ARTYKUŁY

ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
XXVI / 2000, s. 38–58*

Jerzy DADACZYŃSKI

ANTYNOMIE TEORIOMNOGOŚCIOWE A POWSTANIE KLASYCZNYCH KIERUNKÓW BADANIA PODSTAW MATEMATYKI

W różnorakich opracowaniach prezentuje się zazwyczaj obok siebie trzy klasyczne kierunki badań podstaw matematyki, które wykształciły się na początku dwudziestego wieku: logicyzm, intuicjonizm i formalizm. Akcentuje się odmienne rozwiązania szczegółowych zagadnień podstaw matematyki przez przedstawicieli wspomnianych kierunków. Nie zwraca się natomiast większej uwagi na problem bardzo istotny: dlaczego właśnie w tym okresie, prawie jednocześnie, doszło do takiej polaryzacji stanowisk w zakresie podstaw matematyki? Niniejszy artykuł podejmuje to zagadnienie.

Teza prezentowana tutaj jest następująca: sekwencja zdarzeń w matematyce dziewiętnastego wieku — arytmetyzacja matematyki, powstanie teorii mnogości, sprowadzenie arytmetyki liczb naturalnych do teorii mnogości, odkrycie antynomii teoriomnogościowych[1]— doprowadziła do kryzysu podstaw matematyki. I to głównie próby usunięcia antynomii spowodowały tak

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

[1]Chodzi o antynomie syntaktyczne. Zostały one tutaj nazwane teoriomnogościowymi, a nie logicznymi, z trzech powodów. Po pierwsze, niektóre z nich pojawiły się rzeczywiście nie w logice, lecz w przedaksjomatycznej teorii mnogości Cantora: antynomia Burali–Fortiego, antynomia zbioru wszystkich zbiorów, antynomia zbioru wszystkich liczb kardynalnych. Po wtóre, antynomia Russella została ujawniona w procesie realizacji programu logicyzmu przez G. Fregego. Dzisiaj jednak prezentuje się przekonanie, że logicyści, podobnie jak G. Cantor i współcześnie Bourbakiści, starali się sprowadzić matematykę nie do logiki, ale właśnie do teorii mnogości. Trzecim powodem nazwania tych antynomii teoriomnogościowymi jest to, że w ich sformułowaniu występuje pojęcie zbioru [por. J. Perzanowski, *Logicyzm*, w: *Mała encyklopedia logiki*, Wrocław 1988, s. 94 (93–95)].

znaczne rozwarstwienie stanowisk w kwestii podstaw matematyki, które zaowocowało powstaniem „drugiego logicyzmu”[2], intuicjonizmu i formalizmu.

Tak postawiona teza determinuje plan opracowania. Najpierw zaprezentowana zostanie wspomniana sekwencja wydarzeń w matematyce dziewiętnastowiecznej. Pozwoli to dostrzec wagę zagrożenia, jakie stworzyło dla podstaw matematyki odkrycie antynomii teoriomnogościowych. Następnie zostaną przykładowo podane dwie antynomie. Dalszy ciąg rozważań będzie miał na celu pokazanie, iż palący problem antynomii w istotny sposób zdeterminował ukształtowanie się strategii „drugiego” logicyzmu, intuicjonizmu i formalizmu. Ukazane zostanie, że w konsekwencji w ramach formalizmu D. Hilberta postawiono ogólniejsze, zasadnicze pytanie o niesprzeczność matematyki i rozpoczęto konstrukcję aparatu metamatematyki dla dowiedzenia tejże niesprzeczności. Wreszcie wspomniany zostanie fakt, iż niemożliwość poprowadzenia takiego dowodu wykazał w swych pracach K. Gödel.

Innymi słowy: artykuł ma pokazać, że ciąg wydarzeń w matematyce, jej filozofii i metamatematyce, począwszy od zdefiniowania granicy przez B. Bolzano i A. Cauchego aż do wyników uzyskanych przez K. Gödla miał pewną wewnętrzną logikę i w istotny sposób był „zogniskowany” wokół problemu antynomii teoriomnogościowych.

Zgodnie z zaprezentowanym planem, najpierw zostanie naszkicowany proces arytmetyzacji matematyki w dziewiętnastym wieku, który rozstrzygnął o zasadniczym znaczeniu antynomii teoriomnogościowych dla podstaw matematyki.

Rozwój matematyki w dziewiętnastym wieku, jeszcze przed powstaniem teorii mnogości — zdaniem niektórych historyków matematyki — umożliwił systematyzację całej ówczesnej matematyki[3]. Systematyzacja jest tu rozumiana jako uporządkowanie dyscyplin matematyki według jakiegoś merytorycznego kryterium lub podanie planu, według którego możliwe byłoby rozwinięcie matematyki jako jednolitej budowli[4]. Proces systematyzacji dziewiętnastowiecznej matematyki można inaczej nazwać arytmetyzacją, bo-

[2]Mianem „pierwszego logicyzmu” określa się tutaj próbę realizacji Leibniziańskiej idei sprowadzenia matematyki do logiki (w istocie, jak dziś się uważa, do teorii mnogości) przez G. Fregego. Ten etap zakończony został odkryciem antynomii Russella. „Drugi logicyzm” to dzieło B. Russella i A. N. Whiteheda, którzy podjęli dzieło G. Fregego, starając się eliminować antynomie stwierdzone w jego systemie.

[3]Por. N. Bourbaki, *Elementy historii matematyki*, tłum. z francuskiego S.Dobrzycki, Warszawa 1980, s. 35–37.

[4]Por. J. Perzanowski, *Podstawy matematyki i logiki*, w: *Mała encyklopedia logiki*, s. 145 (141–151).

wiem za dziedzinę „podstawową” matematyki uważano wówczas arytmetykę liczb naturalnych. Do niej — jak sądzono — można było sprowadzić wszystkie znane dyscypliny matematyczne, czyli właśnie matematykę klasyczną. Relację sprowadzania rozumiano wówczas jako możliwość wskazania lub skonstruowania modelu jednej teorii w dziedzinie matematycznej, będącej modelem innej teorii. Przy czym tę drugą uważano za bardziej „podstawową”, logicznie pierwotną[5].

Jeszcze na początku dziewiętnastego wieku wydawało się, że taka systematyzacja matematyki będzie niemożliwa. Problemem było sprowadzenie analizy matematycznej, opartej od czasu jej powstania na niejasnym i budzącym wiele kontrowersji pojęciu wielkości nieskończenie małej, do aryt-

---

[5]Dalej, dla uproszczenia terminologii, będzie mowa o znalezieniu modelu jednej teorii w innej teorii. Rzecz jasna, w dziewiętnastym wieku nie używano jeszcze metamatematycznego terminu „model”, ale intuicyjnie przyjmowano jako oczywiste pewne własności ujmowane dzisiaj w teorii modeli. Najlepszym przykładem może być Cantorowska konstrukcja liczb rzeczywistych, która była — we współczesnych kategoriach metamatematycznych — niczym innym, jak znalezieniem modelu liczb rzeczywistych w dziedzinie liczb wymiernych.

