające skrótowe wyrażenie stwierdzenia dotyczącego *de facto* wyłącznie tych danych zmysłowych. Oczywiście, wnioski do jakich dojdziemy w danej teorii empirycznej będą — formalnie rzecz biorąc — takie same, niezależnie od naszej interpretacji zdań o obiektach fizycznych.

4. Twierdzenie, jakoby zdania matematyczne nie miały treści, gdyż — traktowane w oderwaniu — nie implikują nic na temat doświadczenia, jest bezzasadne. Gödel twierdzi bowiem, że:

> *„[P]rawa przyrody bez matematyki czy logiki równie mało mówią o doświadczeniu, co matematyka bez praw przyrody. To, że matematyka, przynajmniej w większości zastosowań, dodaje coś do treści praw natury jest widoczne najlepiej na przykładach, gdzie mamy do czynienia z bardzo prostymi prawami dotyczącymi pewnych elementów, np. dotyczących zachowania układów elektronicznych. Tu matematyka w oczywisty sposób dodaje ogólne prawa dotyczące tego, w jaki sposób będą zachować się te układy. To, że te późniejsze* [tj. ogólne — K.W.] *prawa nie zawierają się w poprzednich jest widoczne z następujących faktów: (a) Późniejsze prawa mogą zawierać pojęcia niedefiniowalne w terminach pojęć występujących w poprzednich (np. pojęcie kombinacji dowolnej skończonej liczby elementów). (b) Aby zrozumieć prawa przyrody jest wystarczające, o ile chodzi o występujące tam pojęcia matematyczne, znać reguły, które rozstrzygają, czy prawa te — w poszczególnych wypadkach — mają zastosowanie, czy nie. Jednak te reguły w żaden sposób nie implikują rządzących nimi praw ogólnych. (c) Te ogólne prawa mogą nawet wymagać nowych wnioskowań empirycznych, w wypadku gdy stosowny problem matematyczny jest nierozstrzygalny. Tak może być np. w wypadku hipotezy Goldbacha, z której w oczywisty sposób wynikają prawa dotyczące zachowania się maszyny liczącej. Ogólne prawa matematyczne mogą nawet być konieczne dla przewidywania wyników pojedynczej obserwacji, np. wtedy, gdy ta ostatnia uzależniona jest od nieskończenie wielu (np. continuum) elemen-*

> *tów fizycznych. Dlatego nowe aksjomaty matematyczne mogą prowadzić do nowych, weryfikowalnych empirycznie tez dotyczących doświadczenia, dokładnie tak samo, jak nowe prawo fizyki. Twierdzenia matematyczne [...] nie dotyczą właściwości struktur fizycznych, ale raczej własności pojęć, w terminach których opisujemy te struktury. To jednak pokazuje, że własności tych pojęć są czymś równie obiektywnym i niezależnym od naszego wyboru, co własności fizyczne materii.*" [*Gödel 1939/59, 360].

Według Gödla konieczne jest więc odróżnienie treści „faktualnych" i „konceptualnych" — pomimo iż oba te rodzaje treści są obiektywne.

Goldfarb, komentując w [Goldfarb 1995] artykuł Gödla wskazuje na założenia, na jakich się argumentacja Gödla w niejawny sposób opiera. Aby zarzuty Gödla miały moc, konieczne jest przyjęcie założenia, że pojęcie „faktyczności" czy „empiryczności" jest dane przed przyjęciem konwencji matematycznych. W myśl tego założenia najpierw dane są zdania empiryczne (zaś ich prawdziwość lub fałszywość uzależniona jest od stanu świata), zaś dopiero potem dodaje się — przez przyjęcie stosownych konwencji — zdania matematyczne. Według Goldfarba tak właśnie Gödel odczytał *Logiczną składnię języka* Carnapa (traktowaną jako techniczną realizację lingwistycznej koncepcji matematyki).

Według Goldfarba możliwa jest jednak także druga interpretacja, w myśl której nie ma pojęcia „zdania empirycznego", uprzedniego w stosunku do przyjęcia konwencji językowych. Konwencje te należy bowiem przyjąć zanim można będzie sensownie sformułować pojęcie „empiryczności". Zasada Tolerancji Carnapa winna być więc interpretowana właśnie tak, że odrzuca się w niej takie „transcendentalne" (*language-transcendent*) pojęcie „empiryczności". Przy takim rozróżnieniu, pojęcie „faktu empirycznego" jest dane poprzez sposób rozróżnienia, co wynika z reguł danego języka a co nie. Tym samym argumentacja Gödla (a w każdym razie jej fragment) trafia w próżnię.

