Od redakcji

Szanowni Czytelnicy!

Z dużą satysfakcją piszę wstęp do tego szczególnego numeru *Semina Scientiarum* — czasopisma naukowego redagowanego przez studentów. Satysfakcja bierze się stąd, iż niemal wszyscy Autorzy artykułów niniejszego numeru byli słuchaczami mojego wykładu monograficznego na temat niezupełności arytmetyki; bądź to w roku akademickim 2002/2003, bądź w roku 2003/2004. Owe artykuły są właściwie owocem wspomnianego wykładu. W pierwszej części wstępu poczynię kilka uwag natury ogólnej, nawiązując do zasadniczej myśli mego wykładu, w drugiej zaś zaprezentuję artykuły.

1.

Oba twierdzenia Gödla i fenomen niezupełności, choć dobrze znane społeczności logicznej i matematycznej, nie zostały jeszcze odpowiednio 'przetrawione', aby stać się pożywką intelektualną dla miłośników mądrości. Mam wrażenie, że w środowisku logików istnieje niepisane prawo 'zabraniające' zajmować się filozoficznymi interpretacjami twierdzeń Gödla. Znana jest anegdota o Alonzo Churchu, który mając wątpliwości, czy dać zaliczenie pewnemu studentowi, miał o nim powiedzieć: *Byłbym skłonny dać mu zaliczenie, gdyby on był skłonny obiecać, że nigdy nie napisze żadnego artykułu o filozoficznym znaczeniu Twierdzenia Gödla*[1]. Wydaje się jednak, że (ze względów czysto statystycznych) musi się ukazać wystarczająco dużo prac filozoficznych na ten temat, aby wśród nich znalazły się prace wybitne.

---

[1] C. A. Anderson and M. Zelěny (eds.), *Logic, Meaning and Computation,* Kluwer 2001, s. xii.

Według mnie najważniejszymi osiągnięciami logicznymi dwudziestego wieku o mocnym wydźwięku filozoficznym są:

(H) Stworzenie metody formalno–aksjomatycznej przez Hilberta.

(TS) Twierdzenie Skolema–Löwenheima.

(TT) Twierdzenie Tarskiego o niedefiniowalności prawdy.

(TG) Twierdzenia Gödla o niezupełności (TG1, TG2).

(TC) Teza Churcha.

Ścisłe twierdzenia (TS), (TT) i (TG) w sposób zaskakujący ograniczają metodę Hilberta obiecująco rozwiniętą przez Tarskiego (definicja prawdy) i Gödla (twierdzenie o pełności). (TC) jest kolejnym 'zaskoczeniem' działającym na korzyść (H). O ile (TC) jest prawdziwa, to przynajmniej dla jednego pojęcia intuicyjnego — 'funkcji obliczalnej przez algorytm' — da się podać adekwatną i formalną charakterystykę. Dodatkowo pomiędzy (TG1) a (TC) zachodzi następujący nietrywialny związek[2]:

$$\neg(TG1) \Rightarrow \neg(TC)$$

(TC) jest jedynie tezą, bo nie posiada dowodu. Niektórzy sądzą, że jej ścisły dowód nie jest możliwy. Wiadomo natomiast, jak (TC) sfalsyfikować. Osobiście przypuszczam, że (TC) jest twierdzeniem pewnej nieistniejącej jeszcze nauki, na gruncie której znajdzie empiryczne uzasadnienie. Ma to być nauka o podmiocie i do tego powinna mieć charakter empiryczny. Użyty powyżej zwrot 'mocny wydźwięk filozoficzny' w odniesieniu do osiągnięć logiki można teraz wyrazić następująco: tym wynikom logicznym odpowiadają twierdzenia nauki o podmiocie.

[2] Nazywam go *nietrywialnym* ponieważ nie zakłada się w dowodzeniu tego okresu warunkowego fałszywości (TG1). Por. S. C. Kleene, „Reflections on Church's Thesis", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 28 (1987), ss. 490–498.

Dobrze rozumiem, że ktoś może pomyśleć, iż autor tych zdań jest 'nawiedzony'. Dlatego wesprę się autorytetem wielkiego Hilberta. Już w odległym roku 1905, w nieopublikowanym wykładzie pt. *Logische Principien des mathematischen Denkens*, postulował on istnienie nauki metodologicznie wcześniejszej od matematyki i nawet sformułował w przybliżeniu jeden z jej aksjomatów. Ów aksjomat nazwał *Aksjomatem Myślenia* (*Aksjomatem Istnienia Inteligencji*). Wydaje się, że jego treść można wyeksplikować w następujący sposób[3]:

- Ja istnieję i myślę rzeczy (czy też o rzeczach).
- Ja mogę te myślane rzeczy oznaczać za pomocą prostych znaków.
- Ja mogę te znaki zawsze jednoznacznie rozpoznać.
- Ja myśląc operuję pomyślanymi rzeczami za pomocą ich oznaczeń.
- Ja mogę prawa tego operowania poznać przez samo–obserwację.
- Ja mogę te prawa zupełnie opisać.

Ze względu na (TG1) punkt szósty (i czwarty) podanej wyżej Hilbertowskiej charakteryzacji podmiotu wydaje się trudny do zaakceptowania. Z dowodu (TG1) i koncepcji maszyny Turinga można wywieść taki oto wniosek[4]:

(TG1') *Dla dowolnej maszyny Turinga TM, istnieje taka maszyna Turinga TM1, która zastosowana do maszyny Turinga TM (która ma wyliczać same prawdy arytmetyki i żadnego fałszu) znajdzie prawdę arytmetyki opuszczoną przez TM.*

[3]Aksjomat ten wymaga jeszcze wielu badań.

[4]K. Gödel, „On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems. I", [w:] J. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel*, ss. 596–616; S. C. Kleene, *Introduction to metamathematics*, Van Nostrand 1952, pragraf 60.

A stąd już tylko krok do twierdzenia, iż:

(TG1”) *Podmiot myślenia Hilberta nie istnieje.*

Ale (TG1”) nie należy do logiki (metalogiki), lecz do owej postulowanej nauki.

2.

Numer czasopisma, który oddajemy do rąk Czytelnika, zawiera jedenaście artykułów oraz cztery recenzje. Omówię je krótko w kolejności, w jakiej zostały opublikowane.

Artykuły zostały ułożone w taki sposób, aby najpierw przybliżyć Czytelnikowi samą postać Kurta Gödla. Czyni to znakomicie Pan Tomasz Furman, opisując dzieje życia i główne fazy rozwoju naukowego austriackiego logika. W dużej mierze artykuł ten opiera się na książce Dawsona, której recenzja zamieszczona jest także w tym numerze *Semina Scientiarum.*

Siostra Teresa Obolevitch zapoznaje nas z ważnymi (i z dzisiejszej perspektywy ’nieortodoksyjnymi’) poglądami filozoficznym Gödla. W szczególności rozważane są założenia filozoficzne w oparciu o które tworzył Gödel i postawione zostaje pytanie o implikacje filozoficzne twierdzeń o niezupełności.

Artykuł Pani Anny Brożek jest próbą odpowiedzi na pytanie: czy i w jakim sensie twierdzenia Gödla zadały śmiertelny cios programowi Hilberta? Możemy prześledzić intuicyjną zawartość dowodu pierwszego twierdzenia o niezupełności i dowiedzieć się, dlaczego Gödel nie uważał, że zanegował program Hilberta całkowicie. Pani Brożek prezentuje także recenzję książki K. Wójtowicza *Platonizm matematyczny.*

Zdecydowanie najbardziej formalny charakter ma artykuł Pana Leszka Wrońskiego, w którym elegancko podane zostały ścisłe dowody obu twierdzeń Gödla z warunków Bernaysa–Löba oraz pokazano na przykładzie, jakie kłopoty formalne mogą wyniknąć z nieuważnego posługiwania się formułą wyrażającą niesprzeczność arytmetyki[5].

Następny artykuł rozpoczyna serię pięciu prac, w których młodzi filozofowie prezentują swoje własne uwagi na temat tytułowych twierdzeń.

I tak, Pan Robert Piechowicz zastanawia się nad tym, jakie cechy twierdzeń matematycznych sprawiają, ze twierdzenie staje się atrakcyjne matematycznie. Rozważa trzy cechy twierdzenia Gödla: kontekst filozoficzny, ogólność twierdzenia i jego paradoksalność. Ten sam Autor w dziale recenzji omawia niedawno wydaną książkę S. Krajewskiego o twierdzeniu Gödla.

Pani Anna Tomaszewska rozważa tzw. argument Lucasa przeciwko mechanicyzmowi, czyli jedną z najczęściej omawianych filozoficznych konsekwencji twierdzeń Gödla. Przytacza zarzuty najczęściej formułowane pod adresem Lucasa i w szczególności rozważa jeden z nich wykazujący, że argument Lucasa jest sprzeczny.

Pan Paweł Rojek zapoznaje nas z rozważaniami rosyjskiego logika i filozofa W. I. Moisiejewa na temat podobnej struktury generowania zbiorów w antynomii Russella i zdań gödlowskich. Autor próbuje zastosować te rozważania do rozważań z filozofii tradycyjnej – dokładnie filozofii Absolutu[6].

Artykuł Pana Pawła Polaka ma szczególny charakter. Prezentuje samodzielne spostrzeżenia na temat: jakie przymioty musi posiadać podmiot, aby stworzyć system formalny? Jest to zagadnienie, które zaproponowałem Autorowi. Myślę, że w kontekście pierwszej części niniejszego wstępu łatwiej będzie zrozumieć sens tych ciekawych spostrzeżeń.

Artykuł autorstwa Pana Wojciecha Załuskiego omawia rolę, jaką odegrały Aksjomat Determinacji i Aksjomat Wyboru w rozważaniach na temat Hipotezy Continuum. Hipoteza ta jest zdaniem

[5] Przy czytaniu trzeba zwrócić uwagę na to, że w pracy termin 'funkcje rekurencyjne' znaczy 'funkcje częściowo rekurencyjne'.

