ARTYKUŁY

Zagadnienia Filozoficzne
w Nauce
XXVIII-XXIX / 2001, s. 100–117*

Krzysztof WÓJTOWICZ

Instytut Filozofii UW
Warszawa

O TZW. PROGRAMIE GÖDLA

1. WSTĘP

W artykule omawiam tzw. program Gödla, związany z poszukiwaniem nowych aksjomatów teorii mnogości, umożliwiających rozstrzyganie zdań niezależnych od ZFC. Oprócz poglądów samego Gödla prezentowane są też wybrane poglądy współczesnych autorów i pewne wyniki osiągnięte w zakresie tych badań.

2. TWIERDZENIA GÖDLA

I twierdzenie Gödla mówi o tym, że dostatecznie bogate teorie o rekurencyjnym zbiorze aksjomatów są niezupełne. Dla każdej teorii T spełniającej założenia twierdzeń Gödla istnieje więc zdanie σ sformułowane w języku teorii T takie, że ani σ ani$\neg\sigma$ nie są twierdzeniami teorii T. Przykładami teorii spełniających założenia I twierdzenia Gödla są arytmetyka Peano (PA) i teoria mnogości (ZFC).

Oryginalny dowód Gödla nie podawał przykładu „konkretnego” zdania niezależnego. Niezależne zdanie Gödla było zdaniem skonstruowanym za pomocą argumentu przekątniowego i w zasadzie pozbawionym czysto matematycznej treści. Było to bowiem zdanie, które — swobodnie mówiąc — wyrażało metamatematyczny fakt własnej niedowodliwości, a więc głosiło „ja nie mam dowodu”. Oczywiście,

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

aby takie zdanie mogło być skonstruowane, konieczne było reprezentowanie — dzięki tzw. „arytmetyzacji składni” — metamatematycznych faktów w arytmetyce. To z kolei możliwe jest dzięki temu, że PA posiada dostatecznie dużą moc wyrażeniową.

Jeśli φ jest zdaniem niezależnym od teorii T, to zarówno T+φ, jak i T+$\neg\varphi$ są teoriami niesprzecznymi. Nie ma możliwości formalnego rozstrzygnięcia — na gruncie teorii T – między φ a $\neg\varphi$. Być może jednak istnieją pozaformalne argumenty na rzecz uznania jednego z tych zdań za bardziej wiarygodne? Rozważmy ten problem najpierw na przykładzie zdań Gödlowskich dotyczących PA. Zdania takie mają postać $\sigma=\forall x\varphi(x)$ i nie są dowodliwe w PA, jednak każde ze zdań $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, $\varphi(3)$,. .. (które odnoszą się do poszczególnych liczb naturalnych) jest twierdzeniem PA.[1] Interpretacja zdań skonstruowanych w dowodzie Gödla jest naturalna: zdanie σ wyraża treść „σ nie ma dowodu w PA”.[2] Skoro więc σ nie ma dowodu w PA, tym samym naturalne jest uznanie zdania σ za zdanie prawdziwe. Wniosek, jaki się tu często wyciąga jest taki: istnieją prawdziwe zdania, które są niedowodliwe w PA (przykładem takiego zdania jest właśnie σ — stwierdza ono, iż nie istnieje jego własny dowód w PA, więc skoro dowód ten rzeczywiście nie istnieje, to σ można uznać za prawdziwe). Tu należy pamiętać o tym, że „prawdziwość” oznacza tu „prawdziwość w modelu standardowym”, czy inaczej: „prawdziwość w dziedzinie liczb naturalnych”. Skoro prawdą arytmetyki Peano jest $\varphi(1)$, $\varphi(2)$,... etc. – tzn: skoro zdanie φ jest prawdziwe o każdej z liczb, to również zdanie $\forall x\varphi(x)$ jest prawdziwe w dziedzinie liczb naturalnych (czyli w tzw. modelu standardowym **N**) .[3] Pytanie, czy raczej

[1] Ściśle rzecz biorąc, są to zdania postaci $\varphi(n)$, gdzie n jest liczebnikiem, tj. termem postaci 1+1+...+1 (n razy), który reprezentuje liczbę naturalną $n\in\omega$.

[2] Tu należy pamiętać o pewnej subtelności: zdanie σ będące zdaniem języka PA *reprezentuje* pewien fakt metamatematyczny w języku PA. Podobnie zdanie Con PA reprezentuje w języku PA fakt niesprzeczności PA. Nie można jednak go uważać za identyczne z metamatematycznym zdaniem „PA jest niesprzeczna” czy „PA ma model”.