Zamiast mówić, że sprowadzalność jednej teorii do drugiej to konstruowanie modelu jakiejś teorii w pewnej dziedzinie, można też twierdzić, że owo sprowadzanie to możliwość adekwatnego wyrażenia jednej teorii w kategoriach innej. Przykład stanowi Cantorowskie określenie liczby rzeczywistej jako ciągu podstawowego liczb wymiernych (klasy wszystkich ciągów podstawowych, współzbieżnych do danego ciągu).

Scharakteryzowana tu relacja sprowadzania jednej teorii do innej była z całą pewnością traktowana jako relacja przechodnia. Dla każdej teorii winna była istnieć — jak sądzono — teoria bardziej „podstawowa”, za wyjątkiem rzecz jasna arytmetyki liczb naturalnych.

Natomiast relacji sprowadzania nie traktowano jako relacji spójnej. Brak wymogu spójności nie pozwala relacji sprowadzania klasyfikować jako relacji liniowo porządkującej (to znaczy spełniającej koniunkcję warunków: zwrotność, przechodniość, antysymetryczność i spójność). Gdyby założyć zwrotność, to byłaby ona relacją antysymetryczną, a zatem relacją porządkującą zbiór teorii matematycznych (relacja zwrotna przechodnia i antysymetryczna) — wówczas można by też mówić, że arytmetyka liczb naturalnych jest elementem największym w zbiorze teorii matematycznych. Ponieważ w zbiorze uporządkowanym istnieje co najwyżej jeden taki element, byłaby to teoria wyróżniona, „podstawowa”. W niniejszej pracy zamiast nazwy „relacja porządkująca” (zbiór teorii matematycznych) wybrano jednak nazwę „relacja sprowadzania”. Powody są następujące:

1. Gdyby przyjąć pierwsze określenie, to należałoby założyć zwrotność omawianej relacji.

2. Relacje określone tu jako „porządkujące” nazywa się czasem „częściowo porządkującymi”, zaś relacje nazwane wyżej „liniowo porządkującymi” nazywa się też porządkującymi” [por. H. Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej*, Warszawa 1973, s. 127]. Określenie „relacja porządkująca” mogłoby być mylące, ze względu na zamieszanie terminologiczne w podstawowych opracowaniach podręcznikowych.

3. Termin „relacja sprowadzania” dobrze oddaje intuicje związane z omawianą relacją.

metyki liczb naturalnych. Przeszkodę tę udało się jednak usunąć w dwóch przebiegających po części równolegle etapach.

Po pierwsze, dzięki pracom B. Bolzano, A. Cauchy'ego i K. Weierstrassa udało się wyeliminować z analizy wielkości nieskończenie małe i oprzeć tę dyscyplinę na pojęciu liczb rzeczywistych. Drugi etap sprowadzenia analizy do arytmetyki liczb naturalnych polegał na kolejnym znajdowaniu modeli: teorii liczb wymiernych w dziedzinie liczb całkowitych oraz teorii liczb rzeczywistych w dziedzinie liczb wymiernych.

Pierwszego zadania podjęło się około roku 1860 kilku matematyków: H. Grassmann, H. Hankel oraz K. Weierstrass. Ten ostatni — w swych nie publikowanych wykładach — przedstawił najprawdopodobniej po raz pierwszy pomysł uzyskania modelu liczb wymiernych w dziedzinie uporządkowanych par liczb całkowitych. Natomiast drugiego zadania, które wymagało, w takiej czy innej formie, przyjęcia istnienia zbioru aktualnie nieskończonego, podjęli się z dobrym skutkiem, aczkolwiek przy zastosowaniu dość odmiennych metod, prawie jednocześnie około roku 1870, K. Weierstrass, R. Dedekind, Ch. Meray i G. Cantor[6].

Realizacja drugiego etapu arytmetyzacji oznaczała równocześnie arytmetyzację geometrii euklidesowej. Jednak właśnie w zakresie rozumienia istoty geometrii pojawiły się w dziewiętnastym wieku przeszkody, które — jak się początkowo wydawało — uniemożliwiały uznanie matematyki (matematyki z geometrią) za jednolitą strukturę, której wszystkie gałęzie byłyby sprowadzalne do arytmetyki liczb naturalnych. Zacięte dyskusje nad istotą geometrii rozpoczęły się około roku 1870, gdy na skutek publikacji prac N. Łobaczewskiego, K. Gaussa i wygłoszenia słynnego wykładu inauguracyjnego przez B. Riemanna aktualna stała się sprawa geometrii nieeuklidesowych. Niemniej już w tym samym roku F. Klein znalazł dla geometrii Łobaczewskiego i Riemanna modele euklidesowe, co oznaczało arytmetyzację nowych teorii geometrycznych[7].

Tym samym na początku lat siedemdziesiątych dziewiętnastego wieku matematyka mogła być uważana za zwartą strukturę, uporządkowaną przy pomocy relacji sprowadzania jednej teorii do drugiej. Funkcję wyróżnio-

---

[6]Zasadnicze wiadomości na temat arytmetyzacji matematyki w dziewiętnastym wieku zawarte są w pracy N. Bourbaki [por. N. Bourbaki, dz. cyt., s. 35–37].

[7]Por. F. Klein, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Bd. 1, Berlin 1931, s. 254–305. W zasadzie nieco wcześniej, w roku 1868, modele euklidesowe dla geometrii nieeuklidesowych znalazł pracujący poza środowiskiem matematyków niemieckich E. Beltrami [por. E. Beltrami, *Saggio di interpretazione della geometria non–euclidea*, *Giornale di matematiche ad uso degli studenti delle universita italiane*, 6 (1868), s. 284–312.

nej teorii podstawowej pełniła arytmetyka liczb naturalnych. Innymi słowy: matematykę dziewiętnastowieczną, nawet uzupełnioną o nieklasyczne geometrie, można było wówczas uznać za zarytmetyzowaną.

Konsekwencję takiego widzenia struktury matematyki stanowiło zwrócenie się po roku 1880 w kierunku badań podstaw arytmetyki liczb naturalnych. Jednym z efektów tych badań było podanie aksjomatyki teorii liczb naturalnych, najpierw przez R. Dedekinda w roku 1886[8], a potem przez G. Peano w roku 1889[9].