[6] Praca ta została napisana w czasie pobytu naukowego Autora na uniwersytecie w Woroneżu (Rosja).

niezależnym od aksjomatyki ZFC, a zatem szczególnym przykładem dla pierwszego twierdzenia Gödla. Artykuł ma za zadanie popularyzację tych bardzo trudnych zagadnień.

Pani Maria Piesko w kolejnym artykule próbuje spojrzeć na wyniki Gödla w kontekście 'programu' Leibniza. Pojawia się przy tej okazji ciekawy wątek ujęcia zdań gödlowskich w takich kategoriach filozoficznych jak *a priori* oraz *analityczność*. Ta sama Autorka w jednej z recenzji bez żadnej litości rozprawia się z książką J. Casti, W. Pauli, *Gödel. Życie i logika.*

W ostatnim artykule Pan Ryszard Philipps z szerokiej perspektywy omawia spór o to, czy umysł jest maszyną, czy też nią nie jest. Bazuje przy tym na twierdzeniach limitacyjnych, do których należy (TG1) i (TG2).

Na koniec chciałbym podkreślić, że Autorzy prac – młodzi filozofowie – studiują zagadnienia bardzo trudne, wymagające dużej staranności i pracowitości. Można przypuszczać, że ludzie ci to przyszłe pokolenie profesorów, którzy za jakiś czas będą prowadzić własne katedry. Ich dynamiczny rozwój intelektualny jest dobrym prognostykiem dla polskiej filozofii, z czego się bardzo cieszę. Chcę w tym miejscu podziękować im za możliwość i zaszczyt prowadzenia dla nich zajęć.

Adam Olszewski

Semina ☐ Nr 3
Scientiarum 2004

Tomasz Furman

Życie „Pana Warum”

Kurt Gödel już jako dziecko wykazywał się wyjątkową dociekliwością i bystrością umysłu. Z tego powodu, gdy miał cztery lata, jego rodzice oraz starszy brat nadali mu przezwisko „Pan Dlaczego” (*der Herr Warum*). Kurt nie tylko bezustannie zadawał pytania, co jest charakterystyczne dla większości dzieci, ale nigdy z tego nie wyrósł. Właściwa dzieciom ciekawość świata oraz ciągłe poszukiwanie przyczyn zjawisk, które dla innych wydają się oczywiste, być może najtrafniej oddają jego nastawienie do świata. Wśród pytań stawianych przez małego Kurta często pojawiały się te, które większość dorosłych uznaje za nie mające odpowiedzi. Jednakże takie tłumaczenie Gödel od najmłodszych lat stanowczo odrzucał. Głęboko wierzył bowiem w ukryty pod powierzchnią pozornie przypadkowych zjawisk wewnętrzny porządek świata. Wśród znalezionych już po jego śmierci zapiskaów znajduje się lista zasad, które uważał za najbardziej fundamentalne. Pierwsza z nich mówi: *Świat jest racjonalny*[1]. To przekonanie Gödel żywił przez całe swoje życie i być może właśnie ono skierowało jego uwagę w stronę matematyki, którą uważał za egzemplifikację rozumności i porządku[2].

Na wyjątkową ze wszech miar osobę Kurta Gödla należy jednak spojrzeć również od innej strony. Oto bowiem genialny logik, matematyk, ale także fizyk i filozof okazał się być prywatnie człowiekiem naiwnym, zamkniętym w sobie, w wielu wypadkach uzależnionym od opieki i dobroci najbliższych. Bez wątpienia wybitne

[1] J. W. Dawson, *Logical Dillemas.The Life and Work of Kurt Gödel*, A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts 1997, s. 1.

[2] Zob. *ibidem*, s. 2.

osiągnięcia naukowe Gödla nie byłyby możliwe gdyby nie miłość i poświęcenie jego żony Adele oraz niewielkiego, aczkolwiek oddanego grona najbliższych przyjaciół. Nie wolno zapomnieć, że to właśnie im w wielu wypadkach Gödel zawdzięczał życie, wreszcie, że to oni musieli znosić trudności życia z geniuszem, jego rozmaite dziwactwa oraz skutki choroby psychicznej.

Brno

Niemiecka z pochodzenia rodzina Gödlów od co najmniej czterech pokoleń mieszkała na Morawach, będących wówczas częścią monarchii austro–węgierskiej, z czego część w Brnie — ówczesnym centrum przemysłu włókienniczego. Gödlowie pracowali głównie jako handlowcy, ale nigdy nie odnosili większych sukcesów — z jednym wszakże wyjątkiem: Rudolf August Gödel (ojciec Kurta) przechodząc kolejne stopnie kariery został w końcu współwłaścicielem fabryki tekstyliów. 22 kwietnia 1901 poślubił Marianne Handschuh, z którego to związku na świat przyszli dwaj synowie: Rudolf — 7 lutego 1902 r. oraz Kurt — 28 kwietnia 1906 r. Ojciec Kurta był katolikiem, matka protestantką, niemniej żadne z nich nie było zbyt religijne, co nie pozostało bez wpływu na religijność dzieci — Rudolf został agnostykiem, Kurt zaś w pewnym przynajmniej sensie wierzącym (pod koniec życia swoją wiarę określił jako *raczej teistyczną niż panteistyczną, bardziej w duchu Leibniza niż Spinozy*[3]). Warunki, w jakich przyszło dorastać młodym chłopcom były bardzo komfortowe — dzięki stanowisku ojca Gödlowie mogli sobie pozwolić na zatrudnienie pomocy domowej, nauczycielki dla synów, a także na liczne wyjazdy do kurortów wypoczynkowych, które dużo później z nostalgią wspominał dojrzały już Kurt.

Obaj chłopcy od samego początku byli silnie emocjonalnie związani z matką, z którą spędzali większość czasu (Kurt po emigracji do Stanów Zjednoczonych aż do jej śmierci w 1966 r. utrzymywał z nią ożywioną korespondencję listową). Ojciec, z powo-

[3] *Ibid.*, s. 6.

du interesów, w domu przebywał o wiele rzadziej, ale mimo to wspominany był ciepło jako ten, który zapewnił rodzinie dobrobyt, a dorastającym synom wszechstronną edukację.

W roku 1912 Kurt Gödel rozpoczął naukę w prywatnej, protestanckiej szkole podstawowej. Był wzorowym uczniem, otrzymywał wyłącznie najwyższe stopnie, choć stosunkowo często ze względów zdrowotnych zmuszony był opuszczać lekcje. Prawdopodobnie już wtedy należy szukać początków tak znamiennej dla całego jego życia hipochondrii. Jako chłopiec, ale też później jako dojrzały mężczyzna, miał w zwyczaju dużo czytać o dolegliwościach, na które zapadał i przyjmować — oczywiście wbrew opiniom lekarzy — wyłącznie najgorsze scenariusze rozwoju choroby.

Spokojnego i systematycznego życia Gödlów nie zakłócił nawet wybuch I wojny światowej. Rudolf August nie został powołany do służby wojskowej, dzięki czemu mógł się nadal troszczyć o swoją rodzinę.

W 1916 r. Kurt ukończył szkołę podstawową i został zapisany przez rodziców do ośmioletniego gimnazjum w Brnie, cieszącego się opinią jednego z najlepszych w całym Cesarstwie, a potem także w Czechosłowacji. W ciągu lat spędzonych w szkole Kurt miał zaledwie dwóch bliskich kolegów. Większość swojego czasu poświęcał nauce, w szczególności matematyce, fizyce i językom obcym, choć ze wszystkich przedmiotów otrzymywał najwyższe stopnie[4]. W roku 1924 ukończył gimnazjum jako jeden z najlepszych uczniów.

Sam Gödel o swojej szkole nie miał zbyt wysokiego mniemania. W szczególności, jak twierdził[5], pobyt w gimnazjum nie miał wpływu na rozbudzenie jego zainteresowań matematyką oraz naukami ścisłymi. Takim przełomowym wydarzeniem miała być natomiast rodzinna wycieczka do Marienbadu w 1921 r., podczas której zapoznał się z biografią i teorią barw Goethego, a także jego konfliktem z Newtonem.

---

[4]Raz tylko zdarzyło się, że na świadectwie miał ocenę niższą od najwyższej (i to z matematyki!).

[5]Zob. J.W. Dawson, dz. cyt., s. 18.

Wiedeń

Jesienią 1924 r. Gödel wstąpił na Uniwersytet w Wiedniu z zamiarem studiowania fizyki. Ponieważ jednak niemiecki model uniwersytetu, obowiązujący także w Wiedniu, pozwalał studentom na dużą swobodę w doborze przedmiotów, prawdopodobnie już na pierwszym albo drugim roku studiów Kurt zdecydował się zająć bliżej matematyką. Stało się to pod wpływem wykładów profesora Philippa Furtwnglera z zakresu teorii liczb, które cieszyły się wówczas ogromną popularnością i gromadziły nierzadko po kilkuset słuchaczy.

Gödel w czasie całych studiów związany był wyłącznie z Uniwersytetem w Wiedniu, chociaż powszechnym zwyczajem wśród studentów było wtedy pobieranie nauk na różnych uniwersytetach (na przykład współczesny Gödlowi Carl Hempel studiował kolejno w Getyndze, Heidelbergu, Berlinie i Wiedniu). Motywy Gödla były prawdopodobnie natury praktycznej — w Wiedniu wynajmował, wspólnie ze studiującym medycynę bratem, mieszkanie, tutaj miał krewnych, którzy mogli mu służyć pomocą w trudnych sytuacjach, a poza tym niedaleko leżało rodzinne Brno.

