TEZA CHURCHA A TWIERDZENIE GOEDLA

Jednym z najsłynniejszych intelektualnych zdobyczy, mijającego dwudziestego wieku, jest bez wątpienia twierdzenie Goedla (skrót TG)[1]. Mówi ono, że arytmetyka liczb naturalnych i każdy system ją zawierający niesprzeczny i o rekurencyjnym zbiorze aksjomatów, który oznaczymy skrótem AR, jest istotnie niezupełny. Dlatego właśnie TG nazywamy twierdzeniem o niezupełności AR[2]. Czasem też zdarza się, że twierdzenie to bywa nazwane twierdzeniem o nierozstrzygalności AR[3]. Jednym z celów napisania niniejszego artykułu jest próba wyjaśnienia tego nieporozumienia. Głównym celem jest zapoznanie Czytelnika ze związkiem treściowym, z którego nie wszyscy zdają sobie sprawę[4], jaki istnieje pomiędzy TG a tezą Churcha (skrót TC). Przed ich ścisłym sformułowaniem należy wyjaśnić pojęcia pomocnicze. Pierwszym jest idea arytmetyzacji składni. Sam pomysł jest bardzo prosty, lecz jego wykonanie w sposób ścisły jest dość żmudne, dlatego przedstawię jedynie samą ideę. Wiadomo, że każda liczba naturalna (oprócz 0 i 1) da się przedstawić jako iloczyn pewnej ilości liczb pierwszych.[5] Liczby pierwsze tworzą 'budulec', z którego możemy, biorąc iloczyny skończone, uzyskać dowolną liczbę naturalną. Każdej zatem liczbie naturalnej przyporządkować możemy wzajemnie jednoznacznie jej rozkład na iloczyn liczb pierwszych. Goedel znalazł sposób, w jaki możemy każdemu, poprawnie zbudowanemu, wyrażeniu języka AR przyporządkować wzajemnie jednoznacznie jego numer goedlowski, tzn. określoną liczbę naturalną[6]. Ta odpowiedniość jest bardzo ścisła, tzn. możemy, mając wyrażenie, skonstruować jego numer, ale i odwrotnie, mając jakiś numer goedlowski, możemy skonstruować samo wyrażenie. Dotyczy to nie tylko wyrażeń języka AR, ale również skończonych ciągów wyrażeń jak np. dowodów. Teraz drugi istotny krok: chcąc wypowiedzieć jakieś stwierdzenie metamatematyczne o jakichś wyrażeniach AR możemy, znając ich numery goedlowskie, mówić o tych numerach; co za tym idzie, przejść znowu z metamatematyki do AR. Powiemy w skrócie: pewne metamatematyczne zdania o AR można przełożyć na zdania arytmetyczne. Zapiszemy to tak: jeśli χ jest wyrażeniem AR, to $[\chi]$ oznacza jego numer goedlowski[7]. Metamatematyczne zdanie:

---

[1] 'Osiągnięcia Kurta Goedla we współczesnej logice są wyjątkowe i monumentalne – w rzeczywistości to więcej niż monument, to punkt zwrotny, który pozostanie widoczny daleko w czasie i przestrzeni', J. von Neumann, w New York Times, 15 marzec, 1951, s. 51, (tłum. A.O.). Chodzi tutaj o tzw. pierwsze twierdzenie Goedla o niezupełności.

[2] TG zostało dowiedzione przez Goedla dla dowolnego systemu formalnego, który posiada następujące własności: (i) jest ω-niesprzeczny, (ii) ma rekurencyjnie definiowalny zbiór aksjomatów i reguł inferencji, (iii) każda relacja rekurencyjna jest definiowalna w tym systemie. W naszych rozważaniach AR spełnia warunek drugi i trzeci, zaś pierwszy zastępujemy zwykłą niesprzecznością. Zatem chodzi o wariant TG, będący twierdzeniem Rossera.

[3] Por. na przykład A. Grzegorczyk, 'Zagadnienia rozstrzygalności', Warszawa, 1957, s.107.

[4] Artykuł niniejszy jest trzecim z serii artykułów poświęconych związkowi TC z innymi ważnymi zagadnieniami filozoficznymi. Poprzednie dwa: 'Teza Churcha a Platonizm' oraz 'O roli TC w dowodzie pewnego twierdzenia', ukazały się w dwóch poprzednich numerach czasopisma 'Zagadnienia Filozoficzne w Nauce'.

[5] Dokładne omówienie tego zagadnienia w A. Grzegorczyk, 'Zarys arytmetyki teoretycznej', PWN, Warszawa 1971, ss. 81-83.

