Studium przypadku: Church

Adam Olszewski
UPJP2, Copernicus Center

2.12.2012

Zdanie

Jestem tutaj przez przypadek.

Literatura

- Church, A. [1940]: *On the concept of a random sequence*, **Bulletin of American Mathematical Society** 46(1940): 254–260.
- Olszewski, A. [1999]: *Teza Churcha a platonizm*, **Zagadnienia Filozoficzne w Nauce** 24(1999): 96–100.
- Urbaniak, R. [2011]: *How Not To Use the Church-Turing Thesis Against Platonism*, **Philosophia Mathematica** (III) 19(2011): 74–89.

Schemat argumentu w oryginalnej postaci

- (i) (Teza Churcha) (założenie)
- (ii) (Platonizm) $\Rightarrow \neg$(Teza Churcha) (na podstawie opisanej funkcji)
- (iii) (Teza Churcha) $\Rightarrow \neg\neg$(Teza Churcha) (podstawienie prawa logiki)
- (iv) $\neg\neg$ (Teza Churcha) $\Rightarrow \neg$ (Platonizm) (z (ii) na podstawie prawa logiki)
- (v) $\neg$ (Platonizm) (z (iii), (iv), (i) i reg. odrywania)

Teza Churcha

Każda efektywnie obliczalna funkcja (w sensie intuicyjnym) jest rekurencyjna.

Klasa funkcji rekurencyjnych R

Jest to najmniejszy zbiór funkcji spełniający warunki:

1. Zawiera funkcje bazowe:
   - $\mathbf{O}(x) = 0$
   - $\mathbf{S}(x) = x + 1$
   - $\mathbf{I^n_i}(x_1, \ldots, x_n) = x_i, (1 \leq i \leq n)$
2. Jest zamknięty na składanie funkcji tzn. jeśli $g_1, g_2, \ldots, g_m, h$ są w R, to również f jest w R:
   - $f(x_1, \ldots, x_n) = h(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$
3. Jest zamknięty na schemat rekursji prostej tzn. jeśli g oraz h są w R, to również f jest w R:
   - $f(x_1, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, \ldots, x_n)$
   - $f(x_1, \ldots, x_n, y + 1) = h(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y)$
4. Jest zaknięty na schemat μ-rekursji tzn. jeśli g jest w R, to również f jest w R:
   - $\forall x_1, \ldots, x_n \exists y (g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0)$
   - $f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y (g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0.$

Pełniejsze sformułowanie przesłanek

- (**Machine**) A machine, let us call it M, generates randomly an infinite sequence of 0s and 1s (or: is in the process of generating such a sequence).
- (**Function**) A function f exists such that for any $x \in N$, $f(x) = y$ iff y is the number that M produces at step x.
- (**M⇒F**) [Function] follows from [Machine].
- (f**-Non-Turing**) Function f is not Turing-computable.
- (**Computable**) Function f is effectively computable.
- (**Non-CTT**) Zatem: There are effectively computable functions that are not Turing-computable.

Krytyka

- Prof. Urbaniak zauważa, że (**M**$\Rightarrow$**F**) (wraz z (**Function**)) są wyrazem platonizmu, oraz że argument ten uderza również w alternatywne filozofie matematyki np. pewną wersję nominalizmu oraz wersję TVR (obie twierdzą, że twierdzenia matematyki są prawdziwe).
- So (**Machine**), (**Function**), (**M**$\Rightarrow$**F**), (f-**Non-Turing**), (**Computable**) taken together entail (**Non-CTT**). By contraposition, (**CTT**) entails the negation of their conjunction. If (**CTT**) is to be upheld, at least one of the premises has to be rejected. Olszewski thinks (**M**$\Rightarrow$**F**) is the culprit.: $\neg\neg A \to A$, $\neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$.
- (f-**Non-Turing**) zależy od przyjętego pojęcia losowości (*randomness*). Wedle niektórych ujęć żaden ciąg losowy nie jest Turing-obliczalny (np. Church).

Krytyka c.d.

- Omawiany argument (gdyby działał) można by użyć przeciwko tezie Churcha.
- "(Machine2) A machine, let us call it M, generates randomly an infinite sequence of 0s and 1s (or: is in the process of generating such a sequence), and it so happens that the function corresponding to this process is not Turing-computable."
- Ciekawe spostrzeżenie Piccininiego
- Ważna (być może podstawowa) kwestia efektywnej obliczalności f (**Computable**?)
- "(**Repeatability**) (also called duplicability by Epstein and Carnielli) — for a machine to be usable it has to be possible to use it many times to compute the value for one and the same input."

Krytyka c.d.

- "(**Settability**) — for a machine to be usable, we have to be able to set it to the original state, so that when we run it (again) it will produce the same output for the same inputs (as Piccinini points out, resettability with the repeatability of input yields repeatability)."
- "It seems that instead of using the notion of effective computability (**Computable**) relies on a related but importantly different loose notion — that of there being a way to find out. This is a notion akin both to verifiability and falsifiability (in the neopositivist's sense) and effective computability, so that among computable functions are not only effectively computable ones, but also those whose value (for any given argument) in principle can be discovered by empirical means."

Krytyka c.d.

- Pojęcie efektywnej obliczalności użyte w (**Computable**) jest inne od tego o którym mówi teza Churcha.
- *W zasadzie obserwowalne* jest pewnym rodzajem idealizacji innego rodzaju niż w przypadku obliczalności.