Z zachowanych do dzisiaj materiałów wiadomo, że Gödel w ciągu pierwszych lat studiów uczęszczał na wykłady Heinricha Gomperza z historii filozofii, interesował się kinetyczną teorią materii, czytywał pisma Euklidesa, Riemanna, Lagrange'a, Eulera, jak również *Metaphysiche Anfangsgrnde der Naturwissenschaft* Kanta. Uczestniczył także w cotygodniowym seminarium prowadzonym przez filozofa Moritza Schlicka, poświęconym *Introduction to Mathematical Philosophy* Bertranda Russella.

Jak przyznał później Gödel, dwie osoby w sposób szczególny wpłynęły na kierunek jego zainteresowań, a następnie samodzielnej pracy badawczej: wspomniany Philipp Furtwngler oraz Hans Hahn, wybitny matematyk, specjalista w dziedzinie topologii i analizy funkcjonalnej, którego uwaga od początku lat dwudziestych skupiła się na filozofii i podstawach matematyki. To właśnie

Hahn odegrał decydującą rolę w sprowadzeniu do Wiednia Moritza Schlicka w 1922 r. i to pod jego kierunkiem napisał swój doktorat Gödel. Wreszcie, co być może najbardziej znaczące, należał on do niewielkiej grupy osób, nazwanej potem Kołem Wiedeńskim (od manifestu ogłoszonego w 1929 r.), inspirowanych pozytywistyczną filozofią Ernsta Macha, która co tydzień spotykała się na dyskusje w jednej z wiedeńskich kawiarni[6]. Nieformalnym przywódcą grupy był Schlick, chociaż to Hahn był tym, który skierował uwagę jej członków na kwestie logiczne. Z czasem grono dyskutantów powiększało się i dzięki naleganiom ze strony dwóch studentów: Friedricha Waismanna i Herberta Feigla, Schlick zgodził się nadać spotkaniom bardziej formalny charakter. Odbywały się one nadal w czwartki wieczorem, ale już nie w kawiarni, tylko w uniwersyteckim budynku Instytutu Matematyki.

Na spotkania Koła Wiedeńskiego można się było dostać wyłącznie dzięki zaproszeniom. Kurta Gödla zaprosił w 1926 r. zapewne Hahn albo Schlick, gdy dyskutowany był po raz drugi *Tractatus logico — philosophicus*Wittgensteina. Od tego czasu aż do 1928 r. Gödel był stałym uczestnikiem posiedzeń Koła. Po 1928 r. pojawiał się już tylko sporadycznie.

W latach późniejszych Gödel zdecydowanie sprzeciwiał się przypisywaniu mu poglądów Koła Wiedeńskiego. Na spotkaniach nigdy jednak nie krytykował otwarcie głoszonych tam tez. W ogóle rzadko zabierał głos, wolał raczej przysłuchiwać się i jedynie od czasu do czasu wtrącać uwagi. Mimo to Koło odegrało znaczącą rolę w jego życiu. Po pierwsze, dzięki niemu nawiązał wiele znajomości, które okazały się owocne dla jego późniejszej pracy naukowej, po drugie zaś, lansowane przez Koło rozwiązania określonych problemów — głównie filozoficznych — stały się punktem wyjścia dla jego własnych przemyśleń i poszukiwań[7].

---

[6]Pozostali to m. in. Moritz Schlick, Richard von Mises, Karl Menger, Otto Neurath, jego żona Olga, Rudolf Carnap oraz Philipp Frank.

[7]Zob. J.W. Dawson, dz. cyt., ss. 26 nn.

Rok 1929 przyniósł rewolucyjne zmiany w życiu Gödla: 23 lutego niespodziewanie w wieku 54 lat zmarł jego ojciec, 6 czerwca otrzymał austriackie obywatelstwo, a dokładnie miesiąc później obronił swoją pracę doktorską, w której dowiódł twierdzenia o pełności[8] dla logiki pierwszego rzędu. Wreszcie w tym samym mniej więcej czasie poznał swoją przyszłą żonę — Adele Nimbursky z domu Porkert.

Nie wiadomo dokładnie kiedy Gödel bliżej zainteresował się logiką i podstawami matematyki, porzucając dotychczasowe studia nad jej bardziej klasycznymi dziedzinami, jak na przykład teorią liczb czy funkcji. Nie wiadomo także, co zwróciło jego uwagę na problem pełności logiki pierwszego rzędu, postawiony przez Hilberta i Ackermanna w książce z 1928 r. pt. *Grundzge der theoretischen Logik*, a następnie przez Hilberta na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Bolonii we wrześniu 1928 r. Nie jest również do końca jasne, jaką rolę przy pisaniu dysertacji Gödla odegrał jego promotor Hans Hahn. W rozmowie z Hao Wangiem Gödel stwierdził, że całą pracę ukończył zanim w ogóle pokazał ją Hahnowi, a jednocześnie już w pierwszym przypisie opublikowanego doktoratu dziękował Hahnowi za wiele cennych wskazówek i okazaną pomoc w czasie pisania rozprawy[9].

Po uzyskaniu doktoratu Gödel zaczął poważnie myśleć o kontynuowaniu pracy naukowej na Uniwersytecie. Procedura wymagała jednak, aby najpierw napisał habilitację. Dlatego też rok 1930 poświęcił w znacznej mierze próbom upowszechnienia wyniku swojego doktoratu oraz poszukiwaniom tematu rozprawy habilitacyjnej.

Dowód twierdzenia o pełności był bez wątpienia dużym osiągnięciem, niemniej w środowisku logików nie wywołał rewolucji. Po pierwsze dlatego, że było to rozwiązanie, jakiego wszyscy się spodziewali, po drugie zaś zastosowana przez Gödla metoda do-

---

[8] W używanym tutaj sensie pełność systemu formalnego oznacza, że każda prawdziwa formuła tego systemu może zostać w skończonej liczby kroków wyprowadzona z jego aksjomatów.

[9] Zob. J. W. Dawson, dz. cyt., s. 54.

wodzenia była podobna do tej zastosowanej już wcześniej przez Skolema i Löwenheima[10]. Aby zwrócić na siebie uwagę Gödel potrzebował spektakularnego sukcesu.

Po raz pierwszy o odkrytych przez siebie twierdzeniach o niezupełności[11] Gödel napomknął 26 sierpnia 1930 r. w rozmowie z Carnapem, Feiglem i Waismannem. Głównym tematem spotkania był planowany na wrzesień wyjazd do Królewca na Międzynarodową Konferencję poświęconą epistemologii nauk ścisłych (Carnap i Waismann mieli tam wygłosić odczyty, Gödel zaś zaprezentować wynik swojego doktoratu). Z przebiegu dyskusji i późniejszego zachowania Carnapa jasno wynika, że zupełnie nie zrozumiał on wtedy doniosłości odkrycia Gödla.

Konferencja w Królewcu trwała trzy dni, od 5 do 7 września 1930 r. Pierwszego dnia zaprezentowano trzy dominujące stanowiska w filozofii matematyki: logicyzm, intuicjonizm i formalizm (odczyty mieli odpowiednio Rudolf Carnap, Arend Heyting i John von Neumann). Gödel o swoim doktoracie mówił nazajutrz przez około 20 minut, zaś ostatniego dnia konferencji miała miejsce otwarta dyskusja podsumowująca. Wtedy to właśnie Gödel niespodziewanie oznajmił, że *można podać przykłady zdań [...], które choć są intuicyjnie prawdziwe, to nie można ich dowieść w formalnym systemie matematyki klasycznej*[12]. Spośród obecnych na sali prawdopodobnie tylko słynący ze swej bystrości umysłu von Neumann od razu zrozumiał sens wypowiedzi Gödla, którego zaraz po zakończeniu konferencji poprosił o bliższe wyjaśnienia.

W znacznym stopniu to właśnie dzięki von Neumannowi odkrycie Gödla stało się szerzej znane. W wygłaszanych przez siebie wykładach w Europie oraz Ameryce często wspominał o młodym matematyku z Wiednia, który dokonał rewolucyjnego odkrycia z zakresu podstaw matematyki. Ostatecznie von Neumann został

[10] Zob. J. W. Dawson, dz. cyt., s. 60.

[11] System formalny jest zupełny, jeśli dla każdego sensownego zdania danego języka, albo samo to zdanie, albo jego negacja posiadają w ramach systemu sformalizowany dowód.

[12] *Ibid.*, s. 69.

jednym z najbliższych przyjaciół Gödla oraz jego opiekunem po emigracji do Stanów Zjednoczonych.

Gödlowskie twierdzenia o niezupełności wykazały, jak się dziś przyjmuje, ograniczoność epistemologiczną metody dedukcyjnej[13]. Pierwsze twierdzenie głosi, że *każdy system aksjomatyczny, zawierający w sobie arytmetykę liczb naturalnych i niesprzeczny, musi być niezupełny*[14], drugie, że *dowód niesprzeczności teorii aksjomatycznej zawierającej arytmetykę liczb naturalnych nie może być przeprowadzony w metamatematyce nie operującej środkami wykraczającymi poza te, które mieszczą się w samej rozważanej teorii*[15]. Wyniki Gödla wywołały prawdziwe „trzęsienie ziemi" w matematyce. Przede wszystkim zaś podważyły stanowisko Hilberta, który był przekonany o zupełności arytmetyki oraz twierdził, *że w metamatematyce, przy pomocy środków finitystycznych, można będzie wykazać w sposób bezwzględny, niesprzeczność arytmetyki liczb naturalnych*[16].

Jednakże mimo entuzjastycznego przyjęcia rewolucyjnych twierdzeń o niezupełności przez von Neumanna, spotkały się one z silną opozycją ze strony znacznej części matematyków, i to tych najwybitniejszych (m. in. Zermelo). Jedną z przyczyn był fakt, że Gödel nie podał ścisłego dowodu drugiego ze swych twierdzeń[17]. Ale fundamentalne znaczenie miały w tej kwestii bez wątpienia przekonania filozoficzne i pragnienie ich obrony za wszelką cenę.