[3] Zdanie $\forall x\varphi(x)$ jest prawdziwe w **N**, jednak nie jest prawdziwe we wszystkich modelach dla PA. Istnieje więc model M taki, że prawdziwe są w nim zdania $\varphi(1)$,

należy dołączyć do PA zdanie σ, czy $\neg\sigma$ wydaje się być zatem dość łatwe do rozstrzygnięcia — należy dołączyć σ, gdyż zadaniem PA jest opis liczb naturalnych, a w liczbach naturalnych prawdziwe jest σ. Jest to zgodne z naszą intuicją. Teoria PA+σ spełnia założenia twierdzenia Gödla, pozostanie więc nadal teorią niezupełną, i sytuacja się powtórzy — będzie istnieć zdanie σ 1 niezależne od PA+σ. Wyraźnie widoczne jest to w wypadku zdania Con PA, czyli zdania „PA jest niesprzeczna". II twierdzenie Gödla głosi, że zdanie Con PA jest niezależne od PA, tj. PA „nie potrafi" udowodnić swojej własnej niesprzeczności.[4] Oczywiście zdanie ¬Con PA („PA jest sprzeczna") też nie jest twierdzeniem PA, a więc zdanie Con PA jest zdaniem niezależnym od PA. Obie teorie: PA+Con PA i PA+ ¬Con PA są więc niesprzeczne i mogą być rozważane jako „kandydatki" na rozszerzenie PA.

Naturalne wydaje się jednak dołączenie do PA zdania Con PA, a nie zdania ¬Con PA (gdyż otrzymana teoria PA+„PA jest sprzeczna" byłaby wprawdzie niesprzeczną teorią, jednak trudno byłoby uznać ją za teorię naturalną). Standardowy model **N** jest modelem dla PA+Con PA, co również stanowi argument na rzecz wiarygodności zdania Con PA. Zgodnie z II twierdzeniem Gödla również zdanie Con PA+Con(PA) (czyli zdanie „PA+Con PA jest niesprzeczna") jest niezależne od PA+Con PA i sytuacja się powtarza — zarówno teoria PA+Con PA +Con PA+Con(PA), jak i teoria PA+Con PA + ¬Con PA+Con(PA) są teoriami niesprzecznymi. Jednak i tutaj mamy do dyspozycji naturalne intuicje, które kierują naszymi wyborami: skoro bowiem „wierzymy" w prawdziwość teorii T, to nienaturalne byłoby jednocześnie „wierzyć" w jej sprzeczność i uznać za naturalne rozszerzenie teorii T zdanie „T jest sprzeczna". O fakcie tym wspominał Gödel pisząc, iż istnieją zdania niedowodliwe, ale oczywiste z „ze-

$\varphi(2)$,...(gdyż zdania te są twierdzeniami PA), ale nie jest prawdziwe zdanie $\forall x\varphi(x)$ — po prostu istnieje element a∈M taki, że w M prawdziwe jest zdanie$\neg\varphi(a)$.

[4]Por. przypis 2 — to, czy uznamy zdanie Con PA za zdanie wyrażające niesprzeczność zależy od naszej interpretacji. Zdanie Con PA *reprezentuje* w języku PA fakt niesprzeczności PA. Nie można jednak go uważać za identyczne z metamatematycznym zdaniem „PA jest niesprzeczna" czy „PA ma model".

wnętrznego" — wykraczającego poza dany formalizm — punktu widzenia.

Jeśli zatem uznamy, że zadaniem PA (i jej rozszerzeń) jest możliwie pełny opis uniwersum liczb naturalnych (czyli **N**) , to dostarcza to nam kryterium do dokonywania odpowiednich wyborów zdań rozszerzających PA. Wybierać będziemy zawsze zdanie prawdziwe w modelu standardowym **N**. Te wybory są dokonywane w oparciu o to, że liczby naturalne są kategorycznie scharakteryzowane w teorii mnogości, i w teorii mnogości można zdefiniować pojęcie „prawdy o liczbach naturalnych" (czyli „zdania prawdziwego w standardowym modelu dla PA"). Mamy więc do dyspozycji „wyższą instancję", które pozwala rozstrzygnąć szereg[5] problemów, jakie pojawiają się w tym kontekście.[6]

3. ZDANIA NIEZALEŻNE OD PA A ZDANIA NIEZALEŻNE OD ZFC

W wypadku PA mamy zatem naturalną metodę rozstrzygania prawdziwości zdań niezależnych od PA. Jak wygląda sytuacja w wypadku teorii mnogości ZFC? Zgodnie z I twierdzeniem Gödla ZFC także jest teorią niezupełną, a więc istnieją zdania σ od niej niezależne. Zarówno ZFC+σ jak i ZFC+$\neg\sigma$ są wówczas teoriami niesprzecznymi. W szczególności takim zdaniem niezależnym jest zdanie Con ZFC („ZFC jest niesprzeczna"). Kiedy zastanawiamy się nad rozszerzeniem ZFC o jedno ze zdań: Con ZFC lub ¬Con ZFC to bardziej natural-

[5]Nie można liczyć na to, że ZFC umożliwi udowodnienie *wszystkich* zdań prawdziwych w **N**. Th (**N**) nie jest bowiem zbiorem rekurencyjnym, więc rekurencyjna teoria (jaką jest ZFC) nie „potrafi" zidentyfikować wszystkich zdań prawdziwych w modelu standardowym.