Na początku lat siedemdziesiątych poprzedniego stulecia, dla rozwiązania szczegółowych problemów w analizie, G. Cantor zaczął budować teorię mnogości, rozumianą jako teoria zbiorów nieskończonych. Niemiecki matematyk skonstruował teorię bez podstaw aksjomatycznych, ale zawierającą wiele istotnych wyników. Bardzo wcześnie on sam[10] i G. Frege[11]zauważyli, że w kategoriach teoriomnogościowych daje się zdefiniować pojęcie liczb naturalnych. Logik z Jeny poszedł jeszcze dalej. Starał się ukazać, że wszystkie pojęcia pierwotne arytmetyki liczb naturalnych dają się wywieść z pojęć teoriomnogościowych, a wszystkie aksjomaty arytmetyki liczb naturalnych są twierdzeniami teorii mnogości[12]. Tym samym arytmetyka liczb naturalnych, a w konsekwencji arytmetyzacji matematyki cała matematyka dziewiętnastowieczna, zostały sprowadzone do teorii mnogości[13]. Innymi słowy: dzięki realizacji planu G. Fregego teoria mnogości mogła być traktowana jako dyscyplina podstawowa, z której cała matematyka dziewiętnastego wieku była wywiedlna.

---

[8]Por. R. Dedekind, *Gesammelte mathematische Werke*, Bd. 3, Braunschweig 1932, s. 359–361.

[9]Por. G. Peano, *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, Torino 1889.

[10]Por. G. Cantor, *Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mittheilung*, w: I.Grattan–Guiness, *An unpublished paper by Georg Cantor. Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mittheilung*, *Acta Mathematica* 89 (1970) Bd. 124, s. 84 (65–107).

[11]Por. G. Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch–mathematische Untersuchung ber den Begriff der Zahl*, Breslau 1884.

[12]Por. G. Frege, *Grungesetze der Arithmetik, begriffschriftlich abgeleitet*, Bd. 1, 1893, Bd. 2, 1903.

[13]Popularnie twierdzi się, że G. Frege sprowadził arytmetykę liczb naturalnych, a zatem i całą matematykę dziewiętnastowieczną, do logiki. Jeśli jednak teorię mnogości, czyli teorię zbiorów nieskończonych, ujmuje się jako odrębną naukę nie będącą działem logiki, to trzeba mówić o sprowadzeniu arytmetyki liczb naturalnych nie do logiki, lecz do teorii mnogości. Tak twierdzi na przykład L. Borkowski [por. L. Borkowski, *Logika formalna*, Warszawa 1970, s. 235]. Dlatego w niniejszym tekście twierdzi się, że w istocie celem logicystów było sprowadzenie matematyki do teorii mnogości.

I właśnie wówczas, gdy program G. Fregego wydawał się zrealizowany, odkryto w teorii mnogości szereg antynomii. Najogólniej antynomia to koniunkcja pary zdań, z których każde w równym stopniu zasługuje na przyjęcie, lecz jednocześnie są między sobą sprzeczne i dlatego nie można przyjąć obu. Dwie antynomie teoriomnogościowe z przełomu wieków zostaną tu zaprezentowane.

Antynomię Russella[14] konstruuje się następująco: określa się klasę N wszystkich i tylko tych zbiorów, które nie są swoimi elementami:

$A \in N \equiv A \notin A$.

Podstawiając w tej definicji stałą N za zmienną A, otrzymuje się następującą równoważność:

(a) $N \in N \equiv N \notin N$

Na podstawie równoważności (a) dowodzi się koniunkcji dwu wyrażeń sprzecznych:

$N \in N$ i $N \notin N$.

Dowód wyrażenia: $N \in N$

(1)	$N \notin N$	założenie dowodu nie wprost
(2)	$N \in N$	opuszczanie równoważności (a), (1)
		sprzeczność (1) i (2)

Dowód wyrażenia: $N \notin N$

(1)	$N \in N$	założenie dowodu nie wprost
(2)	$N \notin N$	opuszczanie równoważności (a), (1)
		sprzeczność (1) i (2)

Udowodnione zostały obydwa człony koniunkcji, a więc udowodniona została koniunkcja dwu zdań sprzecznych: $N \in N$ i $N \notin N$.

Inny przykład antynomii odkrytych na przełomie wieków to znana już G. Cantorowi antynomia zbioru podzbiorów[15].

Zbiór podzbiorów dowolnego zbioru X (czyli zbiór potęgowy tego zbioru 2^X) jest liczniejszy niż sam zbiór X. Twierdzenie to, pochodzące od G. Cantora, niech się nazywa twierdzeniem C. Dla dalszych rozważań wprowadza się zbiór wszystkich zbiorów, nazywany U. Jest on, z samego założenia, najliczniejszy ze wszystkich zbiorów, ponieważ obejmuje je wszystkie jako elementy. Ale na mocy twierdzenia C zbiór jego podzbiorów jest jeszcze odeń liczniejszy. A więc U jest i nie jest najliczniejszym spośród zbiorów.

---

[14] Antynomia Russella została podana za L. Borkowskim [por. L. Borkowski, dz. cyt., s. 285].

[15] Konstrukcja antynomii zbioru podzbiorów podana jest tutaj za W. Marciszewskim [por. W. Marciszewski, *Antynomie w logice,* w: *Mała encyklopedia logiki*, s. 20 (20–210)].

Oprócz tych dwu zaprezentowanych, odkryto na przełomie dziewiętnastego i dwudziestego wieku cały szereg innych antynomii teoriomnogościowych, między innymi zbioru uniwersalnego, zbioru wszystkich zbiorów, zbioru wszystkich liczb kardynalnych, zbioru wszystkich liczb porządkowych (antynomia Burali–Fortiego), zbioru wszystkich liczb równolicznych z danym zbiorem.

Trzeba teraz odpowiedzieć na pytanie: dlaczego antynomie teoriomnogościowe tak bardzo wstrząsnęły podstawami matematyki na przełomie wieków?

Było to wynikiem superpozycji dwu czynników. Po pierwsze, antynomie czynią każdą wiedzę bezwartościową. Zgodnie bowiem z zasadami logiki klasycznej, do koniunkcji zdań sprzecznych można dołączyć każde zdanie. Zatem w dowolnej teorii, w której występują antynomie, można udowodnić wszystko. Po wtóre, antynomie z przełomu wieków nie dotykały tylko teorii mnogości. Pokazano wcześniej, że teoria ta była teorią podstawową, na której można było nabudować całą matematykę dziewiętnastowieczną. Zatem antynomie teoriomnogościowe czyniły matematykę końca dziewiętnastego wieku sprzeczną, bezwartościową z epistemologicznego punktu widzenia.

Dlatego podjęto szereg zabiegów, które miały na celu wyeliminowanie antynomii z podstaw matematyki. Działania te zaowocowały powstaniem całego spektrum poglądów z zakresu podstaw matematyki na początku dwudziestego wieku.