Gödel po raz kolejny w swojej krótkiej karierze naukowej doznał bolesnego rozczarowania. Niedługo po opublikowaniu w 1931 r. swojej rewolucyjnej pracy popadł w głęboką depresję. Jego brat i matka obawiając się, że może popełnić samobójstwo, umieścili go pod przymusem na okres kilku tygodni w sanatorium w Purkersdorf niedaleko Wiednia.

[13] J. Dadaczyński, *Filozofia matematyki w ujęciu*historycznym, OBI – Kraków, Biblos – Tarnów, 2000, s. 352.

[14] *Ibid.,* s. 339.

[15] *Ibid.*

[16] *Ibid.*

[17] Stało się to dopiero w 1939 r. za sprawą Hilberta i Bernaysa.

Po powrocie na uniwersytet Gödel zabrał się intensywnie do pracy. Brał udział w prowadzonym przez Hahna seminarium z logiki matematycznej, opublikował kilka artykułów, wreszcie 13 stycznia 1933 r. obronił pracę habilitacyjną, której tematem były naturalnie twierdzenia o niezupełności.

W tym samym czasie w Europie przebywał Oswald Veblen, amerykański matematyk zaangażowany w projekt utworzenia w Princeton w Stanach Zjednoczonych elitarnego ośrodka badawczego — Institute for Advanced Study (IAS). Odkrycia Gödla zrobiły na nim tak wielkie wrażenie, że zaproponował mu przyjazd do Princeton już w pierwszym roku funkcjonowania Instytutu, tj. na przełomie lat 1933 i 1934.

Sytuacja polityczna w Austrii była wówczas bardzo napięta. Nasilały się wpływy ruchów faszystowskich, w parlamencie nie było porozumienia, co do sposobów przeciwdziałania kryzysowi ekonomicznemu państwa, wprowadzono cenzurę i zakazano publicznych zgromadzeń. Jednak zanim Gödel, przyjąwszy zaproszenie Veblena, wyjechał do Ameryki, zdążył jeszcze skorzystać z nowo nabytego prawa do nauczania na uniwersytecie i w maju 1933 r. rozpoczął krótki cykl wykładów o podstawach arytmetyki.

IAS było instytucją naukową powołaną i finansowaną przez milionerów — filantropów: Louisa Bambergera i jego siostrę Felix Fuld. Formalnie utworzona w 1930 r. faktycznie zaczęła funkcjonować w trzy lata później. Jej celem było prowadzenie specjalistycznych badań, początkowo w dziedzinach matematyki i fizyki. IAS oprócz tego, że zatrudniał stałych pracowników, zapraszał także na stypendia najwybitniejszych naukowców z całego świata. Od 1933 r. pracowali tam m. in. Albert Einstein, James Alexander, Heramnn Weyl, Wolfgang Pauli, Paul Bernays, Alozo Church oraz wspomnieni już John von Neumann i Oswald Veblen. Gödel do przybył Princeton w październiku tego roku i pozostał tam przez najbliższe osiem miesięcy, zapoznając się przy okazji z najnowszymi osiągnięciami teorii względności i mechaniki kwantowej.

W międzyczasie wydarzenia w Austrii szybko tempa. W lipcu 1934 r. naziści zamordowali kanclerza Engelberta Dollfussa, a na uczelniach władzę przejęli nacjonaliści. Przez nich z uniwersytetu w Wiedniu za żydowskie pochodzenie wyrzucono profesora Gomperza, na którego wykłady z historii filozofii uczęszczał wcześniej Gödel.

Po powrocie z Ameryki Gödel znaczną część swojego czasu poświęcił fizyce, głównie pracom Eddingtona, Plancka, Macha, Borna, Schrödingera i Diraca. Równocześnie żywo interesował się filozofią (szczególnie Leibnizem i Husserlem) oraz prowadził wykłady. W tym samym czasie osiągnął kolejny znaczący sukces w logice, udowodnił mianowicie niesprzeczność aksjomatu wyboru i uogólnionej hipotezy continuum z innymi aksjomatami teorii mnogości[18], ale z publikacją zwlekał do 1937 r.

W 1935 r. po raz kolejny wyjechał do Princeton, ale z powodów zdrowotnych musiał prawie natychmiast wrócić. Kłopoty ze zdrowiem, głównie na tle nerwowym, okazały się poważniejsze niż można było przypuszczać. W efekcie prawie cały 1936 r. musiał spędzić w sanatoriach. Termin powrotu do pracy dwukrotnie przesuwał i ostatecznie wykłady o aksjomatyce teorii mnogości rozpoczął dopiero latem 1937 r.

Atmosfera, jaka panowała wówczas na uniwersytecie, nie sprzyjała pracy naukowej. Wśród wykładowców i studentów dominowali ludzie o sympatiach nazistowskich a sytuacja polityczna w kraju była wciąż bardzo napięta. Gödel, jako jedyny z dawnej kadry logików, pozostał wtedy w Wiedniu (Hahn zmarł jeszcze w 1934 r., Schlick został zamordowany w 1936 r., a Carnap i Menger wyemigrowali do Stanów Zjednoczonych), ale i on wyjechał do Princeton, gdy po przyłączeniu Austrii do Rzeszy w 1938 r. stracił prawo nauczania na uniwersytecie. Przed wyjazdem zdążył jeszcze wziąć ślub z Adele 20 września 1938 r.

[18] Por. K. Wójtowicz, *Platonizm matematyczny. Studium filozofii matematyki Kurta Gödla*, OBI–Kraków, Biblos–Tarnow, 2002, s. 144.

Mimo wiszącej nad Europą groźby wojny, Gödel zdecydował się w 1939 r. wrócić na kilka miesięcy do Europy — na zaproszenie Mengera przyjechał na Uniwersytet Notre Dame w Paryżu z cyklem wykładów o teorii mnogości. Okazało się to fatalnym w skutkach błędem. W międzyczasie bowiem ważność straciła jego wiza wjazdowa do Stanów Zjednoczonych, a Hitler zaatakował Polskę, rozpętując tym samym II Wojnę Światową. Uzyskanie pozwolenia na opuszczenie Rzeszy było w tych warunkach niezwykle trudne i wymagało czasu, zwłaszcza, że Kurt musiał jeszcze uregulować swój stosunek do służby wojskowej i w jakiś sposób zarabiać na życie. Także po drugiej stronie Atlantyku (głównie za sprawą von Neumanna) robiono wszystko, co możliwe, aby sprowadzić go do USA, ale podejmowane wysiłki nie przynosiły żadnych rezultatów.

Niespodziewanie jednak już w grudniu 1939 r., zapewne dzięki listowi Adele do ambasady niemieckiej w Waszyngtonie, Gödel wraz z żoną otrzymali w końcu upragnione pozwolenie na wyjazd do Ameryki. Z obawy przed aresztowaniem przez Anglików na Atlantyku, administracja Rzeszy nakazywała podróż przez Związek Radziecki, Japonię i Pacyfik, do czego Gödlowie posłusznie się zastosowali. Ostatecznie 4 marca 1940 r. przybyli do San Francisco.

Princeton

Pierwsze lata pobytu w Princeton nie były dla Gödla łatwe. Do USA przybył oficjalnie jako Niemiec, a nie Austriak (Austria była wtedy częścią Rzeszy) i dlatego traktowany był jako potencjalny wróg — za każdym razem, gdy chciał wyjechać poza Princeton musiał ubiegać się o specjalne pozwolenie. Cała sprawa wyjaśniona została dopiero w 1942 r.

Oprócz tego, na początku lat czterdziestych dały o sobie po raz kolejny znać obsesje Gödla. Twierdził mianowicie, że z lodówki oraz z kaloryferów wydzielają się zabójcze dla jego organizmu gazy[19]. Kiedy indziej, podczas wakacji, nie opuszczał swojego pokoju będąc przekonanym, że przyjeżdżający do hotelu obcokrajowcy chcą go zamordować[20]. Zaniepokojona stanem psychicznym swojego męża Adele była w stałym kontakcie z lekarzami, z którymi na bieżąco konsultowała stan zdrowia Kurta.

Dziwaczne i niekiedy uciążliwe zachowanie Gödla oraz jego natura samotnika sprawiały, że wraz z żoną pozostawali raczej na uboczu życia towarzyskiego Princeton. Problemem była też trudno nawiązująca kontakty i nieskora do nauki języka angielskiego Adele. Podczas gdy Kurt w Ameryce czuł się bardzo dobrze, jej Princeton raczej nie przypadło do gustu. Tęskniła za ojczyzną i po zakończeniu wojny często wyjeżdżała do rodziny w Austrii.

Mając zapewnione stałe źródło dochodu, Gödel mógł w końcu poświęcić się znowu pracy, głównie próbom udowodnienia niezależności hipotezy continuum i aksjomatu wyboru od pozostałych aksjomatów teorii mnogości. Jednak brak ostatecznych efektów w tych dziedzinach sprawił, że od około połowy lat czterdziestych niemal całkowicie pochłonęła go filozofia Leibniza.

Gödel żywił bardzo mocne przekonanie, że Leibniz padł ofiarą spisku wydawców, którzy nie chcieli dopuścić do publikacji fragmentów jego tekstów, a nawet całych dzieł, w których, zdaniem Gödla, wypowiadał się m. in. na temat naukowej doniosłości teorii gier, antynomii teorii mnogości oraz antycypował zasadę zachowania energii. Swoimi rewelacjami Gödel podzielił się wcześniej z Mengerem w czasie pobytu w Paryżu, a będąc już w Princeton ze swoim wieloletnim przyjacielem, Oskarem Morgensternem. Obydwaj do odkryć Godla odnosili się z dużym dystansem i wyrozumiałością. A jednak pewne wydarzenie niedługo potem wprawiło Morgensterna w niesamowite zdumienie i kazało mu z większą uwagą podchodzić do szalonych pomysłów Kurta. Gödel zabrał go mianowicie do biblioteki, gdzie zgromadził mnóstwo książek i artykułów wydanych za życia i wkrótce po śmierci Leibniza, za-

[19]Zob. J. W. Dawson, dz. cyt., s. 158.
[20]Zob. *ibidem*, s. 161.

wierających odwołania do jego tekstów. Jak się okazało, w wielu przypadkach w przytaczanych pismach Leibniza albo nie można było odnaleźć fragmentów, na które się powoływano, albo cytowane dzieła nigdy się nie ukazały![21] Prezentacja Gödla zrobiła na Morgensternie tak duże wrażenie, że gdy już po wojnie nawiązano ponownie kontakty z niemieckimi instytucjami naukowymi, zaangażował się wspólnie z nim w przedsięwzięcie sporządzenia i sprowadzenia do USA kopii rękopisów Leibniza.