[6] Dla praktycznego zapoznania się z numeracją Goedla por. np. E. Nagel, J. R. Newman, 'Twierdzenie Goedla', PWN, Warszawa 1966, ss. 53-61.

[7] Możemy kodować nie tylko zdania, ale również funkcje zdaniowe, w których występują zmienne wolne.

‘formuła $\chi(t)$ jest wynikiem podstawienia termu t (czyli wyrażenia kategorii nazwowej), do formuły $\chi(x)$ za zmienną x’ [8], da się również przetłumaczyć na formułę arytmetyczną.[9] Arytmetyczną funkcję podstawiania zapiszemy następująco: $podst([\chi(x)],[x],[t]) = [\chi(t)]$.[10] Należy podkreślić, że ta ostatnia formuła jest zdaniem zapisanym w języku AR. Da się również zapisać w AR następujące zdanie metamatematyczne: ‘ciąg wyrażeń x, jest dowodem wyrażenia χ’ , w postaci: $Dow_{AR}([x], [\chi])$, również tutaj należy podkreślić, iż formuła ta jest zdaniem czysto arytmetycznym (oczywiście odpowiadającym znaczeniu zdania metamatematycznego). O dwóch dowolnych termach x, y powiemy, że:

$Dow_{AR}(x, y)$ wtedy i tylko wtedy, gdy x jest numerem Goedla dowodu formuły o numerze Goedla y.

Wreszcie zdefiniujemy: $D_{AR}(y) \leftrightarrow \exists x\, Dow_{AR}(x, y)$, inaczej; formuła o numerze goedlowskim y jest dowodliwa w AR, gdy istnieje obiekt x będący numerem goedlowskim jej dowodu.

Zachodzi ważna własność, że jeśli dowolne zdanie χ jest dowodliwe w AR z aksjomatów, to $D_{AR}([\chi])$ jest twierdzeniem w AR.

Dla dowodu TG potrzebny jest następujący lemat:

Niech $\chi(x)$ w języku AR ma tylko jedną zmienną x. Istnieje zdanie φ takie, że

$$\varphi \leftrightarrow \chi(\underline{[\varphi]})$$

jest twierdzeniem AR.[11]

Dowód: Niech $podst'(x,y,z) = podst(x,y,num(z))$[12]. Niech $\mathbf{podst'}$[13] reprezentuje w AR funkcję $podst'$. Dla danego $\chi(x)$, niech $\theta(x)$ będzie następującą formułą

$$\forall y(\mathbf{podst'}(x,\underline{2},x,y) \to \chi(y))$$

(przyjmujemy, że liczba 2 jest numerem Goedla zmiennej x, zaś $\underline{2}$ jest liczebnikiem (nazwą) liczby 2). Niech $m = [\theta(x)]$ oraz niech φ będzie zdaniem $\theta(\underline{m})$. Wobec powyższych ustaleń mamy:

$$\begin{aligned} \varphi &\leftrightarrow \theta(\underline{m}) \\ &\leftrightarrow \forall y(\mathbf{podst'}(\underline{m},\underline{2},\underline{m},y) \to \chi(y)) \\ &\leftrightarrow \forall y(\mathbf{podst'}(\underline{[\theta(x)]},\underline{2},\underline{m},y) \to \chi(y)) \\ &\leftrightarrow \chi(\underline{[\theta(m)]}) \end{aligned}$$

---

[8] Jest to właśnie sytuacja wspomniana w poprzednim przypisie: $\chi(x)$ jest formą zdaniową jednej zmiennej wolnej x, gdzie zmienna przy kodowaniu traktowana jest czysto syntaktycznie, jako znak.

[9] Nie jest to wcale takie proste i oczywiste. W tej sprawie por. np. Nagel, Newman, op. cit., ss. 83-84. To właśnie, między innymi, dokładnie zrobił Goedel w pracy ‘Ueber formal unentscheindbare Saetze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I.’, Monatshefte fuer Mathematik und Physik, 38 (1931), ss. 173-198; również w: M. Davies, ‘The Undecidable’, Raven Press, New York 1964, ss. 5-38.

[10] Jest to jak widać funkcja trójargumentowa, reprezentująca ją relacja będzie czteroargumentowa.

[11] Dowód ten pochodzi zasadniczo z: C. Smoryński, ‘The incompleteness theorems’, w: Handbook of mathematical logic’, J. Barwise (ed.), North-Holland, Amsterdam 1977, ss. 827-828. Dowód ten jednak nie jest poprawny. Uwagę tę zawdzięczam Panu Prof. R. Murawskiemu. Niniejszy dowód pochodzi z książki; R. Murawski, ‘Recursive functions and Metamathematics’, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1999.

[12] $num(y)$ jest numerem Goedla liczebnika y (liczebnik to nazwa liczby).

