Adam Olszewski

WF, PAT w Krakowie

TEZA CHURCHA A GENEZA POJĘĆ OBLICZALNOŚCI. ZARYS PROBLEMU

Przedmiotem niniejszej pracy jest pewien problem związany z tezą Churcha (CT) . Przez CT będę rozumiał sformułowanie, które odbiega wprawdzie od tradycyjnego, jednak nawiązuje ściśle do tego, co miał na myśli autor tezy swego imienia – Alonzo Church:

(CT) Pojęcie funkcji efektywnie obliczalnej (określonej w liczbach naturalnych) jest identyczne z pojęciem funkcji rekurencyjnej.

Mamy tutaj jak gdyby do czynienia z dwoma pojęciami, o których CT stanowi, że są w istocie jednym pojęciem. Zagadnienie, którym chcę się zająć to próba odpowiedzi na pytanie, jaka jest geneza tych dwóch pozornie różnych pojęć? Nawracam tutaj do problemu postawionego przez Fregego: gdyby CT, jako identyczność, stanowiła, iż A = A, to byłaby całkowicie trywialna. Musi być tak, że CT stanowi A = B i wtedy przestaje być trywialna. Pytaniem zasadniczym jest: czym się różnią pojęcia A i B, że stwierdzenie ich identyczności jest ciekawe? Argumentuję w tej pracy, że oba pojęcia wchodzące do sformułowania CT różnią się genezą, czy też sposobem, w jaki do nich dochodzimy.

1. Po pierwsze należy zwrócić uwagę na to, że CT w powyższej postaci posiada presupozycję, której prawdziwość czyni CT w ogóle sensownym zdaniem. Ową presupozycję można sformułować następująco:

(PCT) Istnieją pojęcia i można je badać.

Testem pozwalającym odróżnić presupozycję[[1]](#footnote-1) A jakiegoś zdania B (symbolicznie: B►A, czytamy: A jest presuponowane przez B, lub B presuponuje A) od wynikania logicznego A z B (symbolicznie: B╞ A) jest to, iż żadne zdanie nie wynika logicznie z innego zdania i równocześnie negacji tego zdania, o ile samo nie jest tautologią logiki.[[2]](#footnote-2) W naszym przypadku zachodzi: CT ► PCT oraz ¬CT ► PCT. Natomiast o ile możemy uznać: CT ╞ PCT, to już ¬CT ╞ PCT nie musi zachodzić, gdyż pojęcia mogą nie istnieć lub, być może, nie można ich badać w żadnym intersubiektywnym sensie, a mimo tego te dwa pojęcia mogą być różne.

2. Jednym z ważnych problemów filozoficznych arytmetyki liczb naturalnych jest zagadnienie genezy (pochodzenia) liczb naturalnych. Chodzi tutaj o pochodzenie pojęcia liczby naturalnej, jakie posiadamy w umyśle. Spośród różnych stanowisk w tej kwestii rozważmy dwa.