Próby rozwiązania problemu antynomii teoriomnogościowych można by podzielić na doraźne oraz systematyczne. Doraźne to te, które miały na celu wyeliminowanie antynomii odkrytych. Natomiast w ramach rozwiązań systemowych starano się generalnie postawić i rozwiązać problem niesprzeczności matematyki. Nikt przecież nie był w stanie wykluczyć tego, że w matematyce mogły się pojawić antynomie dotąd nieznane, nowego typu.

W ramach działań doraźnych, nakierowanych na eliminację antynomii teoriomnogościowych, najprostsze byłoby przyjęcie, że matematyka nie jest sprowadzalna do teorii mnogości (logiki). Wówczas znane antynomie teoriomnogościowe nie byłyby po prostu przenoszone na teren matematyki. Takie stwierdzenia padły w ramach programów intuicjonizmu oraz formalizmu. Znalazły się jednak środowiska matematyków i logików, którzy podtrzymując tezę o sprowadzalności matematyki do teorii mnogości, chcieli wyeliminować znane antynomie teoriomnogościowe z podstaw matematyki. Do tej grupy należy zaliczyć przede wszystkim twórcę pierwszej aksjomatyki teorii mnogości E. Zermelo oraz przedstawicieli „drugiego” logicyzmu — B. Russella oraz A.N. Whiteheada.

E. Zermelo zauważył, że źródłem antynomii Russella jest przyjmowany *implicite* w przedaksjomatycznej teorii mnogości G. Cantora aksjomat nieograniczonej komprehensji:

$$\sum_{y}\prod_{x}(x \in y \equiv E(x)).$$

Według aksjomatu nieograniczonej komprehensji dla dowolnej funkcji zdaniowej *E(x)*, posiadającej jedną zmienną wolnąx, istnieje zbiór y, którego elementami są te i tylko te przedmioty, które spełniają funkcję zdaniową *E(x).* Jeśli za *E(x)* przyjmie się wyrażenie „$x \notin x$”, to z aksjomatu nieograniczonej komprehensji otrzyma się tezę:

$$\sum_{y}\prod_{x}(x \in y \equiv x \notin x).$$

Stosując teraz regułę opuszczania kwantyfikatora szczegółowego, a następnie regułę opuszczania kwantyfikatora ogólnego, otrzymuje się kolejno:

$$\prod_{x}(x \in y_1 \equiv x \notin x)$$

$$y_1 \in y_1 \equiv y_1 \notin y_1.$$

Na podstawie takiej równoważności — jak to pokazano wcześniej — można otrzymać koniunkcję dwu zdań sprzecznych[16].

Dlatego też E. Zermelo, starający się wyeliminować antynomie, zrezygnował w swojej aksjomatyce z nieograniczonego aksjomatu komprehensji, zastępując go aksjomatem wyróżniania:

$$\sum_{y}\prod_{x}(x \in y \equiv x \in z \wedge E(x)).$$

E(x) jest w tym aksjomacie funkcją zdaniową o jednej zmiennej wolnej x (lub też w mocniejszym sformułowaniu: *E(x)* jest funkcją zdaniową, w której występuje zmienna wolna x oraz ewentualnie jeszcze inne zmienne wolne, różne od zmiennej wolnej y). Według aksjomatu wyróżniania dla każdego

[16] Por. L. Borkowski, dz. cyt, s. 288–289.

zbioru z i każdego wyrażenia zdaniowego $E(x)$ istnieje podzbiór zbioru z złożony z tych i tylko tych przedmiotówx, które spełniają wyrażenie $E(x)$[17].

Można pokazać, że gdy do aksjomatu wyróżniania za $E(x)$ wstawi się prowadzące do antynomii Russella wyrażenie „$x \notin x$", nie otrzyma się sprzeczności. W ten sposób w teorii mnogości E. Zermelo została wyeliminowana antynomia Russella.

Natomiast gdy chodzi o pozostałe znane antynomie teoriomnogościowe, to unika się ich w systemie E. Zermelo w ten sposób, że na podstawie aksjomatów gwarantujących istnienie określonych zbiorów nie stwierdza się istnienia zbioru uniwersalnego, zbioru wszystkich zbiorów, zbioru wszystkich liczb kardynalnych, zbioru wszystkich liczb porządkowych czy też zbioru wszystkich zbiorów równolicznych z danym zbiorem. We wspomnianym systemie odpowiednie antynomie są wbudowane w dowody o nieistnieniu tych zbiorów.

Podobnie jak E. Zermelo twórcy „drugiego" logicyzmu podtrzymywali tezę o możliwości sprowadzenia matematyki do teorii mnogości (logiki). Starali się oni tak zrekonstruować system G. Fregego, aby w nowej, zmodyfikowanej wersji nie był on obciążony znanymi antynomiami teoriomnogościowymi. Wybrali jednak inny sposób rozwiązania tego problemu niż E. Zermelo.

Według tej koncepcji odróżnia się typy logiczne przedmiotów. Najniższy typ tworzą indywidua, czyli przedmioty, które nie są zbiorami. Nazywa się je przedmiotami typu zerowego. Zbiory indywiduów stanowią przedmioty typu pierwszego. Przedmiotami typu drugiego są zbiory zbiorów indywiduów. Ogólnie elementami zbioru typu $n+1$–go są przedmioty typu n–go. Zakłada się, że wszystkie elementy danego zbioru są przedmiotami tego samego typu. Nie można mówić ogólnie o zbiorze pustym czy uniwersalnym, a jedynie o zbiorze pustym i zbiorze uniwersalnym określonego n–go typu[18].

Ontologicznej hierarchii typów logicznych odpowiada syntaktyczna hierarchia typów wyrażeń odnoszących się do tych przedmiotów. Zmienne i stałe teorii typów dzieli się na typy. Ogólnie można powiedzieć, że zmienne ze wskaźnikiem „n" u góry reprezentują przedmioty typu n–go. Nie ma w tym systemie stałej „U" reprezentującej zbiór uniwersalny, natomiast

[17] Por. ibid., s. 301–302.

[18] Por. ibid., s. 292. Podano tutaj najogólniejsze zasady prostej teorii typów, pochodzącej od L. Chwistka i A. Ramseya. Twórca „drugiego" logicyzmu B. Russell sformułował w istocie rozgałęzioną teorię typów. Prostą teorią typów posłużono się dla uproszczenia mechanizmu usuwania antynomii. Rozgałęziona teoria typów miała na celu eliminację nie tylko antynomii teoriomnogościowych, ale i semantycznych.

ogólnie stała „U^n" denotuje zbiór uniwersalny typu n–go, którego elementami są wszystkie przedmioty typu n–*1*–go. Zupełnie podobnie stała „$\emptyset^n$" denotuje zbiór pusty typu n–go, będący dopełnieniem zbioru uniwersalnego typu n–go. Zrelatywizowane do odpowiedniego typu są także wszystkie inne stałe i muszą być zaopatrzone w odpowiednie wskaźniki. I tak stałej „$\in_n$" używa się w wyrażeniach stwierdzających, że jakiś przedmiot typu n–*1*–go jest elementem przedmiotu typu n–go. Stałej „$\subset_n$" używa się w wyrażeniach stwierdzających zawieranie się zbiorów n–go typu[19].