[13] Predykat ten jest czteroargumentowy.

$\leftrightarrow \chi([\varphi])$.

Czego należało dowieść.[14]

Wstawmy do dowiedzionego lematu $\neg D_{AR}(x)$ za formułę $\chi(x)$.

Twierdzenie Goedla o niezupełności:

Jeśli w AR, o ile AR jest niesprzeczna, da się dowieść; $\varphi \leftrightarrow \neg D_{AR}([\varphi])$, to:

(i) w AR nie da się dowieść zdania φ;

(ii) ani; przy założeniu, że dowiedlność $D_{AR}([\varphi])$ na gruncie AR implikuje dowiedlność φ w AR, nie da się w AR dowieść $\neg\varphi$.

Dowód niewprost:[15] (i) Jeśliby φ było dowiedlne w AR, to dowiedlne byłoby $D_{AR}([\varphi])$, a to na mocy założenia twierdzenia i lematu dawałoby możliwość dowiedzenia, na gruncie AR, zdania $\neg\varphi$. A to przeczy niesprzeczności AR.
(ii) załóżmy, że dowiedlne w AR jest $\neg\varphi$, to wtedy dowiedlne byłoby $\neg\neg D_{AR}([\varphi])$, czyli również $D_{AR}([\varphi])$, a z założenia dodatkowego mielibyśmy dowiedlne w AR φ, co jest sprzecznym z założeniem niesprzeczności AR. I to kończy cały dowód.

W formie komentarza, do tego nieformalnego przedstawienia dowodu TG, należy powiedzieć, iż sam dowód jest krótki i bardzo prosty. Cały ciężar spoczywa na poprawnym zdefiniowaniu arytmetyzacji składni i stwierdzeń metamatematycznych. Jeśli to da się uzyskać, i zrozumieć, to pozostała część wydaje się nawet trywialnym spostrzeżeniem.[16]

Załóżmy teraz, że; TG jest fałszywe i że AR jest zupełna oraz prawdziwość TC.

Dla naszych dalszych rozważań potrzebny będzie jeszcze jeden predykat, zwany w literaturze przedmiotu predykatem Kleenego.[17] Jest to predykat pierwotnie rekurencyjny, analogiczny do predykatu Dow_{AR} Goedla. Symbolicznie zapiszemy go $T(e, n, x)$. Trójka liczb naturalnych spełnia go, czy też inaczej, orzeka się on prawdziwie o trzech liczbach naturalnych wtedy i tylko wtedy, gdy e jest numerem goedlowskim pewnego zbioru równań[18], x jest numerem goedlowskim derywacji, z tego zbioru równań, równania, które wyraża to, jaką wartość przyjmie funkcja f występująca w wymienionych równaniach, dla argumentu n.[19] Kleene skonstruował do tego jeszcze funkcję, również pierwotnie rekurencyjną $U(x)$, która działa tak:

---

[14] Oczywiście jest to skrótowo zapisany ciąg równoważności.

[15] Również pochodzi z cytowanej pracy Smoryńskiego s. 828.

[16] Można tutaj postawić pytanie o to, czy da się dowieść TG bez zabiegu arytmetyzacji. Już wiadomo, że w pewnym sensie można, gdyż udowodniono istnienie zdań o treści arytmetycznej (nie 'sztuczne' jak było ze zdaniem Goedla), które są niezależne od aksjomatów AR. Por. w tej sprawie: R. Murawski 'Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki', UAM, Poznań 1990.

[17] Por. np. H. Rogers Jr., 'Theory of recursive functions and effective computability', McGraw-Hill Book Company, New York 1967, s. 30.

[18] Równania te charakteryzują pewną funkcję *f*.

[19] W opisie za pomocą maszyn Turinga predykat ten ma heurystyczne znaczenie; maszyna Turinga o numerze Goedla *e* i mając na wejściu *n*, wykonuje obliczanie o numerze goedlowskim *x*. Por. A. A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, A. Levy, 'Foundations of set theory', North-Holland, Amsterdam 1973, ss. 260-261. Predykat ten został opisany przez Kleenego w pracy: S. C. Kleene, 'General recursive functions of natural numbers', w: M. Davis, 'The Undecidable', Raven Press, New York 1964, ss. 237-253.