Jedno rozwiązanie, którego zwolennikiem był John Mill, jest takie, iż liczby naturalne pochodzą z doświadczenia empirycznego, będąc jego uogólnieniem.[[3]](#footnote-3) I tak, według Milla, tworzymy na przykład pojęcie liczby trzy poprzez empiryczny kontakt z trzema kamieniami, jabłkami itp. Również niektóre funkcje częściowe pochodzą z doświadczenia, jak pewne przedziały funkcji dodawania, odejmowania, mnożenia czy potęgowania.[[4]](#footnote-4) Na czym polega możliwość uogólnienia? Otóż wydaje się, że na tym, iż możemy porzucić kamienie, jabłka itp. i zastąpić je znakami (liczbowymi), które tworzymy w sposób wolny, ale również obszarze doświadczenia zewnętrznego. Znaki (liczbowe) postrzegamy, potrafimy je rozróżniać od siebie wzajemnie, potrafimy je powtarzać, rozpoznawać powtórnie, czy wreszcie odróżniać od innych obiektów doświadczenia zmysłowego. Znaki mogą oznaczać zarówno dowolne przedmioty, jak i dowolne liczby przedmiotów. Dzięki znakom możemy zapisywać bardzo duże liczby, a nawet wykonywać na nich operacje. Znaki mają charakter analogiczny do przedmiotów; tym się od nich różnią, że zostały skonstruowane przeze mnie i są łatwe w operowaniu. Dzieje notacji arytmetycznej, w szczególności pojawienie się cyfr arabskich i liczenie o podstawie dziesięć znacznie ułatwiło procedury operowania znakami liczbowymi. Operowanie znakami (czy też na znakach), uczynionymi przeze mnie, ma charakter prostych manipulacji mechanicznych. Rozważana sprawa dotyczy znaków oznaczających przedmioty i ich zbiorowości. Inaczej może mieć się sprawa ze znakami, dzięki którym potrafimy budować zdania wyrażające jakieś myśli. Również nie wszystkie operacje wykonywane na przedmiotach doświadczenia zewnętrznego mają charakter mechaniczny. Na przykład, kiedy rzucamy monetą, to wynik w postaci orła lub reszki jest dla nas nie do przewidzenia. Dołączył się bowiem czynnik, który jest od nas niezależny i powoduje nieprzewidywalność. Zdajemy sobie sprawę, że istnieje ograniczenie na przewidywalność wyniku naszych działań w sferze zewnętrznej. Jednak w przypadku znaków sprawa wydaje się być przesądzona, o ile nie będziemy brali pod uwagę znaczeń kodowanych przez znaki. Zgodnie z koncepcją Milla uogólnienia w postaci pojęcia liczby, czy też funkcji arytmetycznych, dokonuje się za pomocą tzw. indukcji niezupełnej. Warto się zatrzymać nad tym zagadnieniem, gdyż wiąże się ono z matematycznością przyrody.[[5]](#footnote-5) Zakładając, że w bezpośrednim doświadczeniu człowiek nie ma do czynienia z procesami nieskończonymi w przyrodzie, a tylko ze skończonymi, można wnosić, że człowiek nigdy nie ma doświadczenia funkcji. Funkcja bowiem, jako nieskończony zbiór par uporządkowanych, jest obiektem nieskończonym.[[6]](#footnote-6) Weźmy na przykład definicję rekurencyjną dodawania:

x + 0 = x

x + S(y) = S(x + y).

Jeśli mam do czynienia z dowolnymi, ale małymi liczbami x oraz y, to potrafię je dodać do siebie używając na przykład kamieni. Dodając, korzystam z procedury rekurencji, gdyż zliczając zbiór kamieni, po dołączeniu zbioru liczącego x kamieni do zbioru liczącego y kamieni, zliczam je dodając do znanej mi liczby x kamieni, po jednym kamieniu ze zbioru liczącego y kamieni. Uogólnienie polega na tym, że mogę zrobić to samo na znakach i, abstrahując od konkretnych liczb, mogę sformułować za pomocą znaków metodę, która stosuje się do dowolnych liczb. W tym ukazuje się cała waga matematyczności przyrody. Ponieważ funkcja nie istnieje w przyrodzie, musi pochodzić ode mnie, dokładnie od mojego umysłu. Ale jak to się dzieje, że ze skończonej liczby przypadków mogę sformułować ogólną metodę stosującą się do nieskończonej liczby przypadków? Umysł dla pewnego skończonego zbioru przypadków dokonuje procedury (nieefektywnej) przeszukiwania swoich zasobów i „dopasowania” funkcji do kilku stwierdzonych empirycznie przypadków. Ta operacja umysłu jest poprzedzone przekonaniem, że takie działanie jest sensowne. Można to ująć w ten sposób, że teza o matematyczności przyrody (TM) jest *presupozycją* badań nad przyrodą; a to znaczy, że przyjęcie prawdziwości tezy o matematyczności przyrody jest gwarantem sensowności zdań opisujących przyrodę matematycznie.[[7]](#footnote-7) Sensowność zdań w tym przypadku znaczy możliwość przypisania im wartości logicznej fałszu, czyli ich falsyfikowalności (TF). Mielibyśmy zatem taki związek:

TF ► TM.