[6]Zauważmy, że o ile w wypadku zdań typu „ja jestem niedowodliwe" mieliśmy intuicyjne poczucie prawdziwości tych zdań, to w wypadku zdań niezależnych od PA o charakterze kombinatorycznym (odkrytych wiele lat po udowodnieniu twierdzenia Gödla) nie mamy do dyspozycji takich intuicji. Aby stwierdzić ich prawdziwość konieczne jest odwołanie się do teorii mnogości, w ramach której opisywane są liczby naturalne.

nym kandydatem jest Con ZFC a nie Con ZFC.[7] W tym wypadku mamy dość czytelne intuicje dotyczące prawdziwości zdania Con ZFC i możemy odwołać się do argumentu podobnego typu jak w wypadku PA. Jeśli „wierzymy” w aksjomaty ZFC, to powinniśmy również „wierzyć” w niesprzeczność ZFC. Jednak w wypadku ZFC znamy również szereg niezależnych zdań o naturalnej treści matematycznej (a nie jedynie metamatematycznej), spośród których najbardziej znanym przykładem jest hipoteza continuum (CH).[8] Trudno jest w wypadku tych — już czysto matematycznych — zdań niezależnych odwoływać się do prostych intuicji, tak jak w wypadku zdań Gödlowskich dla PA czy zdania typu Con ZFC. Nie możemy też oczywiście odwołać się (jak w wypadku PA) do pojęcia „standardowego modelu dla teorii mnogości” i relatywnie do tego modelu oceniać prawdziwość (czy wiarygodność) zdań. Rozstrzygnięcie prawdziwości zdań niezależnych od ZFC musi odbywać się w oparciu o zupełnie inne kryteria — przy założeniu, że sam problem poszukiwania rozszerzeń ZFC i analizy wiarygodności zdań niezależnych uznamy za sensowny.

[7]Teoria ZFC+ ¬Con ZFC ma model M, jednak „z punktu widzenia” modelu M nie istnieje model dla ZFC (gdyż ¬Con ZFC wyraża fakt sprzeczności ZFC, a więc nieistnienia modelu dla ZFC). Podobnie, „z punktu widzenia” modelu M' dla teorii ZFC+Con ZFC istnieje model dla ZFC (dzięki temu, że w M' prawdziwe jest zdanie Con ZFC, czyli „ZFC ma model”). Można o tym mówić dzięki temu, że pojęcie modelu dla ZFC (w szczególności pojęcie formuły, zdania, spełniania, etc). jest zdefiniowane w ZFC.

[8]Hipoteza *continuum* mówi, że moc zbioru liczb rzeczywistych jest następną liczbą kardynalną po mocy zbioru liczb naturalnych. Oznaczając przez $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, $\aleph_3$, ..., *etc*. kolejne nieskończone liczby kardynalne (gdzie $\aleph_0$ jest mocą zbioru liczb naturalnych), zaś moc zbioru liczb rzeczywistych przez c, hipoteza *continuum* przyjmuje postać: $c = \aleph_1$. Sformułowana została ona już przez Cantora w XIX wieku, natomiast jej metamatematyczny status jako zdania niezależnego od aksjomatów ZFC ustalili dopiero Gödel i Cohen ([Gödel 1940], [Cohen 1966]). Hipoteza *continuum* nie jest jedynym zdaniem niezależnym o naturalnej treści matematycznej. Znane są przykłady zdań o treści kombinatorycznej, zdań dotyczących zbiorów liczb rzeczywistych, zdań dotyczących własności przestrzeni Banacha, *etc.* Nie przytaczam ich tutaj, gdyż celem artykułu jest prezentacja problemu filozoficznego, a nie prezentacja techniczna.

4. CZY PROBLEM PRAWDZIWOŚCI ZDAŃ NIEZALEŻNYCH JEST DOBRZE POSTAWIONY?

Rozważmy zdanie σ niezależne od ZFC. Zastanówmy się, czy w ogóle pytanie o prawdziwość σ (czyli — innymi słowy — która z teorii ZFC+σ, ZFC+$\neg\sigma$ jest „lepszą kandydatką” na rozszerzenie ZFC) jest dobrze postawione. Sformułujmy więc najpierw pytanie w silnej formie:

PYTANIE ZASADNICZE: Czy zdanie σ jest prawdziwym opisem uniwersum matematycznego, czyli: czy wyraża ono prawdę o uniwersum zbiorów? (przy czym pojęcie „prawdy” interpretujemy w klasyczny, korespondencyjny sposób).

Aby uznać, że to zasadnicze pytanie jest dobrze postawione, niezbędne jest przyjęcie stanowiska realistycznego, i to zakładającego realizm określonego typu. Konieczne jest bowiem założenie, że istnieje uniwersum matematyczne i że w tym uniwersum zdania matematyczne są prawdziwe lub fałszywe — niezależnie od naszych możliwości poznawczych.