W 1945 r. Gödel wznowił korespondencję listową z matką i bratem w Austrii oraz wspierał ich materialnie w trudnym okresie zaraz po wojnie. W jednym z listów przyznał się też Rudolfowi, że cierpi na poważne dolegliwości żołądkowe. Z ich powodu musiał później przejść na ścisłą dietę, a nawet przebywać przez krótki okres w szpitalu.

W 1946 r., po raz kolejny dzięki staraniom m. in. von Neumanna, Gödel został mianowany stałym pracownikiem IAS, a 5 grudnia 1948 r. otrzymał obywatelstwo amerykańskie (przy tej okazji ze śmiertelną powagą i wyrazem autentycznego zatroskania wyjawił Einsteinowi i Morgensternowi, że znalazł sprzeczność w konstytucji Stanów Zjednoczonych!).

Zainteresowania naukowe Gödla skupiły się tymczasem na kosmologii, a ściślej na problematyce czasu. Analizując ogólną teorię względności doszedł do wniosku, że absolutny czas nie jest koniecznym elementem wszystkich możliwych rozwiązań równań pola Einsteina[22]. Następnie zaś zaczął badać światy, w których za sprawą zamkniętych linii czasopodobnych, możliwe jest podróżowanie w czasie. Teoretyczną możliwość istnienia takich światów przewidział dużo wcześniej sam Einstein, ale nigdy nie zajmował się bliżej tym zagadnieniem. Po opublikowaniu wyników pracy Gödla uznał je za interesujące, ale nie mające raczej szans na potwierdzenie empiryczne. W ogóle na znakomitą większość wyników badań Gödla z kosmologii nie zwrócono prawie zupełnie uwagi. Traktowano je

[21] Zob. *ibidem*, s. 166.
[22] Zob. *ibidem*, s. 177.

raczej jako teoretyczne, noszące znamiona paradoksów ciekawostki, leżące poza głównym obszarem zainteresowań ówczesnej fizyki.

W maju 1949 r. wspólnie w Morgesterenm Gödel przystąpił do realizacji powziętego wcześniej planu sporządzenia kopii rękopisów Leibniza. Przedsięwzięcie trwało ponad cztery lata, ale ostatecznie zakończyło się powodzeniem i zebrane materiały umieszczono w bibliotece Uniwersytetu Pensylwanii.

W 1951 r. Gödel, wspólnie z Julianem Schwingerem, został uhonorowany przyznawaną corocznie prestiżową nagrodą Einsteina. Symptomatyczne, że było to dopiero pierwsze akademickie wyróżnienie, jakiego dostąpił Gödel w swej wieloletniej i obfitującej w przełomowe dokonania karierze naukowej. Wkrótce miało się to zmienić. Jeszcze tego samego roku otrzymał bowiem honorowy doktorat Uniwersytetu Yale, a rok później Uniwersytetu Harvarda. Wreszcie w 1953 r. został mianowany członkiem National Academy of Sciences oraz profesorem IAS.

Paradoksalnie, po otrzymaniu tak wielu znakomitych wyróżnień Gödel usunął się całkowicie w cień publicznej pacy naukowej. Po 1951 r. nie uczestniczył już w żadnym posiedzeniu jakiegokolwiek towarzystwa matematycznego, nie prowadził seminariów, rzadko wykładał i mimo ciągłych badań wszystkie jego publikacje po 1952 r. były zaledwie uzupełnieniami poprzednich. Izolację Gödla pogłębiła dodatkowo śmierć, w przeciągu pięciu lat, trzech najbliższych przyjaciół: Einsteina, którego nazwał kiedyś uosobieniem życzliwości[23], von Neumanna oraz Veblena. Ze znajomych, których poznał przybywając do Princeton w 1940 r., nie został pawie nikt, a grono przyjaciół zawęziło się do jednej osoby — Oskara Morgensterna.

Wiele do życzenia pozostawiało także zdrowie Gödla. Na przełomie lat pięćdziesiątych i sześćdziesiątych regularnie konsultował się z psychiatrą, aby przeciwdziałać postępującej anoreksji, niemniej wizyty nie odnosiły oczekiwanych rezultatów. Na początku lat siedemdziesiątych nasiliły się ataki hipochondrii i paranoi, mie-

[23] *Ibid.*, s. 203.

wał halucynacje, ale konsekwentnie nie ufał lekarzom i odmawiał przyjmowania pokarmu, przez co pod koniec życia ważył poniżej 50 kg. W latach wcześniejszych, kiedy obsesyjnie bał się, że może zostać otruty i także nic nie jadał, od śmierci głodowej ratowała go Adele. Teraz jednak z powodu choroby sama była przykuta do łóżka i Gödel był skazany wyłącznie na siebie.

Z czasem Kurt przestał zważać na przyznawane wyróżnienia. Nie fatygował się już, aby odbierać kolejne honorowe doktoraty. Nie odebrał też prestiżowego, przyznanego mu w 1975 r. przez prezydenta USA, *National Medal of Science*. Coraz rzadziej pojawiał się w Instytucie, aż w końcu 1 lipca 1976 r. przeszedł na emeryturę.

W ostatnich latach życia, szczególnie po śmierci Morgensterna, prawie całkowicie stracił kontakt ze światem zewnętrznym. Ponieważ Adele większość czasu musiała spędzać w szpitalu, Kurt został sam i tylko od czasu do czasu rozmawiał telefonicznie z Hao Wangiem.

28 grudnia 1978 r. w stanie skrajnego wyczerpania i wygłodzenia został przyjęty do szpitala, gdzie zmarł 17 stycznia następnego roku. Pogrzeb miał miejsce w Princeton dwa dni później.

Jego śmierć, poza wąskim gronem uczonych, nie zwróciła większej uwagi opinii publicznej. Jeden z najwybitniejszych umysłów XX w. do dziś pozostaje poza światem nauki osobą prawie zupełnie nieznaną.

Semina ☐ Nr 3
Scientiarum 2004

s. Teresa Obolevitch

Motywy filozoficzne w twórczości Kurta Gödla

Wstęp

Nie jest tajemnicą, że filozofia i matematyka są ściśle związane ze sobą. Od czasów starożytnych, zwłaszcza pitagorejczyków i Platona, matematyka była i nadal pozostaje przedmiotem szczególnej uwagi filozofów. Z kolei wiele problemów filozoficznych (jak chociażby zagadnienie nieskończoności) odnajduje swe rozwiązania właśnie na terenie matematyki[1]. Nie dziwi więc, że największe teorie matematyczne zrodziły się nie tylko na skutek technicznych zabiegów, ale także inspiracji filozoficznych, dostarczając obfitego materiału dla dalszej refleksji. Wystarczy wspomnieć o kwestii podstaw matematyki, statusu ontologicznego obiektów matematycznych, problematyce epistemologicznej dotyczącej źródeł wiedzy matematycznej oraz jej zakresu i praktycznego zastosowania[2].

Najstarszym, najbardziej „zasłużonym" i wciąż aktualnym nurtem w filozofii matematyki jest koncepcja platońska w jej rozmaitych wariacjach. Pod jej wpływem znajdował się między innymi „ojciec współczesnej matematyki" Georg Cantor, a także Gottlob Frege, Alonzo Church. Fascynacja platonizmem nadała

[1] J. Dadaczyński, *Matematyka w oczach filozofa. Jedenaście artykułów z filozofii matematyki*, OBI – Kraków, Biblos – Tarnów, 2002, s. 9.

[2] Do zagadnień ontologicznych i epistemologicznych J. Pikul dodaje grupę problemów aksjologicznych. Zob. J. Pikul, *Obecność tradycyjnych wątków we współczesnej filozofii matematyki* w: „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce" XXIII (1999), ss. 68, 88–94.

również kierunek badaniom Kurta Gödla. Już z tej racji warto zastanowić się nad filozoficznymi przesłankami jego twórczości. Co więcej, logiczno–matematyczny dorobek Gödla, szczególnie jego słynne twierdzenia o niezupełności, pozostają „dyżurnym tematem" dla filozofów matematyki[3].

Na temat dziedzictwa Gödla istnieje bogata literatura. Niniejsze opracowanie nie rości pretensji do wyczerpującej analizy wszystkich wątków filozoficznych obecnych w twórczości „króla logiki XX wieku". Jego skromnym celem jest przedstawienie pewnych filozoficznych idei przyświecających pracom austriackiego logika, a także wybranych konsekwencji zeń wynikających. Na koniec wspomnimy o niektórych *stricte* filozoficznych dociekaniach występujących w pismach Gödla.

Założenia filozoficzne

Założenia ontologiczne: natura obiektów matematycznych

Kurt Gödel nie ukrywał swego światopoglądu filozoficznego, już w 1933 roku deklarując się jako zwolennik platonizmu[4]. Dziesięć lat później w artykule *Russell's Mathematical Logic* napisał, że „klasy i pojęcia (*concepts*) mogą być pojmowane jako realne obiekty, mianowicie klasy — jako «wielości rzeczy» (*pluralities of things*) lub jako struktury składające się z wielości rzeczy, a pojęcia (*concepts*) — jako własności i relacje między rzeczami istniejącymi niezależnie od naszych definicji i konstrukcji"[5]. Stanowisko Gödla jest określane mianem realizmu ontologicznego (w odróżnieniu od antyrealizmu). Godnym uwagi jest fakt, że jednocześnie

---

[3]K. Wójtowicz, *O matematyce i filozofii matematyki* [w:] „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce" XXIII (1999), s. 60.