Inaczej niż w aksjomatycznej teorii mnogości przyjmuje się w teorii typów aksjomat komprehensji. Jest to w istocie cały zbiór aksjomatów, otrzymywany z wyrażenia stwierdzającego, iż istnieje y^{n+1}, takie, że dla każdego x^n:

$$x^n \in_{n+1} y^{n+1} \equiv E(x^n),$$

przez podstawienie za „n" dowolnych wskaźników spośród ciągu wskaźników: *0, 1, 2, ...*[20]

Łatwo można zauważyć, że antynomii Russella w takim systemie nie można skonstruować. Nie można bowiem w aksjomacie komprehensji przyjąć ani wyrażenia „$x \notin x$", ani też wyrażenia „$x^n \notin_n x^n$". Jest tak dlatego, że pierwsze wyrażenie nie należy do systemu (bowiem jakakolwiek zmienna występująca w wyrażeniach systemu typów musi być zaopatrzona w jakiś wskaźnik typu), natomiast drugie wyrażenie jest bezsensowne.

Podobnie w systemie teorii typów eliminowane są inne antynomie teoriomnogościowe. Jest tak dlatego, że odpowiednie wyrażenia, które używane są w konstruowaniu tych antynomii, są w tym systemie wyrażeniami bezsensownymi[21].

B. Russell i A.N. Whitehead, posługując się teorią typów logicznych, starali się zrekonstruować wyniki G. Fregego, a więc przede wszystkim zbudować w tej teorii arytmetykę liczb naturalnych. Próba ta była obciążona wieloma trudnościami, dla ich rozwiązania autorzy *Principia mathematica* musieli przyjąć budzący wiele zastrzeżeń aksjomat nieskończoności rozumiany jako stwierdzenie o istnieniu nieskończonej ilości indywiduów. Innym defektem próby ugruntowania arytmetyki na teorii typów logicznych jest typikalna wieloznaczność stałych arytmetycznych[22].

[19] Por. L. Borkowski, dz. cyt., s. 292.
[20] Por. ibid., s. 293.
[21] Por. ibid., s. 294.
[22] Por. ibid., s. 296.

Ogólnie należy stwierdzić, że przedstawicie matematyków, aksjomatyzujący teorię mnogości, i przedstawiciele „drugiego" logicyzmu, starali się usunąć znane antynomie teoriomnogościowe, nie rezygnując jednocześnie z tezy G. Cantora i G. Fregego o możliwości sprowadzenia matematyki dziewiętnastowiecznej do teorii mnogości. Ci pierwsi eliminowali antynomie, ograniczając zbyt ogólne, antynomiotwórcze sformułowanie nieograniczonego aksjomatu komprehensji, stwierdzającego, że dla każdej funkcji zdaniowej istnieje zbiór przedmiotów spełniających tę funkcję zdaniową. Drudzy przyjęli ogólne sformułowanie aksjomatu komprehensji, ale ograniczyli zakres sensownych funkcji zdaniowych w taki sposób, że pewne wyrażenia zaliczane poprzednio do wyrażeń sensownych traktuje się jako wyrażenia bezsensowne ze względu na reguły tworzenia zdaniowych wyrażeń sensownych[23].

Dla prezentowanej w niniejszym artykule tezy istotne jest, że aksjomatyki teorii mnogości i system „drugiego" logicyzmu powstały przede wszystkim dlatego, by uniknąć antynomii teoriomnogościowych.

Zupełnie inne stanowisko wobec problemu znanych antynomii teoriomnogościowych zajęli przedstawiciele innego kierunku w badaniach podstaw matematyki, powstałego również na początku dwudziestego wieku, intuicjoniści. Dla nich antynomie leżące u podstaw matematyki były również nie do przyjęcia. Dzisiaj twierdzi się nawet, że właśnie chęć zaradzenia groźbie sprzeczności w matematyce leżała u podstaw intuicjonizmu L.E.J. Brouwera[24].

W każdym razie w wystąpieniach intuicjonistów można dostrzec bardzo wyraźnie dwie tezy, których celem było w istocie wyeliminowanie antynomii z podstaw matematyki. Jest to po pierwsze twierdzenie, że logika nie stanowi ani bazy, ani punktu wyjścia matematyki. Druga teza to odrzucenie w matematyce nieskończoności aktualnej.

Przyjęcie przez intuicjonistów, że matematyka nie ma punktu wyjścia w logice, musi być odpowiednio zinterpretowane. Kiedy w czasach formułowania programu intuicjonistów mówiło się o logice, to miało się w istocie na uwadze systemy G. Fregego oraz B. Russella i A.N. Whiteheada, na których nabudowano arytmetykę i całą dziewiętnastowieczną matematykę. Zatem w istocie chodziło o teorię mnogości, do których wymienieni autorzy starali się sprowadzić matematykę. Innymi słowy: twierdzenie intuicjonistów o tym, że logika nie jest punktem wyjścia ani bazą matematyki, oznaczało

[23] Por. ibid., s. 290.

[24] Por. R. Murawski, *Luitzen E.J. Brouwer*, w: *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, wybór i opracowanie R. Murawski, Poznań 1985, s. 262 (262–263).

w istocie, że matematyka nie jest sprowadzalna do teorii mnogości. W ten sposób intuicjoniści osiągali swój cel. Ponieważ bowiem antynomie pojawiły się w teorii mnogości, a ta nie była bazą matematyki, to automatycznie antynomie teoriomnogościowe nie były przenoszone do matematyki. W ten sposób, doraźnie, eliminowali intuicjoniści znane antynomie z matematyki[25].

Trzeba sobie zdać sprawę z tego, iż wykorzystana do owej eliminacji teza, że logika nie jest bazą matematyki, miała w programie intuicjonistów głębokie i wielorakie uzasadnienie.

Przede wszystkim intuicjoniści przejęli od I. Kanta przekonanie o apriorycznym charakterze czasu. Twierdzili za nim nie tylko, że intuicja apriorycznego czasu leży u podstaw arytmetyki, ale że leży ona u podstaw całej matematyki (z geometrią)[26]. Zatem nie teoria mnogości (logika) była w ich mniemaniu punktem wyjścia matematyki, ale właśnie intuicja apriorycznego czasu[27].

A jeśli tak, to według intuicjonistów twierdzenia całej matematyki były sądami syntetycznymi *a priori*[28]. To też kłóciło się z twierdzeniem G. Fregego, iż sądy całej matematyki, ponieważ sprowadzalne są one do sądów teorii mnogości (logiki), są sądami analitycznymi. Intuicjoniści podkreślający syntetyczny charakter twierdzeń matematyki i analityczny charakter twierdzeń logiki — i tu byli oni wierni nauce I. Kanta — nie mogli przyjąć tezy o tym, że zdania matematyki można wyprowadzić z jakiegoś systemu logiki.