Niewątpliwie, pytanie o prawdziwy opis uniwersum matematycznego jest źle postawione z punktu widzenia skrajnego formalizmu, w myśl którego matematyka stanowi jedynie grę symboli pozbawioną interpretacji. Formalizm przyjmuje ontologiczną tezę nominalizmu i odrzuca istnienie obiektów matematycznych — a więc pojęcie „prawdy” redukuje się do twierdzeń o charakterze metamatematycznym („co z czego formalnie wynika”). Swoistym przeciwieństwiem formalizmu jest stanowisko „bogatego platonizmu”.[9] W myśl tej koncepcji istnieje szereg „równoprawnych” uniwersów matematycznych, spośród których żadne nie jest wyróżnione. W odniesieniu do teorii mnogości oznacza to, że każda z możliwych koncepcji zbioru ma swoją realizację w jednym z uniwersów. W szczególności nie ma sensu np. stwierdzenie, że „tak naprawdę” prawdziwy jest pewnik wyboru albo aksjomat determinacji — obie koncepcje zbioru są bowiem zre-

[9]Koncepcją *full-blooded platonism* formułuje np. Balaguer w [Balaguer 1998]

alizowane w dwóch „równoległych” uniwersach matematycznych.[10] Paradoksalnie, ta najbogatsza wersja platonizmu zajmuje identyczne stanowisko w kwestii zasadności PYTANIA ZASADNICZEGO co stanowisko formalistyczne — skoro bowiem każda koncepcja zbioru jest równie dobra jak każda inna, to nie ma sensu zastanawianie się nad tym, jakie tak naprawdę jest uniwersum. Każda teoria jest bowiem równie dobra jak inna — każda z nich opisuje bowiem pewne uniwersum.

Gödel odrzucał zarówno stanowisko nominalizmu, jak i „bogatego platonizmu”. Według niego przedmioty matematyczne tworzą pewną obiektywną rzeczywistość, w której każde zdanie matematyczne jest prawdziwe lub fałszywe. Gödel odróżniał matematykę obiektywną — na którą składają się prawdy matematyczne — od matematyki subiektywnej, składającej się ze zdań dowodliwych. Prawdy matematyczne wykraczają poza zdania dowodliwe w jakimkolwiek systemie formalnym. Nasz opis uniwersum jest zatem wprawdzie niepełny i niedoskonały, jest to jednak opis pewnego ustalonego, niezmiennego uniwersum. Gödel odrzuca stanowisko, w myśl którego pewne zdania matematyczne są „niedookreślone”, nie mają obiektywnej wartości logicznej. Nawet fakt nierozstrzygalności w danym formaliźmie nie oznacza, iż formułowanym zdaniom nie przysługuje wartość logiczna. Według Gödla czysto formalne, „mechaniczne” pojęcie dowodu jako źródła naszej pewności nie jest w pełni adekwatne; przejście do systemu formalnego „gubi” coś po drodze. Przykładem takich zdań są zdania niezależne od PA — niedowodliwe w ramach PA, ale jednak oczywiste „z zewnętrznego punktu widzenia”. Uzasadnienia prawdziwości zdań wykracza więc poza czysto syntaktyczne procedury dowodowe. W szczególności oznacza to, że PYTANIE ZASADNICZE jest dobrze postawione, a odpowiedzi na nie należy poszukiwać poprzez rozważania wykraczające poza kontekst sformalizowanych teorii.

[10]Podobna sytuacja ma miejsce w wypadku np. hipotezy continuum i jej negacji, czy w wypadku dowolnego zdania niezależnego od ZFC, a nawet aksjomatów ZF — w myśl stanowiska *full-blooded platonism* istnieje zarówno uniwersum zbiorów ufundowanych i uniwersum zbiorów nieufundowanych.

5. JAKIE SĄ KRYTERIA PRAWDZIWOŚCI ZDAŃ MATEMATYCZNYCH?

Jakie pozaformalne kryteria prawdziwości zdań podaje Gödel? Wyróżnia on dwa rodzaje kryteriów:

(1) Swoistą intuicję, która umożliwia nam rozumienie pojęć matematycznych. Takimi podstawowymi pojęciami matematycznymi są pojęcia „zbioru" i „należenia". Intuicja umożliwia nam analizę treści pojęć (swobodnie mówiąc, „wniknięcie" w te pojęcia). To z kolei pozwala na sformułowanie aksjomatów (także nowych aksjomatów) i uznanie ich prawdziwości. Kryterium jest tu swoista oczywistość aksjomatów.

Oto najbardziej charakterystyczny fragment pism Gödla dotyczący problemu intuicji:

„ *Pomimo ich oddalenia od danych zmysłowych mamy coś w rodzaju percepcji obiektów teorii mnogości, co widać z faktu, że aksjomaty narzucają się nam jako prawdziwe. Nie widzę powodu, aby mieć mniej zaufania do tego rodzaju percepcji, tj. do intuicji matematycznej, niż do percepcji zmysłowej, która pozwala nam budować teorie fizyczne, w oczekiwaniu, że przyszłe dane zmysłowe będą z nią zgodne, i co więcej oczekiwać, że problem, który teraz nie jest rozstrzygalny, jest mimo to sensowny i może zostać rozstrzygnięty w przyszłości* „ [Gödel 1947/64, 271].

Gödel od około 1959 roku interesował się także fenomenologią; właśnie fenomenologia miała stanowić według niego metodę umożliwiającą głębsze zrozumienie istoty pojęć matematycznych [Gödel 1961, 382].