[4]K. Wójtowicz, *Platonizm matematyczny*, OBI – Kraków, Biblos – Tarnów, 2002, ss. 24–25.

[5]K. Gödel, *Logika matematyczna Russela* [w:] (red. i tł.) R. Murawski, *Współczesna filozofia matematyki*, PWN, Warszawa 2002, s. 89.

Gödel nie był idealistą w duchu Platona, gdyż nie pojmował obiektów matematycznych jako pierwotnych w stosunku do przedmiotów fizycznych. Przekonanie o obiektywnym istnieniu uniwersum matematycznego — hierarchii zbiorów będącej przedmiotem teorii mnogości Zermelo–Fraenkla — pozwala ocenić poglądy Gödla jako silny realizm (w opozycji do umiarkowanego realizmu Arystotelesa czy konceptualistów).

Zdaniem Gödla istnieje tylko jedno niezmienne uniwersum matematyczne. Austriacki logik odrzucał koncepcję tzw. „pełnokrwistego" (*full–blooded*) platonizmu, czyli „maksymalizmu ontologicznego" połączonego z „minimalizmem epistemologicznym", głoszącą, że istnieje wiele uniwersów, z których żadne nie zajmuje wyróżnionego miejsca[6]. Matematyk nie tworzy obiektów matematycznych, lecz je odkrywa i opisuje możliwie pełnie, ale w ramach jednej teorii, nigdy wyczerpująco.

To właśnie filozoficzne *credo* Gödla stało się punktem wyjścia dla jego badań nad podstawami matematyki. Wprawdzie platonizm matematyczny jest raczej przedmiotem wiary aniżeli racjonalnie uzasadnionym stanowiskiem[7], stąd sam logik miał świadomość, iż jego założenia filozoficzne nie mogą „zadowolić żadnego krytycznego umysłu, a nawet nie wywołują przekonania, że są one konsekwentne"[8]. Niemniej był on przekonany o słuszności swych filozoficznych poglądów. Z perspektywy czasu napisał nawet, że „to właśnie antyplatoński przesąd uniemożliwił innym dojście do moich wyników"[9].

---

[6] Zob. K. Wójtowicz, *O tzw. programie Gödla* [w:] „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce" XXVIII/XXIX (2001), s. 106; tenże, *Platonizm...*, dz. cyt., s. 33.

[7] Zob. A. Olszewski, *Teza Churcha a platonizm* [w:] „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce" XXIV (1999), s. 98.

[8] K. Gödel, *The present situation in the foundations of mathematics* [w:] (red.) S. Feferman and all, *Collected Works. Unpublished Essays and Lectures*, vol. 3, Oxford University Press, Oxford 2001 (1995), s. 50.

[9] H. Wang, *A logical journey. From Gödel to Philosophy*. Cyt. za: R. Murawski, *O różnicy między prawdziwością a dowodliwością w matematyce* [w:] „Filozofia Nauki" 1 (2001), s. 20.

Założenia epistemologiczne

Źródła wiedzy matematycznej

Kolejnym wyrazem platonizmu Gödla jest jego przekonanie o obiektywności prawdy matematycznej, do której docieramy poprzez „bezpośredni wgląd" — intuicję matematyczną (*mathematical insight*). Nie jest to jednak bezpośrednie nawiązanie do Platońskiego $\alpha\nu\alpha\mu\nu\eta\sigma\iota\zeta$. Owej intuicji nie należy rozumieć jako zagadkowego „szóstego zmysłu". Jest to pewien rodzaj relacji z obiektywną rzeczywistością matematyczną[10]. Umożliwia ona rozumienie wszystkich pojęć opisujących świat matematyki, począwszy od definicji liczby naturalnej aż po pojęcia teorii mnogości, jak np. „zbiór", „należenie do zbioru", itp.

Intuicja matematyczna nie dostarcza gotowej, apriorycznej wiedzy. Wedle Gödla, dane intuicji „mogą być rozwijane poprzez głębsze badanie obiektów, które może doprowadzić do przyjęcia naszych stwierdzeń jako aksjomatów"[11]. Zatem intuicja, z jednej strony, reprezentuje „pierwotne pojęcia" matematyczne, z drugiej zaś podlega nieustannemu twórczemu rozwojowi. Dzięki temu, poprzez analizę podstawowych pojęć matematycznych, dochodzimy do pojęć coraz to bardziej abstrakcyjnych. Prawidłowe stosowanie intuicji — właściwe ukierunkowanie aktywności intelektualnej, prowadzące do wyjaśnienia sensu pojęć matematycznych — stanowi dla Gödla jedno z kryteriów (wraz z owocnością) prawdziwości wiedzy matematycznej.

Na marginesie należy zaznaczyć, że w wyniku uważnego studium filozofii Husserla (począwszy od roku 1959) Gödel dostrzegł pokrewieństwo między swoją własną koncepcją matematycznego poznania a metodą fenomenologiczną i uznał tę ostatnią za mają-

[10] K. Wójtowicz, *Platonizm...*, dz. cyt., ss. 60–62.

[11] R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, PWN, Warszawa 1995, s. 139.

cą „fundamentalne znaczenie dla podstaw matematyki”[12]. Aczkolwiek fenomenologia nie odegrała żadnej roli w kształtowaniu się poglądów wiedeńskiego logika i nie należy umieszczać jej wśród jego założeń filozoficznych, niemniej jednak trzeba pamiętać, że idee fenomenologiczne przyświecały Gödlowi w drugim, filozoficznym okresie jego twórczości.

Zagadnienie prawdy matematycznej

Jako realista Gödel był przekonany o obiektywności pojęcia prawdy matematycznej[13]. Skoro obiekty matematyczne istnieją niezależnie od nas, to nasze badania i opis nie są konstruktami, tworami umysłu, ale ich obiektywną reprezentacją. Należy zauważyć, że Gödel w swych pracach rzadko posługiwał się terminem prawdy (lub prawdziwości) matematycznej, używając w zamian pojęcie poprawności. Sądził bowiem, iż pojęcie prawdy jest obciążone filozoficznymi przesądami i z tej racji nie znajduje życzliwego przyjęcia w kręgach współczesnych mu matematyków.

Czym zatem jest prawda w matematyce? W tym miejscu należy przywołać, po pierwsze, twierdzenie Gödla o pełności logiki pierwszego rzędu, pochodzące z roku 1929, oraz, po drugie, jego pierwsze twierdzenie limitacyjne (o niezupełności) ogłoszone dwa lata później. Rzecz ciekawa, twierdzenie o pełności w odniesieniu do logiki pierwszego rzędu poniekąd wskazuje na równoważność prawdziwości i dowodliwości, tj. semantycznego i syntaktycznego ujęcia[14]. Natomiast twierdzenie o niezupełności arytmetyki uwypukla różnicę między semantycznym pojęciem prawdy a syntaktycznym pojęciem dowodliwości.

Zdaniem Gödla prawda ma charakter intuicyjny i nieścisły. Jest to pojęcie niedefiniowalne: „prawdy dla [danego] języka nie

---

[12] H. Wang, *A logical journey...*. Cyt. za: K. Wójtowicz, *Platonizm...*, dz. cyt., ss. 64–65.

[13] Zob. R. Murawski, *O różnicy...*, art. cyt., s. 17.

[14] Tamże, s. 16.

można zdefiniować w nim samym"[15]. W tej wypowiedzi uderza podobieństwo do koncepcji prawdy Tarskiego. Jednakże Gödel nie zajmował się wprost analizą pojęcia prawdy. Nie było ono głównym celem jego badań. Niemniej, jak sam przyznawał, właśnie zauważenie różnicy między prawdą a dowodliwością stało się dla niego punktem wyjścia dla odkrycia twierdzenia o niezupełności: „zasada heurystyczna mojej konstrukcji nierozstrzygalnych zdań teorii liczb sprowadza się do wysoce pozaskończonego pojęcia „obiektywnej prawdy matematycznej" jako czegoś przeciwstawnego [...] pojęciu „dowodliwości", z którym było powszechnie mieszane przed pracami moimi i Tarskiego"[16]. W wyniku badań Gödla stało się jasne, że pojęcie dowodliwości jest słabsze niż pojęcie prawdziwości. Oznaczało to załamanie się programu D. Hilberta, postulującego formalizację matematyki przy pomocy metod finitystycznych, w oparciu o syntaktyczną teorię dowodu (*Beweistheorie*)[17].

Na skutek rozróżnienia między prawdziwością a dowodliwością w matematyce Gödel w 1951 r. wyróżnił „matematykę w sensie obiektywnym" (matematykę właściwą) i „matematykę w sensie subiektywnym". Podczas gdy druga obejmuje wszystkie zdania dowodliwe, matematyka „obiektywna" stanowi system zdań „prawdziwych w absolutnym sensie, bez dodatkowych założeń". Do tej grupy należą takie zdania[18], jak np. $2 + 2 = 4$. Z twierdzeń Gödla wynika, że wszystkie prawdy matematyki nie mogą być zawarte

---

[15] K. Gödel, *List do Balasa* z 27 maja 1970 r. Cyt. za: R. Murawski, *O różnicy...*, dz. cyt., s. 17.

[16] K. Gödel, *List do Hao Wanga* z 7 marca 1968 r. Cyt. za: J. Woleński, *Metamatematyka a epistemologia*, PWN, Warszawa 1993, s. 95.