Dla wykazania, że taki związek rzeczywiście zachodzi skorzystamy z następującego prawa dla presupozycji: A►B ≡ (¬A)►B. Gdy w tym wzorze zastąpimy znak presuponowania znakiem ╞, czyli wynikania logicznego, to jedna z następujących zależności powinna nie zachodzić. Mianowicie nie powinno zachodzić albo A╞B albo ¬A╞B, czyli w naszym przypadku któraś z formuł: TF╞TM lub (¬TF)╞TM powinna nie zachodzić. Pytamy zatem, czy możliwa jest taka sytuacja, żeby zachodziło TF (lub odpowiednio ¬TF) i równocześnie ¬TM? Myślę, że taka sytuacja zachodziłaby, gdyby przyroda była całkowicie chaotyczna. Uwagi te mają pokazać, że skoro TM jest presuponowane przez TF, to TM nie podlega zasadzie falsyfikowalności, a co za tym idzie nie ma charakteru naukowego wedle kryterium Poppera. Jeśli by tak było, to TM z natury rzeczy należy do badań filozoficznych i jest zagadnieniem brzegowym badań naukowych.

Wracając do definicji dodawania liczb, cała ta procedura jest możliwa w związku z tym, że mogę dowolny zbiór kamieni ułożyć w ciąg skończony i „wytworzyć” sobie w umyśle ogólne pojęcie funkcji następnika. Uogólnienie polega w tym przypadku na tym, że mogę sobie wyobrazić dokładanie kolejnego kamienia (lub dopisywanie kolejnej kreski w reprezentacji za pomocą znaków) i proces ten może być nieukończony, albo inaczej nie-skończony. Aktualna nieskończoność jest przy tym ujęciu znowu jedynie pojęciem umysłu.[[8]](#footnote-8) W określeniu klasy funkcji rekurencyjnych potrzebna jest, jak wiadomo, dodatkowo zasada indukcji zupełnej, która jest podstawą do definiowania funkcji za pomocą tzw. μ-rekursji. Ten rodzaj indukcji może mieć też empiryczną proweniencję. Jednym ze szkolnych przykładów na indukcję zupełną jest przykład z kostkami domina. Sama indukcja zupełna jest również uogólnieniem umysłu. Zdaniem piszącego, z powyższych uwag wynika, że cała siła empirystycznej koncepcji pochodzenia pojęć opiera się na sposobie funkcjonowaniu umysłu.[[9]](#footnote-9)

Drugim poglądem w rozważanej kwestii jest koncepcja platońska, reprezentowana na przykład przez G. Fregego.[[10]](#footnote-10) Frege był ostrym krytykiem Millowskiej koncepcji pochodzenia liczb, a niektóre z wypowiedzi Anglika na tematy związane z logiką czy arytmetyką traktował z lekceważeniem. Argumenty krytyczne Fregego są następujące: argument z dużych liczb, że ich nie doświadczamy empirycznie[[11]](#footnote-11); argument z małych liczb, w którym chodzi o to, jakie fizyczne fakty ilustrują istnienie 0 i 1; argument z liczby obiektów niefizycznych, jak np. uderzenia zegara; i ostatni argument - wedle którego indukcja niezupełna zależy od prawdopodobieństwa, które z kolei zakłada arytmetykę, a zatem mielibyśmy błędne koło w uzasadnianiu arytmetyki. Nie wchodząc w szczegóły teorii Fregego powiemy, że dla niego wypowiedź o liczbie jest wypowiedzią o pojęciu.[[12]](#footnote-12) Pojęcia istnieją i są dane pierwotnie jako byty platońskie. Same liczby naturalne dane indywidualnie definiuje Frege jako elementy pewnego ciągu, którego pierwszym elementem jest liczba 0, która należy do pojęcia „być nieidentycznym z samym sobą”. Liczba 1 jest z kolei liczbą, która należy do pojęcia „być identycznym z 0” itd. Frege był logicystą i uważał, że pojęcia arytmetyczne dadzą się sprowadzić do pojęć logicznych. Dotyczyło to zarówno liczb, jak i zasady indukcji zupełnej. Jeśli zatem posiadamy w naszych umysłach jakieś pojęcia arytmetyczne, to są one pochodną pojęć logicznych. W szczególności działania arytmetyczne dadzą się zdefiniować za pomocą metod logicznych. Czy należy zatem rozumieć, iż pojęcia arytmetyczne nie istnieją w świecie obiektów platońskich, lecz są jedynie naszą konstrukcją? Myślę, że trzeba uznać ich obiektywne istnienie jako bytów abstrakcyjnych, zgodnie z założeniem platońskim. Nasza intuicja, odnosząca się do liczb i funkcji, bo to właśnie za pomocą intuicji intelektualnej docieramy do bytów abstrakcyjnych, pozwala rozpoznać ich własności. Gödel mówił o tej intuicji, że jest podobna do postrzegania zmysłowego.[[13]](#footnote-13) Początkowo nie widzimy dokładnie, rzecz wydaje się być mętna i widzimy niewyraźnie, ale im dłużej się przyglądamy, to z czasem widzimy wyraźniej. Tak samo jest z intuicją obiektów platońskich. Im staranniejszy ogląd, tym lepsze rozumienie pojęcia. Temu oglądowi towarzyszy przekonanie, że jesteśmy świadkami odkrywania czegoś istniejącego, a nie twórcami. Dobitnym przykładem jest powstanie arytmetyki liczb naturalnych. Własności liczb naturalnych odkrywane powoli doprowadziły do sformułowania ich własności w postaci sformalizowanego systemu arytmetyki Peano i są owocem współpracy wielu myślicieli na przestrzeni co najmniej kilkudziesięciu lat.