(2) Uzasadnianie zdań może się odbywać jednak nie tylko w oparciu o analizę treści pojęć matematycznych. Innym kryterium prawdziwości nowych aksjomatów jest ich owocność, ich przydatność w badaniach matematycznych. Jest to zatem — jak pisze sam Gödel — kryterium niejako indukcyjne, oparte o ich „sukcesy". Jeśli nowy aksjomat okaże się pomocny w rozwiązywaniu istniejących problemów matematycznych, jeśli dostarczy nowych metod rozwiązywania proble-

mów, jeśli umożliwi ujednolicenie metod dowodowych — to wówczas mamy silne przesłanki, aby ten aksjomat przyjąć. Charakterystyczny jest tu następujący fragment:

„*Mogą istnieć aksjomaty tak owocne w weryfikowalne konsekwencje, rzucające tak dużo światła na całą dyscyplinę i dostarczające tak silnych metod rozwiązywania problemów (i to rozwiązywania konstruktywnego, tak dalece, jak jest to możliwe), że niezależnie od zagadnienia, czy są one wewnętrznie konieczne, powinny zostać zaakceptowane przynajmniej w takim stopniu, jak dowolna dobrze ugruntowana teoria fizyczna.* ” [Gödel 1947/64, 265].

6. KTÓRE ZDANIA O UNIWERSUM MATEMATYCZNYM SĄ PRAWDZIWE?

Według Gödla zasadne jest poszukiwanie nowych aksjomatów dla teorii mnogości, ktore pozwolą na uzyskanie pełniejszego obrazu rzeczywistości matematycznej.

Sztandarowym — i niejako paradygmatycznym — przykładem zdania niezależnego od ZFC jest hipoteza *continuum*. Gödel udowodnił niesprzeczność hipotezy *continuum* z pozostałymi aksjomatami teorii mnogości metodą tzw. zbiorów konstruowalnych. Dołączenie do teorii mnogości jako nowego aksjomatu tzw. aksjomatu konstruowalności (V=L)[11] pozwala na udowodnienie nowych twierdzeń. Z teorii ZF+V=L wynika zarówno CH oraz pewnik wyboru (AC).

Początkowo Gödel sądził, iż fakt ten stanowi argument na rzecz prawdziwości hipotezy *continuum*, potem jednak odrzucił aksjomat konstruowalności jako zbyt restryktywny. W [1947/64] pisze on na temat hipotezy *continuum*, wskazując na fakt, iż nie wiadomo prawie nic na temat wartości *continuum*. Nie wiadomo na przykład:

1. Czy istnieje górne ograniczenie możliwych wartości *continuum*?

[11]Nie wnikając w szczegóły techniczne, aksjomat ten głosi, że istnieją tylko zbiory definiowalne w odpowiedni sposób, a nie wszystkie zbiory. Zbiór potęgowy danego zbioru X jest zatem „najchudszy” z możliwych — ograniczony jest on bowiem jedynie do *definiowalnych* podzbiorów X, a nie do wszystkich podzbiorów X.

2. Czy *continuum* jest liczbą osiągalną?

3. Czy jest to liczba regularna czy singularna?

4. Czy o współkońcowości *continuum* wiadomo coś więcej ponad to, że jest liczbą nieprzeliczalną?

Gödel wysuwa więc hipotezę, że CH jest fałszywa, argumentując w następujący sposób:

(i) Jedyny znany dowód CH wykorzystuje aksjomat konstruowalności, który jest restryktywny i ogranicza pojęcie zbioru.

(ii) CH ma paradoksalne — zdaniem Gödla — konsekwencje. Można bowiem udowodnić istnienie nieprzeliczalnych, lecz intuicyjnie „małych" zbiorów. Przy założeniu CH istnieją więc „małe" zbiory mocy *continuum*. To — według Gödla — stanowi argument przeciwko CH.[12] Swoje rozważania podsumowuje w sposób następujący:

„ *Wierzę, że rola hipotezy continuum w teorii mnogości doprowadzi do odkrycia nowych aksjomatów, które umożliwią obalenie hipotezy Cantora* „ [Gödel 1947/64, 268].

Status hipotezy *continuum* jako zdania niezależnego od ZFC ustalił dopiero Cohen w latach 60-tych. Tym samym stało się jasne, że nie ma możliwości formalnego rozstrzygnięcia CH w ramach ZFC. Niezależnie jednak od tego, że CH okazała się być zdaniem niezależnym od ZFC, Gödel (zgodnie ze swoim filozoficznym *credo*) twierdził, że należy poszukiwać nowych aksjomatów, umożliwiających rozstrzygnięcie otwartych problemów. Problem *continuum* uważał bowiem za otwarty problem matematyczny, wymagający rozwiązania, choć oczywiście rozwiązanie to musiało odwoływać się do metod wykraczających poza istniejące ramy formalne. „ *Pojęcia i twierdzenia teorii mnogości opisują pewną [...] rzeczywistość, w której hipoteza Cantora musi być prawdziwa lub fałszywa. Jej nierozstrzygalność z aksjomatów przyjmowanych dzisiaj może jedynie znaczyć, ża te aksjomaty nie zawierają pełnego opisu tej rzeczywistości. [...] Możliwe jest wskazanie metod rozstrzygania pytań, nierozstrzygalnych na podstawie zwykłych aksjomatów"* [Gödel 1947/64, 263-264].