[17] Problem interpretacji programu Hilberta jest przedmiotem dyskusji: jeżeli jest to zagadnienie czysto techniczne, to twierdzenia Gödla rzeczywiście obalają możliwość jego przeprowadzenia. Jeżeli natomiast traktować program Hilberta jako specyficzne filozoficzno–terminologiczne zagadnienie, to wówczas jego częściowa realizacja jest możliwa np. w tzw. matematyce odwrotnej (*reverse mathematics*). Zob. K. Wójtowicz, *Platonizm...*, dz. cyt., s. 83.

[18] K. Gödel, *Some basic theorems on the foundation of mathematics and their implications* [w:] (red.) S. Feferman and all, *Collected Works...*, vol. 3, s. 305.

w jednym systemie formalnym. Rozważenie tego ograniczenia będzie przedmiotem dalszej części niniejszego opracowania.

Założenia metodologiczne: język matematyki

Dla uprawiania matematyki istotne znaczenie ma język, w którym są formułowane jej teorie. K. Gödel był przekonany, że jedynym właściwym narzędziem dla niej jest logika pierwszego rzędu[19]. To założenie opiera się na realizmie ontologicznym Gödla, wierzącego w istnienie intuicji matematycznej zgodnie z którą „aksjomaty [logiki pierwszego rzędu] narzucają się nam jako prawdziwe"[20]. Znamiennym jest fakt, że wielu komentatorów uważa, iż twierdzenia limitacyjne Gödla dotyczą nie tylko arytmetyki nadbudowanej nad logiką pierwszego rzędu, ale także tych systemów formalnych (przy spełnieniu określonych warunków), które posługują się aparatem logiki drugiego rzędu. Gödlowski wybór *First Order Logic* dla matematyki nie zawęża jej epistemologicznych konsekwencji tylko do tego języka. Innymi słowy, ograniczenia, które nakładają na matematykę (a wedle szerszej interpretacji — na poznanie w ogóle) twierdzenia Gödla, nie są spowodowane przez ograniczenie jej języka do logiki pierwszego rzędu. Takie same konsekwencje dotyczą również wszystkich systemów, spełniających pewne minimalne warunki[21].

Jednak nie wszyscy matematycy zgadzają się z wyborem Gödla. Przyjęcie dla matematyki języka logiki pierwszego rzędu przez wielu jest uważane za przejaw konwencjonalizmu, arbitralnej decyzji uwarunkowanej co najwyżej historycznie (P. Maddy) i pozbawionej głębszego uzasadnienia. Nie brakuje głosów (S. Shapiro, J. Barwise, F. R. Drake, D. Scott) domagających się formalizowa-

---

[19] K. Wójtowicz, *O matematyce...*, art. cyt., s. 58.

[20] K. Gödel, *Co to jest Cantora problem kontinuum?* [w:] (red. i tł.) R. Murawski, *Współczesna...*, dz. cyt., ss. 120–121.

[21] System taki musi być niesprzeczny, posiadać rozstrzygalny zbiór aksjomatów oraz musi być na tyle bogaty, aby dało się w nim reprezentować aksjomatykę liczb naturalnych. Wszystkie te warunki spełnia logika pierwszego rzędu, ale także wiele innych systemów.

nia matematyki w języku logik silniejszych[22]. Czy należy przyznać rację tym propozycjom? Jak zaznacza J. Woleński, wysunięte zarzuty o niewystarczalności *First Order Logic* są bezpodstawne. Ponadto, w obronie swej tezy, iż nie należy uciekać się do logiki drugiego rzędu, krakowski logik przytacza argument, że „posiada [ona] własności niezbyt intuicyjne, m. in. nie jest zwarta, nie istnieje dla niej efektywna i niesprzeczna aksjomatyka, z której można wyprowadzić wszystkie tautologie II rzędu, iwreszcie jest wprawdzie pełna, ale za cenę rozbicia modeli na zasadnicze i wtórne, przy czym kryterium podziału na te modele jest pozalogiczne. [...] Mamy więc do wyboru: albo zachować jednolitość «dobrej» logiki i formalizacji powodujące pewne niedogodności, albo też zgodzić się na wielość logik i ich formalizacji za cenę rozmycia pojęcia logiki”[23]. Pytanie, czy należy identyfikować całą logikę z logiką pierwszego rzędu oraz czy jest ona adekwatnym narzędziem dla matematyki, pozostaje zatem otwarte.

Implikacje filozoficzne twierdzenia Gödla

Gödel nie podał żadnego przykładu zdania niezależnego od arytmetyki Peano, jedynie zdanie metamatematyczne „Ja nie jestem twierdzeniem”[24] (które wszelako można zastosować do mówienia o liczbach naturalnych przy pomocy arytmetyzacji). Z tego i innych powodów odkrycie Gödla nie od razu spotkało się z życzliwym przyjęciem w gronie logików. Niemniej jego twierdzenia limitacyjne szybko wywołały dyskusję nad tym, jakie konsekwencje o naturze filozoficznej z nich wynikają. Niejednokrotnie twierdzenia Gödla bywają aplikowane do systemów pozaformalnych, wy-

[22]Zob. K. Wójtowicz, *O nadużywaniu twierdzenia Gödla w sporach filozoficznych* [w:] „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce” XIX (1996), ss. 37–39.

[23]J. Woleński, *Metamatematyka a epistemologia*, dz. cyt., s. 91.

[24]Dla arytmetyki Peano zdania niezależne zostało odnalezione przez J. Parisa, L. Harringtona i L. Kirby'ego dopiero niedługo przed śmiercią Gödla w 1977 roku; natomiast dla teorii mnogości zdaniami niezależnymi są: pewnik wyboru i hipoteza *continuum*. Zob. K. Wójtowicz, *Paradoksy skończoności* [w:] „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce” XVIII (1996), ss. 89–90.

korzystywane w metafizycznych czy nawet teologicznych rozważaniach[25]. Ograniczymy się tu do przedstawienia najczęściej spotykanych filozoficznych implikacji logiczno–matematycznego dziedzictwa Gödla.

Jednym ze skutków pierwszego twierdzenia jest uznanie, iż rekurencyjnie aksjomatyzowalna teoria formalna zawiera zdania nierozstrzygalne w ramach danej teorii. Prowadzi to do konieczności odwołania się do coraz to bogatszych systemów. W sposób naturalny fakt ten wywołuje pytanie o granice naszego poznania. Nie ulega wątpliwości, że Gödlowskie twierdzenia limitacyjne mówią o ograniczoności metody aksjomatyczno–dedukcyjnej, przynajmniej w zakresie logiki pierwszego rzędu. Często wniosek ten jest ekstrapolowany również na inne dziedziny poznania. K. Wójtowicz wspomina o opinii J. Życińskiego, zgodnie z którą „twierdzenie Gödla ma dowodzić niemożności udzielenia naukowej odpowiedzi na pytania o charakterze egzystencjalnym czy metafizycznym", o supozycji S. L. Jakiego, iż próby poszukiwania „teorii wszystkiego" bez odwołania się do założeń o naturze teologicznej z góry są skazane na niepowodzenie[26], a także o przekonaniu Katsoffa o niemożliwości istnienia zupełnej i ostatecznej teorii rzeczywistości, tzn. metafizyki[27].

Czy rzeczywiście metamatematyczne twierdzenia Gödla mają jakieś zasadne konsekwencje epistemologiczne? Jest rzeczą oczywistą, że wnioski o charakterze filozoficznym („materialnym") nie wynikają wprost z twierdzeń logiczno–metamatematycznych przy zastosowaniu reguł inferencji, ale dotyczą takiej czy innej interpretacji tezy logicznej. Jak w przypadku każdego poważnego problemu, tak i w wypadku konsekwencji filozoficznych twierdzeń Gödla, opinie są podzielone. Jedni badacze stoją na stanowisku „minimalizmu" czy też „optymizmu" interpretacyjnego utrzymując, że sugestia o ograniczoności ludzkiego poznania powstaje je-

[25] Zob. szerzej: K. Wójtowicz, *O nadużywaniu...*, dz. cyt., ss. 24–25.
[26] Zob. S. L. Jaki, *Zbawca nauki*, W drodze, Poznań 1994, ss. 104–105.
[27] K. Wójtowicz, *O nadużywaniu...*, dz. cyt., s. 25.

dynie na skutek braku mocniejszych środków technicznych, które w przyszłości pozwoliłyby uniknąć ograniczeń nakładanych przez twierdzenia limitacyjne. Jak wspomnieliśmy wyżej, istnieją próby sformalizowania matematyki w języku logiki drugiego rzędu, co w opinii autorów tego projektu, osłabiłoby moc wiążącą twierdzeń Gödla. W tym wypadku można by mówić nie o absolutnej, ale o względnej ograniczoności ludzkiego poznania w ogóle i metody dedukcyjnej w szczególności.

Inni znawcy problemu bronią tezy, iż twierdzenia Gödla z całą pewnością posiadają mocne reperkusje epistemologiczne. Do zwolenników pesymistycznej (a raczej sceptycznej) interpretacji twierdzeń limitacyjnych należy H. DeLong argumentując, że dotychczasowe wysiłki zbudowania systemu, w którym by one nie obowiązywały, skończyły się niepowodzeniem[28]. Z kolei J. Ladrière sygnalizuje, iż nawet gdyby udało się skonstruować takie systemy, „będą to jednak albo systemy ubogie, wyrażające bardzo ograniczoną dziedzinę matematyki intuicyjnej, albo też systemy, w których pewne pojęcia przybierają sens całkowicie różny od sensu łączonego z nimi na poziomie intuicji. [...] Formalizacja nie może dostarczyć obiektywnego modelu myślenia; nie jest ona w stanie ogarnąć całości tego, co poznawalne. [...] Myśl zawiera więcej niż można wyrazić w ścisłych granicach rachunku logicznego”[29].