3. Powyższe rozważania mają wskazywać na dwie konkurencyjne teorie pochodzenia pojęcia liczby naturalnej, podstawowych własności tych liczb, jak i pojęcia funkcji. Zwolennicy tych teorii są wzajemnie krytycznie nastawieni. Wydaje się jednak, że oba te podejścia generują dwa źródłowo niezależne zestawy pojęć. Jeden wywodzi się mechanicznego manipulowania znakami i syntaktycznych operacji na nich (empiryzm). Drugi zaś wywodzi się z intuicyjnego obcowania z obiektami abstrakcyjnymi (platonizm). Wydaje się, że koncepcja obliczalności w postaci funkcji rekurencyjnych wywodzi się z empirycznego manipulowania znakami. Argument za tym jest taki, że termin *rekurencyjny* w swoim pierwotnym sensie odnosi się do wyrażeń zdefiniowanych syntaktycznie. I tak, na przykład, używając lambda-notacji Churcha, odnosi się do wyrażeń, które mogą się pojawić w nawiasie kwadratowym w wyrażeniu λx[ ], a dopiero w sensie wtórnym do funkcji jako nieskończonego zbioru par uporządkowanych. Chcąc wykazać, że jakaś funkcja jest rekurencyjna wykazujemy, że wyrażenie definiujące tę funkcję da się wyprowadzić z wyrażeń dla funkcji bazowych za pomocą schematów definicyjnych. Zaś w sensie wtórnym funkcja λx[f(x)] nazywa się *rekurencyjną*, gdy istnieje takie wyrażenie rekurencyjne g(x), że λx[f(x)] = λx[g(x)].[[14]](#footnote-14) Z podejściem empirystycznym związane jest też podejście mechanistyczne do obliczalności. R. Gandy wykazał, że obliczalność przez fizyczną maszynę, spełniającą pewne wyjściowe założenia, jest równoważne obliczalności w sensie Turinga.

Natomiast pogląd platoński odnośnie genezy „drugiego” pojęcia obliczalności wywodzi się z intuicyjnego wglądu w świat idei platońskich. Próbą definicji wywodzącej się stąd jest, według mnie, definicja obliczalności w postaci funkcji lambda-obliczalnych. Church mówił w tym przypadku o formalizacji pojęcia funkcji *in intension*.[[15]](#footnote-15) Kiedy mówimy o intuicyjnym pojęciu funkcji efektywnie obliczalnej, to słowo *intuicyjny* odnosi się prawdopodobnie do intuicji intelektualnej, dzięki której poznajemy świat obiektów platońskich.

Trzecim źródłem odkrycia sensu obliczalności były badania przeprowadzone przez Alana Turinga. Zdawały one sprawę z rozważań nad umysłem i procedurami umysłowymi, które są dokonywane podczas obliczania. Maszyna Turinga może być bowiem traktowana jako rodzaj modelu umysłu, czy też sposobu jego funkcjonowania podczas obliczeń na liczbach. Zresztą w tytule pracy Turinga jest mowa o obliczaniu liczb. Można powiedzieć, nie odwołując się ani do obiektów platońskich, ani do empiryzmu, że to pojęcie obliczalności leży w nurcie konceptualistycznym (konstruktywistycznym) wywodzącym się od Brouwera.[[16]](#footnote-16)

Dwa pierwsze sensy obliczalności funkcji określonych w liczbach naturalnych spotykają się w turingowskim pojęciu obliczalności.