Jest jeszcze jeden powód, dla którego intuicjoniści odrzucili teorię mnogości jako podstawę matematyki, a w konsekwencji doraźnie rozwiązali sprawę antynomii teoriomnogościowych w podstawach matematyki. Otóż intuicjoniści w istocie zanegowali całą Cantorowską teorię mnogości zaksjomatyzowaną przez E. Zermelo. Wynikało to również z oparcia się na tradycji kantowskiej w filozofii matematyki. I. Kant był konstruktywistą, to znaczy głosił, że warunkiem istnienia obiektów matematycznych jest ich konstru-

[25] Por. A. Heyting, *Dysputa*, tłum. z angielskiego R. Murawski, w: *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, wybór i opracowanie R. Murawski, s. 281 (276–286); T. Batóg, *Filozofia matematyki*, w: *Filozofia a nauka. Zarys encyklopedyczny*, Wrocław 1987, s. 182 (177–187).

[26] Intuicjoniści odrzucili tezę I.Kanta o aprioryczności i przestrzeni i w konsekwencji również o tym, że intuicja apriorycznej przestrzeni leży u podstaw geometrii. Było to efektem odkrycia w dziewiętnastym wieku geometrii nieeuklidesowych.

[27] Por. L. E. J. Brouwer, *Intuicjonizm i formalizm*, tłum. z niderlandzkiego R. Murawski, w: *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, wybór i opracowanie R. Murawski, s. 266 (263–275).

[28] Por. R. Murawski, *Luitzen E.J. Brouwer*, s. 282.

owalność przez umysł poznający. Przejmujący tezę konstruktywizmu intuicjoniści wskazywali, że niektóre aksjomaty sformułowane przez E. Zermelo postulowały istnienie zbiorów, których myśl ludzka nie mogła w ogóle skonstruować, a nawet w jakikolwiek sposób określić. Jako typowy przykład aksjomatu o charakterze niekonstruktywnym wymieniali aksjomat wyboru, który postulował istnienie pewnych zbiorów, nie podając przy tym sposobu ich konstrukcji[29]. Wnioski były następujące: należy odrzucić teorię mnogości, a zatem nie może być ona podstawą matematyki, w konsekwencji więc antynomie teoriomnogościowe nie są przenoszone do matematyki.

Wykluczenie przez intuicjonistów teorii mnogości z podstaw matematyki[30], eliminujące znane antynomie teoriomnogościowe, nie gwarantowało jeszcze w istocie niesprzeczności matematyki. Antynomie mogły pojawić się w innym jej „obszarze". Intuicjoniści analizując znane antynomie teoriomnogościowe, doszli najprawdopodobniej do wniosku, że mogą być one generowane między innymi przez swobodne posługiwanie się zbiorami aktualnie nieskończonymi o „zbyt dużej" mocy. Antynomie występowały przecież tam, gdzie właśnie istnienie takich zbiorów przyjmowano, na przykład istnienie zbioru uniwersalnego, zbioru wszystkich liczb kardynalnych czy też zbioru wszystkich liczb porządkowych. Ale przecież zbiorami aktualnie nieskończonymi posługiwano się nie tylko w teorii mnogości. Wystarczy w tym miejscu wskazać chociażby klasyczną dyscyplinę matematyki, jaką jest analiza. Swobodnie posługiwano się tam zbiorami wszystkich liczb rzeczywistych czy zespolonych. To zdaniem intuicjonistów grozić mogło ewentualnym ponownym wystąpieniem antynomii. Dlatego też, dla uniknięcia tych ewentualnych antynomii odrzucili oni istnienie nieskończoności aktualnej. Podstawę filozoficzną dla takiej decyzji znaleźli ponownie w konstruktywizmie I. Kanta. Głosili, że umysł ludzki konstruujący przedmioty matematyki nie może wykonać nieskończenie wielu konstrukcji. Dlatego zbiór nieskończony można pojmować co najwyżej jako prawo czy też regułę wytwarzania jego elemen-

[29]Por. T. Batóg, dz. cyt., s. 181.

[30]Intuicjoniści nie tylko twierdzili, ze logika (teoria mnogości) nie może być podstawą matematyki, ale dodawali do tego jeszcze tezę przeciwną: to logika opiera się na matematyce. Program oparcia logiki na matematyce konstruktywistycznej intuicjoniści zrealizowali. Odrzucili, ze względu na niekonstruktywny charakter, wiele dowodów twierdzeń egzystencjalnych prowadzonych metodą nie wprost. U podstaw tych dowodów leżały niejednokrotnie logiczne zasady wyłączonego środka czy też podwójnego przeczenia. W konsekwencji podważyli te zasady i zbudowali alternatywną do klasycznej logikę, w której wspomniane zasady już nie obowiązywały. Zasady logiki intuicjonistycznej przedstawił w postaci systemu formalnego A. Heyting w roku 1930.

tów. Zbiór, którego elementy można wytworzyć wedle jakiejś reguły, jest jednak zawsze przeliczalny. Zatem nie istnieją zbiory nieprzeliczalne. Nie istnieją też liczby kardynalne pozaskończone inne niż co najwyżej $\aleph_0$[31]. Łatwo zauważyć, że rezygnacja ze zbiorów aktualnie nieskończonych musiała prowadzić do znacznego zubożenia analizy intuicjonistycznej a także innych działów matematyki.

W każdym razie można stwierdzić, że w celu eliminacji antynomii z podstaw matematyki intuicjoniści posłużyli się dwiema istotnymi tezami: matematyka nie jest sprowadzalna do logiki (teorii mnogości) oraz w matematyce nie wolno posługiwać się zbiorami aktualnie nieskończonymi. Uzasadnienie tych tez wymagało przyjęcia konstruktywizmu I. Kanta oraz jego epistemologii matematyki. Konsekwencją zaś wprowadzenia tez antyantynomijnych była rezygnacja z teorii mnogości oraz znacznych i znaczących obszarów analizy. Tak więc podjęta przez intuicjonistów próba eliminacji antynomii z matematyki zdecydowanie zdeterminowała oblicze tego kierunku badań podstaw matematyki.

Jeszcze wyraźniej odkrycie antynomii teoriomnogościowych zaważyło na powstaniu trzeciego kierunku badania podstaw matematyki w dwudziestym wieku, mianowicie formalizmu. Celem strategii formalizmu, zaprezentowanej przez D. Hilberta, było ostateczne wykazanie, że matematyka jest niesprzeczna[32].