Goldfarb wskazuje także na fakt, że przeprowadzenie dowodu niesprzeczności (o czym mówi Gödel w swojej argumentacji) wcale nie jest konieczne z punktu widzenia stanowiska Carnapa. Carnap bowiem opiera się wyraźnie na kryteriach natury pragmatycznej. Możliwość przyjęcia danego systemu językowego ma związek jedynie z jego użytecznością. Sprzeczna teoria byłaby bezużyteczna, ale — ponieważ jedynym kryterium jest użyteczność — byłaby odrzucona tylko z powodu swej małej użyteczności, a nie z innych powodów[12].

Goldfarb zwraca także uwagę na analogie i różnice w argumentacji Gödla i Quine'a — które również są istotne w kontekście nad konwencjonalistyczną interpretacją matematyki. O ile Quine, kwestionując rozróżnienie na zdania analityczne i syntetyczne tym samym „zaciera" różnice między zdaniami empirycznymi i matematycznymi, o tyle Gödel wskazuje jedynie na pewne analogie. Między „królestwem empirii" i „królestwem matematyki" jest jednak wyraźna i ostra granica. Gödel w tym kontekście zauważa:

> „*Zaletą syntaktycznego punktu widzenia w odniesieniu do natury matematyki jest niewątpliwie to, że ukazuje on fundamentalną różnicę pomiędzy prawdą matematyczną i empiryczną. Różnica [...] polega na tym, że zdania matematyczne, w przeciwieństwie do empirycznych, są prawdziwe na mocy występujących w nich pojęć*" [Gödel 1953/59, 356-357]

Pojęcie „faktu", „prawdy", „obiektu" stosuje się więc również do „królestwa pojęć", które istnieje w sposób obiektywny i niezależny od świata empirycznego. Prawdziwość zdań matematycznych — w przeciwieństwie do stwierdzeń empirycznych — ma źródło w występujących w tych zdaniach pojęciach[13]. Jednak odrzuca nominalistyczną

[12] Można tę argumentację jeszcze bardziej wzmocnić: gdyby mieć do czynienia z teorią, w której najkrótszy dowód sprzeczności przekracza długość dowodów nam dostępnych, to teoria taka — teoretycznie rzecz biorąc — mogłaby być użyteczna, z tego powodu, że korzystalibyśmy tylko z tego jej fragmentu, który nie „generuje" sprzeczności. Gdyby np. okazało się, że w matematyce, jaką się posługujemy tkwi sprzeczność, stanowiłoby to ilustrację tej sytuacji. Oczywiście argument ten ma charakter wysoce spekulatywny.

[13] Podobne stwierdzenie znajdziemy w [*Gödel 1951, 320], gdzie Gödel pisze, iż „*Wypowiedź matematyczna [...] jest prawdziwa już na mocy znaczeń występujących w niej pojęć, niezależnie od świata rzeczy*".

intepretację, w myśl której pojęcia te winny być identyfikowane z symbolami, zaś treść zdań matematyczych z konwencjami ich użycia[14].

Gödel twierdzi, że prawdziwość zdań matematycznych ma charakter analityczny, wynika z treści użytych w nich pojęć. Należy tu jednak zwrócić uwagę na nietypowe (inne niż w literaturze) rozumienie pojęcia analityczności. W [Gödel 1944] Gödel wyróżnia dwa sensy pojęcia analityczności: taki, w myśl którego twierdzenia są jedynie tautologiami i drugi, w myśl którego twierdzenia odwołują się do treści pojęć. Twierdzenia matematyki są analityczne wg. Gödla w drugim sensie. Zdania analityczne mogą zatem okazać się nierozstrzygalne, gdyż „*nasza znajomość świata pojęć może być równie ograniczona i niepełna jak znajomość świata rzeczy*" [*Gödel 1951, 321].