4. Na tle wypowiedzianych uwag spróbujmy rozważyć pewne zagadnienie. Załóżmy, po pierwsze, że umysł działa jak uniwersalna maszyna Turinga na symbolicznych (syntaktycznych) reprezentacjach stanów rzeczy[[17]](#footnote-17), czyli myślenie jest rodzajem „obliczania” na owych reprezentacjach. Takie założenie jest w istocie przyjęciem komputacyjnej teorii umysłu. Drugie założenie polega na przyjęciu wyników (pobieżnych) analiz z punktu drugiego i trzeciego niniejszej pracy. Przy tych założeniach możliwy jest, jak się wydaje, mocny argument za prawdziwością CT. Na mocy powyższej argumentacji mielibyśmy to, że pojęcie funkcji rekurencyjnej ma empiryczny rodowód i jest równoważne pojęciu obliczalności za pomocą maszyny Turinga. Równocześnie jeśli myślenie o funkcjach jako regułach (*in intension*) i liczbach jako obiektach platońskich ograniczone jest przez proces myślenia, a zatem również przez maszynę Turinga (z komputacyjnej teorii umysłu), to oba te (różniące się co do genezy) pojęcia byłyby tym samym pojęciem.

1. Zdanie A jest *presupozycją* zdania B, gdy prawdziwość zdania A jest warunkiem koniecznym *sensowności* zdania B. [↑](#footnote-ref-1)
2. Stosuję tutaj własną symbolikę na operator presuponowania. [↑](#footnote-ref-2)
3. Takie stanowisko zwane jest czasem redukcjonizmem w omawianej kwestii. [↑](#footnote-ref-3)
4. Przez funkcję będziemy w niniejszej pracy rozumieć konsekwentnie funkcję określoną w liczbach naturalnych. [↑](#footnote-ref-4)
5. Teza o matematyczności przyrody jest od dawna głoszona przez ks. Profesora Michała Hellera. Wprawdzie nie ma ona precyzyjnego sformułowania, ale wskazuje na pewną cechę (własność) przyrody, która sprawia, że przyroda poddaje się opisowi matematycznemu. [↑](#footnote-ref-5)
6. To założenie jest niezgodne z poglądem konstruktywistycznym. [↑](#footnote-ref-6)
7. Zobacz wyżej uwagi o presupozycji dla CT. [↑](#footnote-ref-7)
8. Tutaj znowu pojawia się związek z konstruktywizmem. [↑](#footnote-ref-8)
9. Kantowska intuicja zawierająca formy czasu i przestrzeni była swoistym rozwiązaniem problemu matematyczności przyrody. Mianowicie, to nie przyroda jest matematyczna, ale jej obraz w formach czasoprzestrzennych. [↑](#footnote-ref-9)
10. Argument niededukcyjny ex auctoritate: Church, Frege, Gödel i inni najwybitniejsi logicy uznawali istnienie bytów platońskich, zatem istnieją byty platońskie; wydaje mi się być dość mocny. [↑](#footnote-ref-10)
11. Podobny argument skierował przeciwko Kantowi. [↑](#footnote-ref-11)
12. Tak samo jak na przykład istnienie jest wypowiedzią o pojęciu – własnością pojęcia. [↑](#footnote-ref-12)
13. Por. C. Parsons, ‘Platonism and mathematical intuition in Kurt Gödel’s thought’, *Bulletin of Symbolic Logic*, 1(1995), ss. 44-74, szczególnie ss. 52-54. [↑](#footnote-ref-13)
14. Por. C. F. Kielkopf, ‘The intensionality of the predicate ‘\_\_\_is recursive’’, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 19(1978), ss. 165-173. [↑](#footnote-ref-14)
15. Por. A. Church, ‘The calculi of lambda-conversion’, Princeton 1941, ss. 2-3. [↑](#footnote-ref-15)
16. Dla Brouwera liczby i funkcje były subiektywnym konstrukcjami umysłu. [↑](#footnote-ref-16)
17. Stany umysłu są rodzajem relacji pomiędzy podmiotem myślenia, a odpowiednimi obiektami syntaktycznymi. [↑](#footnote-ref-17)