$f(n) = U(\mu x T(e, n, x))$. Funkcja ta 'wydobywa' z numeru goedlowskiego równania x, wartość funkcji f w punkcie n. Dzięki temu dysponujemy efektywną enumeracją wszystkich jednoargumentowych częściowych funkcji rekurencyjnych: $\varphi_0(n), \varphi_1(n), \ldots, \varphi_e(n), \ldots$; gdzie $\varphi_e(n)=U(\mu x T(e, n, x))$.[20] Ponieważ w tym ciągu występują funkcje częściowe, można je efektywnie uzupełnić do funkcji całkowitych $\underline{\varphi}_0(n), \underline{\varphi}_1(n), \ldots, \underline{\varphi}_e(n), \ldots$; w sposób następujący:

$$\underline{\varphi}_e(n) = U(x), \quad \text{gdy } T(e, n, x), \text{ lub}$$
$$\underline{\varphi}_e(n) = 0, \quad \text{gdy } \forall x \neg T(e, n, x) \text{ jest twierdzeniem AR.}$$

Te nowe funkcje są określone na całym zbiorze liczb naturalnych. Wobec tego, dla ustalonych e oraz n, możemy poszukiwać najmniejszej liczby x takiej, że zachodzi $T(e, n, x)$. Jeśli taką znajdziemy, to dajemy $\underline{\varphi}_e(n)=U(x)$. Jeśli takiej liczby nie ma, co wyraża odpowiednie zdanie AR, to znajdziemy jego numer goedlowski, i wtedy kładziemy $\underline{\varphi}_e(n)=0$.[21] Mając taką efektywną enumerację wszystkich jednoargumentowych funkcji ogólnie rekurencyjnych możemy, używając argumentu przekątniowego Cantora wziąć funkcję $\underline{\varphi}_n(n)+1$. Funkcja ta nie występuje na naszej liście wszystkich jednoargumentowych funkcji ogólnie rekurencyjnych. Sama jest jednak efektywnie obliczalna. Wynikałoby z powyższych założeń, że klasa funkcji efektywnie obliczalnych jest obszerniejsza niż klasa wszystkich funkcji ogólnie rekurencyjnych. Jest to sprzeczne z TC, która mówi co następuje:

(TC) Klasa funkcji określonych w zbiorze liczb naturalnych i obliczalnych w sensie intuicyjnym, pokrywa się zakresowo z klasą wszystkich funkcji ogólnie rekurencyjnych.

Całe powyższe rozumowanie doprowadziło nas to wszystko do uzasadnienia prawdziwości następującego wynikania:

$$(\text{TG jest fałszywe}) \Rightarrow (\text{TC jest fałszywa}),$$

lub równoważnie[22]:

$$(\text{TC jest prawdziwa}) \Rightarrow (\text{TG jest prawdziwe}).$$[23]

Rzecz cała wydaje się dość interesująca z filozoficznego punktu widzenia. Jakiego to rodzaju zależność zachodzi pomiędzy TG a TC?. Jest to z pewnością zależność logiczna. Znaczy to, że prawdziwość TC pociąga za sobą prawdziwość TG. Jest to również jakoś zależność 'treściowa'. Znaczyć by to mogło, że treść TG zawiera się w treści TC. Do wysłowienia zarówno TC jak i TG potrzebujemy takich pojęć jak: liczby naturalne, funkcje, obliczalność.[24] Nieprzypadkowo chyba to Goedel, dla

[20] Argument ten pochodzi z pracy S. C. Kleene, 'Reflections on Church's Thesis', Notre Dame Journal of Formal Logic, 28 (1987), ss. 490-498.

[21] Dokładnie owa procedura polega na podwójnym sprawdzaniu; po pierwsze dla kolejnego x sprawdzamy czy spełnia predykat T, jeśli ów x nie spełnia formuły, to sprawdzamy czy jest może numerem goedlowskim formuły wyrażającej fakt, iż takiego x po prostu nie istnieje.

[22] Pod warunkiem, że takie wynikanie ma własność kontrapozycji (mocnej).

[23] Zgodnie z TG niezupełny jest każdy system AR, ω-niesprzeczny o obliczalnej aksjomatyce. Taki też system rozważał Kleene w artykule 'Reflections on Church's Thesis'. Ta implikacja jest możliwa do przyjęcia dzięki mocnemu prawu kontrapozycji, ważnemu w logice klasycznej, ale nietautologicznemu w logice np. intuicjonistycznej.

[24] W przypadku TG nie występują te pojęcia eksplicite lecz implicite tzn. zawiera je termin AR.

potrzeb swego dowodu, wysłowił pojęcie funkcji rekurencyjnych. Interesujące również wydaje się pytanie o prawdziwość wynikania odwrotnego do ostatniego z występujących powyżej.[25]

[25] Mogłoby to oznaczać, że założenie prawdziwości TG, a co za tym idzie istotnej niezupełności AR, dałoby wystarczającą podstawę do uznania prawdziwości TC. Inaczej, że treść TG 'zawiera' w sobie treść TC, w takim samym sensie jak przeciwne 'zawieranie' się treści miało zostać wykazane w powyższym artykule.