Skoro jednak prawdziwość zdań matematycznych wynika z treści pojęć, to pojawia się pytanie, jaka jest relacja między tą obiektywną treścią a konwencjami syntaktycznymi (których obecności w matematyce oczywiście Gödel nie negował! – są one w oczywisty sposób obecne we wszystkich teoriach formalnych). Inaczej niż w wypadku interpretacji syntaktycznej (konwencjonalistycznej), Gödel twierdzi, że aby móc przyjąć konwencje syntaktyczne należy najpierw wniknąć w treść pojęć, zrozumieć te pojęcia i dopiero wtedy, na tej podstawie można uzasadnić reguły syntaktyczne [*Gödel 1951, 317]. Gödel zwraca też uwagę na fakt, że w zasadzie, na gruncie interpretacji syntaktycznej konieczne jest (dla wyjaśnienia i uzasadnienia tezy, iż matematyka stanowi jedynie system zdań pomocniczych) odwołanie się do faktów matematycznych. Aby zatem udowodnić nieistnienie tych faktów, musimy się do nich odwoływać [*Gödel 1951, 319-320]. Uzasadnienia wiedzy matematycznej nie należy poszukiwać we własnościach obiektów fizycznych, takich jak skończone ciągi symboli,

[14]Nie wnikając w szczegóły, zasadniczą tezą konwencjonalistycznej teorii znaczenia jest to, iż znaczenie danego wyrażenia jest zadane poprzez reguły jego użycia (nie ma żadnego innego sensu terminu „znaczenie" jak tylko „reguły użycia"). W ujęciu behawioralnym, znaczenie wyrażeń jest redukowalne do opisu klasy zachowań użytkowników danego języka. W wersji weryfikacjonistycznej, znajomość znaczenia danego wyrażenia, to znajomość sposobu weryfikacji tego wyrażenia.

ale w lepszym zrozumieniu pojęć abstrakcyjnych, leżących u podstaw systemów tych symboli.

Za konkluzję tej prezentacji niech posłuży następująca uwaga Gödla:

> „*Nie istnieje racjonalne uzasadnienie naszych przedkrytycznych przekonań dotyczących stosowalności i niesprzeczności klasycznej matematyki (ani nawet jej najbardziej podstawowego poziomu, tj. teorii liczb) na gruncie interpretacji syntaktycznej*” [* Gödel 1951, 318].

BIBLIOGRAFIA

Benacerraf P., Putnam H.

[1964] *Philosophy of Mathematics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Carnap R.

[1932] „Überwindung der Metaphysik durch die Logische Analyse der Sprache”, *Erkenntnis*, 2, 219-241. Przekład polski: „Przezwyciężenie metafizyki przez logiczną analizę języka”, w: Stanosz B. (red.) *Empiryzm współczesny*, Warszawa: Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego 1991, s. 52-74.

[1937] *Logische Syntax der Sprache*, Wiedeń. Przekład polski: *Logiczna skladnia języka*, Warszawa: PWN, 1995.

[1950] „Empiricism, semantics and ontology”, w: *Revue Internationale de Philosophie*, 4, 20-40. Przedrukowane w: [Benacerraf, Putnam 1964], s. 233-248.

Goldfarb W.

[1995] „Introductory note to [*Gödel 1953/9], w: [Gödel 1995], s. 324-334.

Gödel K.

[1944] „Russell’s Mathematical Logic”, w: *The philosophy of Bertrand Russell.* Schlipp P.A. (red.), Open Court Publishing Company, La Salle, Illinois, 123-153. Przedrukowane w: [Benacerraf Putnam 1964], s. 211-232.

[1947/64] „What is Cantor's Continuum Problem?", w: [Benacerraf Putnam 1964], s. 258-273.

[*1951] „Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications", w: [Gödel 1995], s. 304-323.

[*1953/59] „Is mathematics syntax of language?", w: [Gödel 1995], 334-363.

[*1961] „The modern development of the foundations of mathematics in the light of philosophy", w: [Gödel 1995], 374-387.

[1995] *Collected Works*, vol.3., Feferman S. i.in. (red.), Oxford University Press.

Hempel C.G.

[1945] „On the nature of mathematical truth", *The American Mathematical Monthly*, 52, 543-56. Przedrukowane w [Benacerraf, Putnam 1964], s. 366-381.

Quine W.V.O.

[1953] „Two dogmas of empiricism", w: *From a Logical Point of View*, Cambridge, Harvard University Press, s. 20-46, przeklad polski: „Dwa dogmaty empiryzmu" w: *Z punktu widzenia logiki*, Warszawa: PWN, 1969, s. 35-70.

Wójtowicz K.

[1996] "Filozofia Kurta Gödla", *Edukacja Filozoficzna*, 21, s. 149-159.

[2002] *Filozofia matematyki Kurta Gödla*, OBI-Kraków, Biblos-Tarnów.