---

[12]Przykłady te nie są jednak powszechnie uznawane za interesujące. Np. Martin czy Cohen odrzucają te argumenty Gödla.

Początkowo Gödel sądził, że aksjomatami, które pozwolą na rozstrzygnięcie tego problemu mogą być tzw. „silne aksjomaty nieskończoności", czyli aksjomaty istnienia tzw. liczb nieosiągalnych.[13] Gödel, dyskutując znaczenie aksjomatu konstruowalności (V=L) dla problemu *continuum*, wskazuje na fakt, że aksjomat konstruowalności (z którego wynika CH) jest aksjomatem minimalistycznym.[14] Tymczasem:

„ *Negacja hipotezy Cantora być może mogłaby zostać udowodniona w oparciu o aksjomat [...] przeciwstawny temu aksjomatowi* [aksjomatowi konstruowalności — K.W.]. *Myślę tutaj o aksjomacie który [...] stwierdzałby maksymalność systemu zbiorów, podczas gdy* [aksjomat konstruowalności] *stwierdza jego minimalność* „. [Gödel 1947/64, 266].

Gödel stwierdza, że naturalnym rozszerzeniem teorii mnogości jest dołączenie aksjomatów stwierdzających istnienie dalszych iteracji operacji tworzenia zbiorów. „ *Aksjomaty te mogą zostać sformułowane jako stwierdzenia istnienia bardzo dużych liczb kardynalnych. [...] Najprostszy z tych silnych „aksjomatów nieskończoności" stwierdza istnienie liczb nieosiągalnych (w słabszym lub silniejszym sensie)"* [Gödel 1947/64, 264].

Gödel zauważa, że jest mało prawdopodobne, aby na podstawie tych właśnie aksjomatów rozstrzygnąć hipotezę *continuum*. Wynika to stąd, że dodanie tych aksjomatów nie zmienia nic w dowodzie relatywnej niesprzeczności CH *via* zbiory konstruowalne. W szczególności dodanie tych aksjomatów nie może więc pozwolić na udowodnienie fałszywości CH. Gödel stwierdza jednak, że mogą być inne aksjomaty, oparte na innych zasadach, które mogłyby zostać uzasadnione dzięki głębszemu rozumieniu podstawowych zasad logiki i matema-

[13]Swobodnie mówiąc, liczby nieosiągalne są to obiekty tak duże, że ich istnienia nie da się udowodnić w ZFC. Można jednak bez popadania w sprzeczność założyć ich istnienie i aksjomaty ich istnienia dołączyć do ZFC. Mówiąc obrazowo, liczby nieosiągalne są to zbiory znajdujące się „powyżej" zbiorów, które możemy opisać w ramach ZFC i których istnienie wynika z aksjomatów ZFC.

[14]Chodzi tutaj o to, że aksjomat V=L stwierdza, że istnieją tylko zbiory konstruowalne, a więc „minimalizuje" uniwersum.

tyki. W tym kontekście Gödel wymienia aksjomaty istnienia liczb mierzalnych (MC — od *measurable cardinal*) , które implikują negację V=L ([Gödel 1947/64, 265]).

7. DALSZE BADANIA DOTYCZĄCE ZDAŃ NIEZALEŻNYCH

Hipoteza *continuum* jest historycznie najstarszym i najbardziej znanym, ale oczywiście nie jedynym przykładem zdania niezależnego o naturalnej treści matematycznej. Po odkryciu przez Cohena w latach 60-tych metody *forcingu* nastąpił rozkwit badań dotyczących relatywnej niesprzeczności i udowodniono niezależność szeregu zdań o charakterze zarówno teoriomnogościowym, jak i matematycznym.[15] Niedługo po odkryciu przez Cohena metody forcingu okazało się, że zasadniczo aksjomaty dużych liczb kardynalnych nie pozwalają na rozstrzygnięcie problemu *continuum* (por [Levy, Solovay 1967]). Z kolei Easton udowodnił, że *continuum* może przyjmować niemalże dowolne wartości. Aksjomaty dużych liczb kardynalnych nie dostarczyły zatem „danych" umożliwiających rozstrzygnięcie problemu *continuum*. Sam Gödel sformułował na początku lat 70-tych szereg aksjomatów dotyczących rodzin funkcji z ω w ω, które miały umożliwić rozwiązanie problemu *continuum*, okazało się jednak, że rozumowania Gödla zawierały błędy (por. [Ellentuck 1975]). W literaturze pojawiają się jednak próby sformułowania aksjomatów rozstrzygających problem. Np. Freiling w [Freiling 1986] opisał pewien eksperyment myślowy polegający na losowaniu z odcinka [0,1] liczb rzeczywistych, w oparciu o który sformułowany został aksjomat implikujący negację CH. Argumentacja Freilinga zawiera jednak liczne słabości i nie może być uznana za poważny argument na rzecz fałszywości CH. Judah w [Judah 1989] argumentuje — w oparciu o analizę dotychczas uzyskanych wyników dotyczących relatywnej niezależności — że dość wiarygodne