Fizyczna wersja tezy Churcha

- Kwestia fizycznej wersji tezy Churcha (**FTC**)
- (**FTC**)$\Rightarrow$(**Computable**)?
- (**FTC**)[Teza M] (Kreisel 1965) Zachowanie dowolnego dyskretnego systemu fizycznego, ewoluującego zgodnie z lokalnymi prawami mechaniki jest rekurencyjne.
- Uwaga Urbaniaka: Another issue is that actual coin tossing is a macroscopic mechanical process which is in principle predictable, whose apparent unpredictability results from its sensitivity to initial conditions and our practical inability to establish those initial conditions with sufficient precision.

Ważna kwestia dotycząca tezy Churcha

Now a formal definition of effective calculability, for functions of positive integers, has been proposed by the author, and the adequacy of this definition to represent the **empirical** notion of an effective calculation finds strong support in a recent result of Turing. (Church, s. 133)

Pojęcie ciągu losowego wg. von Misesa

- Nieskończony ciąg $a_1, a_2, \ldots$ zer i jedynek jest ciągiem losowym, gdy spełnione są warunki:
- (1) Jeśli $f(r)$ jest liczbą jedynek pomiędzy pierwszymi r wyrazami ciągu $f = a_1, a_2, \ldots,$ to $f(r)/r$ zmierza do granicy p, gdy r zmierza do nieskończoności.
- (2) Jeśli $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ jest dowolnym nieskończonym podciągiem ciągu $a_1, a_2, \ldots,$ utworzonym przez usunięcie pewnych wyrazów drugiego ciągu zgodnie z pewną regułą, wedle której usunięcie bądź zachowanie wyrazu a_n zależy jedynie od n oraz wyrazów $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, oraz $g(r)$ jest liczbą jedynek wśród pierwszych r wyrazów ciągu $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots,$ to $g(r)/r$ zmierza do tej samej granicy p, gdy r zmierza do nieskończoności.

Pojęcie ciągu losowego Churcha

- Nieskończony ciąg $a_1, a_2, \ldots$ zer i jedynek jest ciągiem losowym, gdy spełnione są dwa warunki:
- (1) Jeśli $f(r)$ jest liczbą jedynek pomiędzy pierwszymi r wyrazami ciągu $f = a_1, a_2, \ldots$, to $f(r)/r$ zmierza do granicy p, gdy r zmierza do nieskończoności.
- (2) Jeśli ϕ jest dowolną efektywnie obliczalną funkcją określoną w liczbach naturalnych, jeśli $b_1 = 1$, $b_{n+1} = 2b_n + a_n$, $c_n = \phi(b_n)$, oraz liczby n takie, że $c_n = 1$ tworzą w porządku wielkości nieskończony ciąg $n_1, n_2, \ldots$, oraz $g(r)$ jest liczbą jedynek wśród pierwszych r wyrazów ciągu $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$, to $g(r)/r$ zmierza do tej samej granicy p, gdy r mierza do nieskończoności.

Kwestia (f-**Non-Turing**)

- Czy funkcja f nie jest obliczalna przez żadną maszynę Turinga?
- Trudno sobie wyobrazić matematyczny dowód jej Turing-obliczalności.

Miara zbioru funkcji efektywnie obliczalnych

- Zbiór miary zero := (w teorii miary) zbiór mierzalny rozważanej przestrzeni mierzalnej $< X, \mathcal{F} >$ *nieistotny* z punktu widzenia zadanej na niej miary $\mu \colon \mathcal{F} \to [0, \infty]$, tzn. dowolny zbiór $X \in \mathcal{F}$ dla którego zachodzi warunek: $\mu(X) = 0$. Jeśli przestrzeń mierzalna jest taka, że każdy podzbiór zbioru miary zero jest mierzalny, to zbiory miary zero są zaniedbywalne i odwrotnie.
- Jeśli ustalimy jakąś własność W przysługującą wyłącznie funkcjom efektywnie obliczalnym i zakładając, że ten zbiór jest miary zero, to mówimy, że własność W zachodzi *prawie nigdzie*, a równocześnie $\neg W$ zachodzi *prawie wszędzie*. W szczególności własność *być funkcją rekurencyjną* zachodzi *prawie nigdzie* lub używając jezyka teorii prawdopodobieństwa – zachodzi *prawie nigdy*.
- Tutaj pojawia się znowu teza Churcha. Gdyż założenie o tym, że zbiór funkcji efektywnie obliczalnych ma miarę zero jest, konsekwencją tezy Churcha. Co wcale nie jest takie oczywiste.

Luźne uwagi

- Zatem (f-**Non-Turing**) jest bardzo prawdopodobne, choć rzeczywiście nie jest pewne. Jeśli fałszywe, to **przez przypadek**.
- Z Aksjomatu Wyboru wynika istnienie zbiorów liczb rzeczywistych, które są niemierzalne w sensie Lebesgue'a.
- Jeśli przyjmie się negację Aksjomatu Wyboru w postaci tzw. Aksjomatu Determinacji, to każdy podzbiór zbioru liczb rzeczywistych jest mierzalny.
- Pomiędzy Aksjomatem Determinacji a tezą Churcha istnieje intymny związek.

Możliwość zdefiniowania *przypadku* w terminach modalnych

- (Teofrast) $Cp =_{df} \Diamond p \wedge \Diamond \neg p$
- Możliwość $\Diamond$ rozumiana jest tutaj w jednym z dwóch sensów Artystotelesowskich jako dopełnienie *niemożliwości*.

Zakończenie

Dziękuję za uwagę i cierpliwośc !!!