D. Hilbert dzielił z intuicjonistami pogląd, że matematyka nie jest sprowadzalna do teorii mnogości (logiki)[33]. Z drugiej jednak strony, nie był on zwolennikiem wyeliminowania Cantorowskiej teorii mnogości z matema-

---

[31]Por. T. Batóg, dz. cyt., s. 181.

[32]Por. D. Hilbert, *O nieskończoności*, tłum. z niemieckiego R. Murawski, w: *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, wybór i opracowanie R.Murawski, s. 304 (287–307).

Należy pamiętać, że drugim istotnym celem, dla którego D. Hilbert sformułował program formalizmu było udowodnienie zupełności matematyki. Najogólniej teorię nazywa się zupełną, jeżeli dla każdego zdania wyrażonego w języku tej teorii bądź samo to zdanie, bądź jego negacja, są konsekwencją zbioru aksjomatów danej teorii. D. Hilbert podniósł zagadnienie zupełności w związku z tzw. *problemem continuum* i *hipotezą continuum* postawioną przez G. Cantora, której twórca teorii mnogości nie był w stanie udowodnić [por. D. Hilbert, *Die Hilbertschen Probleme. Vortrag „Mathematische Probleme" von D.Hilbert gehalten auf dem 2. Internationalen Mathematikerkongress Paris 1900*, erlutert von einem Autorenkollektiv unter der Redaktion von P. S. Aleksandrov, Leipzig 1971].

[33]„...zgadzamy się całkowicie z filozofami, w szczególności z Kantem. Już on uczył — i stanowi to integralną część jego nauki — że matematyka posiada treść pewną i niezależną od jakiejkolwiek logiki i że w zwiazku z tym nigdy nie może zostać ugruntowana w oparciu

tyki[34]. Był orędownikiem — w przeciwieństwie do intuicjonistów — utrzymania całej matematyki klasycznej z wkomponowaną w nią nieskończonością aktualną. D. Hilbert twierdził za I. Kantem, że pojęcie nieskończoności jest ideą rozumu, a więc pojęciem, dla którego nie sposób znaleźć rzeczowej podstawy, ponieważ przekracza ono wszelkie doświadczenie. Uznał jednak, że pojęcie nieskończoności jest pojęciem niezbędnym dla matematyki, bo uzupełnia to, co konkretne. Właśnie w działach infinistycznych matematyki dopatrywał się on największych osiągnięć ludzkiego umysłu[35].

Nie mógł jednak D. Hilbert przejść obojętnie nad twierdzeniem intuicjonistów, którzy sądzili, że właśnie swobodne operowanie nieskończonością w matematyce jest i może być źródłem antynomii. Dlatego właśnie zaprezentował program formalizmu, który w istocie miał na celu dowód niesprzeczności matematyki klasycznej, swobodnie posługującej się zbiorami nieskończonymi[36].

Wypada w tym miejscu wskazać na nowe jakościowo podejście D. Hilberta do problemu antynomii. Logicyści i intuicjoniści proponowali wobec pojawiających się antynomii rozwiązania doraźne. W istocie takie, których zadaniem było wyeliminowanie antynomii znanych. Nie było jednak żadnej gwarancji, że zastosowane środki chronią matematykę przed pojawieniem się innych antynomii, dotychczas nieznanych. D. Hilbert poszedł krok dalej. Dowód niesprzeczności matematyki klasycznej miał raz na zawsze rozstrzygnąć, że żadne nowe antynomie w matematyce się nie pojawią. Proponował zatem D. Hilbert nie doraźne, ale systemowe rozstrzygnięcie problemu antynomii.

Według strategii formalizmu dla rozwiązania problemu niesprzeczności matematyki konieczne było najpierw wykonanie dwu kroków. Pierwszym była aksjomatyzacja wszystkich zastanych teorii matematycznych. Zaś drugim formalizacja tych teorii. Chodziło o zbudowanie symbolicznego języka

---

o samą tylko logikę. Dlatego też próby Fregego i Dedekinda nie doprowadziły do niczego.", D. Hilbert, dz. cyt., s. 297.

Za konkretne obiekty, dane w intuicji i stanowiące punkt wyjścia matematyki, uważał D.Hilbert liczby naturalne rozumiane jako liczebniki będące pewnymi układami znaków: *1, 11, 111, 1111, ...* [por. D. Hilbert, dz. cyt., s. 297–298]. Można więc twierdzić, że w przekonaniu D. Hilberta dyscypliną podstawową matematyki była arytmetyka liczb naturalnych.

[34] D. Hilbert pisał o teorii mnogości G. Cantora: „Myślę, że jest ona najbardziej godnym podziwu wytworem ducha matematycznego i w ogóle jednym z największych osiągnięć intelektu ludzkiego.", D. Hilbert, dz. cyt., s. 293.

[35] Por. T. Batóg, dz. cyt., s. 183.

[36] Por. ibid., s. 183–184.

teorii matematycznych, w którym zdania budowane są według precyzyjnych reguł składniowych. Każde zdanie matematyki (zatem i każdy aksjomat) miał stać się formułą, czyli skończonym ciągiem symboli sztucznego języka. Wszystkie dowody miały być skończonym ciągiem formuł. Reguły dowodowe winny zostać dokładnie sformułowane w metajęzyku. W takim ujęciu zbiór twierdzeń danej teorii to nic innego, jak zbiór formuł, dla których istnieją dowody[37].

W wyniku formalizacji teorie matematyczne, zawierające aksjomaty, dowody i twierdzenia — tak jak pojedyncze symbole językowe — stają się konkretnymi i widzialnymi przedmiotami. Możliwe jest zatem ich badanie w sposób finistyczny. Żądany dowód niesprzeczności matematyki polegać powinien na pokazaniu, iż nie można zbudować dwu takich dowodów, z których jeden kończyłby się formułą p, drugi natomiast formułą $\sim p$. Badania tego rodzaju nie należały już do poziomu przedmiotowego matematyki, lecz do metapoziomu. W istocie zatem udowodnienie niesprzeczności matematyki i próba realizacji programu D.Hilberta prowadziły do stworzenia metamatematyki, którą sam autor nazywał niejednokrotnie teorią dowodu[38].

Sam dowód niesprzeczności matematyki wyobrażał sobie D.Hilbert stosunkowo prosto. Odrzucał on wprawdzie podstawową tezę logicyzmu o sprowadzalności matematyki do teorii mnogości, ale twierdził równocześnie, że punktem wyjścia całej matematyki jest arytmetyka liczb naturalnych. Na niej dało się według niego nabudować całą matematykę dziewiętnastowieczną. Dla okazania niesprzeczności matematyki wystarczyło zatem wykazanie niesprzeczności arytmetyki liczb naturalnych.