[15]Nie przeciwstawiam tu oczywiście teorii mnogości matematyce — chcę jedynie wskazać na fakt, że np. zdania dotyczące istnienia ultrafiltrów na liczbach kardynalnych mają „bardziej teoriomnogościowy" charakter, niż np. zdania dotyczące funkcji ciągłych i zbiorów borelowskich na **R**.

wydaje się być uznanie, iż *continuum* $=\aleph_2$. Woodin w [Woodin 1999] konstruuje model, w którym prawdziwa jest negacja CH, przy czym argumentuje, iż model ten jest „naturalnym”, „kanonicznym” modelem. Woodin ustalił bowiem, że przyjęcie CH uniemożliwia sformułowanie pewnych naturalnych aksjomatów dotyczących fragmentów hierarchii mnogościowej, dlatego bardziej wiarygodna — jego zdaniem — jest negacja CH. Jego kryterium ma zatem charakter. Teoria, w której nie zakłada się CH, umożliwia rozstrzygnięcie wielu kwestii w naturalny sposób, jest bardziej „elegancka”. CH nie jest zatem wiarygodna jako aksjomat rozszerzający ZFC.

Nie wynika stąd oczywiście, że ¬CH powinna zostać dołączona jako nowy aksjomat do już istniejących aksjomatów ZFC. Wyniki wspomnianych tutaj badań mogą stanowić pewnego rodzaju heurystyczne argumenty, ale nie można twierdzić, iż hipoteza *continuum* została rozstrzygnięta. Niemniej jednak przykłady tych badań wskazują, że możliwe jest poszukiwanie i konstruowanie racjonalnych argumentów (pozaformalnych, ale wykorzystujących wyniki badań technicznych) na rzecz fałszywości (lub prawdziwości) CH.

CH nie jest jedynym zdaniem, wokół którego toczyła (i toczy) się dyskusja. Historycznie, pierwszym przykładem takiego dyskusyjnego aksjomatu był pewnik wyboru. Zarówno jego przyjęcie, jak i jego odrzucenie prowadzi do pewnych nienaturalnych konsekwencji. Zarówno za jego przyjęciem, jak i za przyjęciem sprzecznego z nim aksjomatu determinacji przemawiają pewne intuicje. Pewnik wyboru został przyjęty jako aksjomat ze względu na rolę w matematyce i dziś (prawie) nikt nie kwestionuje zasadności jego przyjęcia, warto jednak pamiętać o tym, że wokół niego także toczyła się dyskusja.

Warto tu wspomnieć o dwóch niejako „konkurencyjnych” wizjach uniwersum matematycznego, a mianowicie wizji wyrażonej w aksjomacie konstruowalności i w aksjomacie istnienia liczby mierzalnej. Jak wiadomo (udowodnił to Scott w roku 1964), aksjomaty te są wzajemnie sprzeczne. V=L implikuje więc, że nie dość, że uniwersum matematyczne nie jest zbyt „szerokie” (w sensie: operacja zbioru potęgowego jest minimalna), to na dodatek nie może być zbyt „wysokie" (nie mogą istnieć zbyt duże liczby kardynalne). Obie wizje mają swoich zwolenników (choć przeciwnicy V=L stanowią większość). Zwolennicy V=L podkreślają jego elegancję, fakt, że pozwala na rozwiązanie szeregu otwartych problemów matematycznych, że prowadzi do interesujących wyników i do „regularnego" uniwersum matematycznego (por. np. [Jensen 1995]). Ten ostatni fakt stanowi argument negatywny dla przeciwników aksjomatu konstruowalności. Podkreślają oni fakt, iż uniwersum matematyczne jest zbyt bogatym obiektem, aby móc zakładać, iż składa się tylko z obiektów definiowalnych. W bogatym świecie matematycznym muszą bowiem istnieć obiekty, które nie mogą być uzyskane w takim konstruktywnym procesie. Oczywiście, istnienia takich obiektów nie da się udowodnić w ZFC (gdyby tak było, to V=L byłby sprzeczny z ZFC, a nie jest), więc konieczne jest poszukiwanie nowych aksjomatów, które pozwolą na uzasadnienie tej tezy (czy inaczej: które będą odzwierciedlały taką wizję uniwersum matematycznego). Takimi aksjomatami są właśnie aksjomaty dużych liczb kardynalnych.

8. NIEZALEŻNOŚĆ Z „NATURALISTYCZNEJ" PERSPEKTYWY

Na zakończenie warto wspomnieć o jeszcze jednym nurcie badań nad niezależnością, zainicjowanym przez Maddy w monografii [Maddy 1997]. Punktem wyjścia Gödla jest jego filozoficzne stanowisko realizmu matematycznego — to stanowi metodologiczny argument na rzecz zasadności poszukiwań nowych aksjomatów. Jego program jest więc pochodną jego realistycznego stanowiska.

Maddy formułuje program „naturalizmu teoriomnogościowego" — jego celem jest sformułowanie kryteriów, pozwalających na znajdowanie nowych aksjomatów, czyli kryteriów wyboru pomiędzy „konkurencyjnymi" teoriami (takimi jak np. ZFC+MC i ZFC+V=L, które są wzajemnie sprzecznymi rozszerzeniami ZFC). Maddy wychodzi od metafilozoficznego stanowiska „naturalizmu", w myśl którego o wyborze między teoriami mają decydować wyłącznie względy wewnątrzmatematyczne, a nie względy filozoficzne (jak w wypadku argumentacji Gödla), ani nawet analizy dotyczące roli matematyki w naukach przyrodniczych (jak w wypadku prorealistycznej argumentacji Quine'a). W szczególności kryteria wyboru mają być niezależne od stanowiska ontologicznego. Maddy formułuje szereg pojęć i kryteriów metodologicznych, które mają pozwolić na dokonywanie wyborów. Kryteria te dotyczą np. możliwości naturalnego interpretowania jednych teorii w innych czy dostarczania przez teorie możliwie bogatej klasy struktur umożliwiających „modelowanie” w nich zjawisk matematycznych. Jako dwie zasadnicze maksymy Maddy formułuje zasady: MAKSYMALIZUJ (teoria ma dostarczyć możliwie dużą klasę typów izomorfizmów, czyli — swobodnie mówiąc — ma pozwalać na zdefiniowanie możliwie bogatej klasy różnych obiektów) oraz UNIFIKUJ: celem jest podanie jednej teorii jako teorii podstawowej. Dalej Maddy wprowadza szereg technicznych pojęć, takich jak „rzetelna interpretacja teorii T 1 w teorii T 2 ”, „właściwa maksymalizacja teorii”, „silna maksymalizacja”, „teoria restryktywna”, aby wreszcie sformułować pewne techniczne kryterium. Pozwala ono na stwierdzenie, iż teoria ZFC+V=L jest teorią restryktywną i nie może zostać uznana za dobrą kandydaturę na podstawową dla matematyki teorię.

Niezależnie od tego, że koncepcja Maddy ma pewne słabości (por. np. [Wójtowicz 2001]), to wpisuje się ona w nurt badań nad poszukiwaniem nowych aksjomatów i w dyskusję metodologiczną dotyczącą tego, czy problem ten jest dobrze postawiony. Wydaje się, że można poszukiwania Maddy interpretować jako współczesną próbę realizacji programu Gödla — nawet jeśli wychodzi ona od odmiennych założeń metafilozoficznych.

9. PODSUMOWANIE

Czy program Gödla został zrealizowany — a jeśli nie, to czy ma jakieś szanse na realizację? Odpowiedź na pierwsze pytanie jest negatywna — brak jest bowiem zgody co do tego, czy badania w zakresie teorii mnogości doprowadziły do wykształcenia się nowego pojęcia zbioru, z którego wynikałaby np. hipoteza *continuum* lub jej negacja. Osiągnięto jednak pewne cząstkowe wyniki, które pozwalają mieć nadzieję na to, że w przyszłości pewne nowe aksjomaty zostaną powszechnie uznane za prawdziwe. Nie ma jednak na razie przekonujących danych, że tak stanie się w najbliższej przyszłości. Tym bardziej brak jest danych, iż taka zgoda będzie powszechna, i że będzie dotyczyć nie tylko CH, ale również aksjomatu konstruowalności czy aksjomatów dużych liczb kardynalnych. Niezależnie jednak, czy możliwe jest definitywne rozstrzygnięcie dyskusji, widoczne jest, że formułowany przez Gödla problem wiarygodności nowych aksjomatów jest problemem dobrze postawionym.

BIBLIOGRAFIA

Balaguer M.

[1998] *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, Oxford University Press, New York, Oxford.

Cohen P.J.

[1966] *Set theory and the continuum hypothesis*. New York — Amsterdam: W.A. Benjamin, Inc.

Ellentuck E.

[1975] „Gödel's square axioms for the continuum", *Mathematische Annalen*, 216, 29-33.

Freiling C.

[1986] „Axioms of symmetry: throwing darts at the real number line", *Journal of Symbolic Logic*, 51, 190-200.

Gödel K.

[1947/64] „What is Cantor's Continuum Problem?", Przedrukowane w: Paul Benacerraf & Hilary Putnam, Philosophy of Mathematics, Prentice-Hall, 1964, 258-273.

[1961] „The modern development of the foundations of mathematics in the light of philosophy", w: *Collected Works*, vol.3., Feferman S. i in. (red.), Oxford University Press, 374-387.

Jensen R.

[1995] „Inner models and large cardinals”, *Bulletin of Symbolic Logic*, 1, 393-407.

Judah H.

[1989] *Was Gödel right?*, Notes, Berkeley, California.

Levy A., Solovay R.M.

[1967] „Measurable cardinals and the continuum hypothesis”, *Israel Journal of Mathematics*, 5, 234-248

Maddy P.

[1997] *Naturalism in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford.

Woodin W.H.

[1999] *The Axiom of Determinacy, Forcing Axioms and the Non-stationary Ideal*, Berlin, New York: de Gruyter.

Wójtowicz K.

[2001] „Naturalizm matematyczny P.Maddy”, *Filozofia Nauki*, 2.