Dowód niesprzeczności tejże teorii miał zdaniem D. Hilberta wyglądać następująco: jeśliby w arytmetyce liczb naturalnych wystąpiła dowolna sprzeczność p i $\sim p$, to z tej sprzeczności można by wywieść każde zdanie. Również fałszywe zdanie $1 \neq 1$. Gdyby zatem udało się udowodnić, że w arytmetyce nie można dowieść zdania $1 \neq 1$, to wynikałoby stąd, że w arytmetyce liczb naturalnych nie może wystąpić żadna sprzeczność. Zatem dowód niesprzeczności arytmetyki liczb naturalnych, a zatem i całej matematyki klasycznej, sprowadzałby się do dowodu, że w tej teorii nie można dowieść formuły $1 \neq 1$.

W celu pokazania, że taki dowód powinien być stosunkowo nieskomplikowany, D. Hilbert powoływał się na przykłady przeprowadzonych już w matematyce klasycznej dowodów o niemożliwości dowiedzenia pewnych

[37]Por. ibid., s. 184.
[38]Por. ibid., s. 184.

tez. Chociażby na dowód twierdzenia, że niemożliwe jest dowiedzenie, iż $\sqrt{2}$ da się wyrazić przy pomocy ilorazu dwu liczb całkowitych. Zatem i udowodnienie podobnie skonstruowanej tezy, która implikowałaby w efekcie niesprzeczność arytmetyki, nie powinno było zdaniem D. Hilberta przedstawiać szczególnych trudności[39].

Jak jednak powszechnie wiadomo, optymizm D. Hilberta był przedwczesny i nieuzasadniony. W roku 1931 K. Gödel udowodnił dwa twierdzenia metamatematyczne, z których drugie mówiło o tym, że jeśli jakaś teoria aksjomatyczna zawiera arytmetykę liczb naturalnych, to przy pomocy środków mieszczących się w tej teorii nie można wykazać jej niesprzeczności. Ponieważ dla D. Hilberta arytmetyka liczb naturalnych była podstawową teorią matematyki, do której wszystkie inne były sprowadzalne, to drugie twierdzenie K. Gödla oznaczało w praktyce dla niego, że nie można przeprowadzić dowodu niesprzeczności matematyki przy pomocy metod finistycznych. Natomiast uczeń D. Hilberta G. Gentzen pokazał, iż przy pomocy metod infinistycznych, to znaczy przy przyjęciu indukcji pozaskończonej, można wykazać niesprzeczność arytmetyki liczb naturalnych. Wiązało się to jednak z zastosowaniem środków dowodowych o wiele mocniejszych od tych, które akceptował twórca formalizmu.

Widać zatem, że w ramach metamatematyki, zbudowanej przez formalistów właśnie w tym celu, by uzasadnić niesprzeczność matematyki, czyli wyeliminować systemowo groźbę wystąpienia nieznanych antynomii, uzyskano wyniki zaskakujące, w dużej mierze przeciwne do tych, których spodziewał się D. Hilbert[40].

---

[39] „Problem niesprzeczności może być jednak w dzisiejszej sytuacji (bei der gegenwrtigen Sachlage) łatwo rozważony (der Behandlung zugnglich). Redukuje się on oczywiście do pokazania, że z naszych aksjomatów i za pomocą reguł, które ustaliliśmy, nie można otrzymać „$1 \neq 1$" jako formuły końcowej dowodu, czyli że „$1 \neq 1$" nie jest dowodliwe. A to jest zadanie należące do dziedziny tych, które można rozważać w sposób intuicyjny, tak jak np. w intuicyjnej teorii liczb zadanie udowodnienia niewymierności $\sqrt{2}$, tzn. pokazania, że nie można znaleźć dwu liczb a, b takich, że $a^2 = 2b^2$, czyli wykazanie, ze nie można podać dwóch symboli liczbowych o pewnej danej własności. Ale dowód sformalizowany jest, podobnie jak symbol liczbowy, pewnym konkretnym i dającym się ogarnąć wzrokiem przedmiotem. Od początku do końca jest on komunikowalny (*mitteilbar*). Także żądana własność formuły końcowej, mianowicie to, że brzmi ona $1 \neq 1$, jest pewną konkretną, dającą się stwierdzić własnością dowodu. Skoro istotnie możemy udowodnić, że nie da się otrzymać dowodu, który miałby tę formułę jako końcową, więc uzyskujemy w ten sposób usprawiedliwienie wprowadzenia naszych wypowiedzi idealnych"., D. Hilbert, dz. cyt., s. 304–305.

[40] Warto przypomnieć, że drugim celem, dla którego powołano program formalizmu i zbudowano metamatematykę, było wykazanie zupełności matematyki. Pierwsze twier-

Przeprowadzone badania wykazały, że antynomie teoriomnogościowe, które odkryto na przełomie dziewiętnastego i dwudziestego wieku, wywołały istotny kryzys w podstawach matematyki i wśród uprawiających filozofię matematyki. Kryzys ów zaowocował burzliwą dyskusją i wyodrębnieniem się trzech kierunków badania podstaw matematyki. Powstały one przede wszystkim po to, by proponować środki mające zaradzić zaistniałej sytuacji. Logicyści i intuicjoniści dawali do dyspozycji metody doraźne, które miały wyeliminować znane antynomie teoriomnogościowe. W wypadku intuicjonistów wiązało się to z sięgnięciem do zasadniczych twierdzeń filozofii matematyki I. Kanta i równocześnie ze znacznym zubożeniem matematyki klasycznej. Formaliści chcieli zaproponować rozwiązanie systemowe problemu i wykazać, że matematyka klasyczna jest niesprzeczna. W tym właśnie celu sformułowali oni program formalizmu i zaczęli konstrukcję metamatematyki. Uzyskane wyniki okazały się jednak w dużej mierze sprzeczne z oczekiwaniami. Udowodnione twierdzenie o niemożliwości wykazania niesprzeczności teorii aksjomatycznych, zawierających arytmetykę liczb naturalnych, przy pomocy środków tychże teorii (wraz z twierdzeniem o niezupełności tych systemów, przy założeniu ich niesprzeczności), wywołało rewolucję nie tyle na poziomie matematyki, co na poziomie metaprzedmiotowym: metamatematyki i filozofii matematyki oraz, szerzej, całej epistemologii.

Przeprowadzone badania wykazały równocześnie wewnętrzną logikę całego ciągu dokonań w matematyce, jej filozofii oraz metamatematyce, począwszy od zdefiniowania granicy przez B. Bolzano i A. Cauchego na początku dziewiętnastego wieku, aż po prezentację dowodów słynnych twierdzeń K. Gödla w latach trzydziestych dwudziestego wieku. Osią, wokół której można uszeregować owe dokonania, są właśnie antynomie teoriomnogościowe odkryte na przełomie dziewiętnastego i dwudziestego wieku.

dzenie K. Gödla mówi jednak o tym, że przy pomocy środków arytmetycznych nie można dowieść zupełności niesprzecznej arytmetyki.