Przytoczmy w tym miejscu bardzo wyważoną — jak się wydaje — opinię J. Woleńskiego. Jest on zdania, że istotnie, drugie twierdzenie Gödla, głoszące, iż niesprzeczność formalnej arytmetyki pierwszego rzędu nie jest w niej dowodliwa, implikuje tezę o niepewności naszego poznania, o ile przyjmiemy dodatkowe przesłanki: (1) dowodliwość niesprzeczności naszego poznania w nim samym jest warunkiem koniecznym jego pewności oraz (2) formalna arytmetyka I rzędu należy do naszego poznania[30]. Za K. Ajdu-

[28]Zob. J. Życiński, *Metafilozoficzne następstwa twierdzeń limitacyjnych* [w:] „Studia Philosophiae Christianae” 24 (1988) 1, s. 152.

[29]J. Ladrière, *Les limitations internes des formalismes.* Cyt. za: J. Życiński, *Metafilozoficzne...*, art. cyt., s. 152.

[30]J. Woleński, *Metamatematyka a epistemologia*, dz. cyt., ss. 10–12.

kiewiczem Woleński wyróżnia konsekwencje logiczne i konsekwencje interpretacyjne, które zależą od akceptacji (choćby *implicite*) dodatkowych przesłanek. Ponieważ najczęściej nie możemy wykazać ich prawdziwości, problem interpretacji pozostaje otwarty. Niemniej Woleński uważa, że wykorzystywanie twierdzeń Gödla w epistemologii „jest równie zasadne, jak rozpatrywanie determinizmu w oparciu o mechanikę kwantową. I tak jak rozprawianie o determinizmie bez uwzględnienia zasady nieoznaczoności jest obecnie jałowe, tak też jałowe są analizy epistemologiczne ignorujące twierdzenia limitacyjne”[31].

Oprócz licznych przykładów wykorzystania twierdzenia Gödla w dociekaniach nad naturą matematyki i naturą poznania w ogóle, nie brakuje prób zastosowania go także do badań nad naturą ludzkiego umysłu i sztuczną inteligencją. E. Nagel i J. R. Newman w roku 1953, w słynnej monografii *Twierdzenia Gödla* wskazywali, „że struktura i działalność umysłu ludzkiego jest daleko bardziej złożona i subtelna, niż budowa i sposób funkcjonowania którejkolwiek z maszyn, jakie dziś potrafimy zaprojektować”[32]. Amerykańscy badacze dostrzegali w tym powód „nie do zwątpienia, lecz do wzmożonej ufności w potęgę twórczego umysłu”[33]. Następnie J. R. Lucas w artykule *Minds, Machines and Gödel* (1961) usiłował wykazać niemożliwość sztucznej inteligencji, powołując się właśnie na odkrycie wiedeńskiego logika. Dziś jednak, głównie za sprawą H. Dreyfusa, odmawia się słuszności argumentacji Lucasa, gdyż jest ona w gruncie rzeczy paralogizmem[34].

Interesującym jest fakt, że sam Gödel żywił przekonanie, a nawet poszukiwał argumentów na rzecz tego, iż prawa myślenia nie są mechaniczne. Podczas wykładu w Providence w 1951 roku po-

---

[31] J. Woleński, *Metamatematyka i filozofia* [w:] „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce” VI (1984), s. 14.

[32] E. Nagel, J. R. Newman, *Twierdzenie Gödla*, tł. B. Stanosz, PWN, Warszawa 1966, s. 71.

[33] Tamże.

[34] S. Krajewski, art. cyt., ss. 161–162, 171–175; J. Kloch, *Świadomość komputerów?*, OBI – Kraków, Biblos – Tarnów, 1996, s. 9.

wiedział, że „umysł ludzki nie jest w stanie sformułować (czy zmechanizować) całej swej intuicji matematycznej”, z czego wynika, iż „przewyższa [on] wszystkie maszyny”[35]. Jednak Gödel nie uważał, by jego twierdzenie cokolwiek wprost mówiło o niemechanicznej naturze ludzkiego umysłu, chyba że przyjmie się dodatkowe założenie (mianowicie, że ludzie, w odróżnieniu od maszyn, potrafią rozstrzygnąć każde równanie diofantyczne)[36]. Gödel był przeciwny wyjaśnianiu świadomości na podstawie jakichkolwiek metod naukowych[37]. Aczkolwiek, jak zobaczymy, sam chętnie wykorzystywał narzędzia logiczne w uprawianiu filozofii, niemniej rozróżniał status poznawczy obydwóch dziedzin.

Obecny stan badań nie pozwala jednoznacznie rozstrzygnąć, w jakim stopniu twierdzenie Gödla nakłada ograniczenie na nasze poznanie. Odpowiedź na to pytanie w dużej mierze zależy od wyznawanych poglądów na naturę matematyki. Twierdzenie Gödla jest wymownym przykładem wzajemnych powiązań pomiędzy logiką a filozofią. Nie tylko bowiem techniczne procedury, ale i przyjęte filozoficzne założenia „odpowiadają” za nasze rozumienie czysto formalnych, wydawać by się mogło, konkluzji. Podsumowując, należy się zgodzić, iż „filozoficzne implikacje [twierdzenia Gödla] są ciągle jeszcze przedmiotem dociekań i dyskusji”[38].

O filozoficznym projekcie Gödla

Słynny logik przez całe życie żywo interesował się metafizyką, teologią, a nawet demonologią. Jak wiadomo, drugi okres jego

[35]Hao Wang, *From Philosophy to Mathematics*, cyt. za: R. Murawski, *Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki. Problemy zupełności, rozstrzygalności, twierdzenia Gödla*, Wyd. Naukowe UAM, Poznań 2000, s. 172.

[36]S. Krajewski, art. cyt., ss. 176–177.

[37]R. Penrose, *Makroświat, mikroświat i ludzki umysł*, tł. P. Amsterdamski, Prószyński i S–ka, Warszawa 1997, s. 99.

[38]B. Stanosz, hasło *Twierdzenie Gödla* [w:] (red.) W. Marciszewski, *Mała encyklopedia logiki*, Wrocław–Warszawa–Kraków, Ossolineum 1970, s. 335. Zob. także: J. Dadaczyński, *Filozofia matematyki w ujęciu historycznym*, OBI – Kraków, Biblos – Tarnów, 2000, s. 353.

twórczości, począwszy od roku 1943, był prawie wyłącznie poświęcony filozofii[39]. Po przedstawieniu filozoficznych wątków obecnych w działalności Gödla — logika, na koniec należy wspomnieć o niektórych zagadnieniach poruszanych przez Gödla — filozofa.

Gödel marzył o stworzeniu spójnego systemu metafizycznego na wzór monadologii Leibniza[40]. Co więcej, w rozmowie z Carnapem (1940 r.) wysunął on nawet możliwość dokonania formalizacji teologii: „Można skonstruować ścisły system postulatów, używając do tego terminów powszechnie uważanych za metafizyczne, jak np.: «Bóg», «dusza», «idea». Jeżeli zrobi się to bardzo starannie, to wówczas nie będzie można nic zarzucić takiemu systemowi"[41]. W roku 1970 Gödel przedstawił ontologiczny dowód na istnienie Boga jako *summum bonum*, dokonany na gruncie logiki modalnej drugiego rzędu[42].

Wracając do Gödlowskiego projektu zbudowania systemu metafizycznego powstaje pytanie o jego zasadność. Skoro bowiem twierdzenia limitacyjne nakładają ograniczenia na teorię sformułowaną w języku logiki pierwszego rzędu, to czy możliwe jest stworzenie całościowego i spójnego systemu metafizycznego na wzór systemów aksjomatycznych? Nasuwa się myśl o istnieniu pewnego

---

[39] Zob. K. Wójtowicz, *Platonizm...*, dz. cyt., s. 145.

[40] Tamże, s. 15; R. Murawski, „Elementy Leibnizjańskie i kantowskie u Hilberta i Gödla" [w:] (red.) J. Perzanowski, A. Pietruszkiewicz, *Byt, Logos, Matematyka*, Wyd. UMK, Toruń 1997, ss. 381-383.

[41] K. Gödel, R. Carnap, *Stenogram rozmowy*, tł. T. Sierotowicz [w:] S. Wszołek (red.) *Refleksje na rozdrożu*, s. 253.

[42] K. Gödel, *Ontological proof* [w:] (red.) S. Feferman and all, *Collected Works...*, vol. 3, ss. 403–404. Dowód ten opiera się na trzech aksjomatach o cechach pozytywnych (Ax 1: „Nadzbiory klas pozytywnych są pozytywne"; Ax 2: „Tylko dana klasa lub jej dopełnienie jest pozytywne"; Ax 3: „Iloczyn wszystkich klas pozytywnych jest sam pozytywny") oraz wynikających zeń trzech twierdzeniach (Th 1: „Żadna klasa pozytywna nie jest pusta"; Th 2: „*Summum bonum* istnieje"; Th 3: „Co najwyżej jeden byt jest *summum bonum*"). Zob. E. Nieznański, „Dowód Gödla na istnienie «*summum bonum*»" [w:] *Studia Philosophiae Christianae*, 25 (1989), ss. 89–102; tenże, „Drogi i bezdroża formalizacji teodycei od Salamuchy do Gödla" [w:] (red.) Z. Wolak, *Logika i metafilozofia*, OBI – Kraków, Biblos – Tarnów, 1995, ss. 105–106.

paradoksu w twórczości Gödla: z jednej strony, jego logiczne badania wykazały niemożliwość stworzenia Leibnizjańskiej *characteristica universalis*[43]. Z drugiej strony projekt ten powraca tylnymi drzwiami na gruncie jego metafizyki. Czyżby było to zwykłe przeoczenie?[44] Być może jest to raczej wyraz wiary Gödla, iż stosowanie metod formalnych sprzyja rozwojowi także filozoficznych zagadnień, choć niekoniecznie je rozwiązuje, ujawniając tym samym „nadwyżkowość" filozofii. J. Woleński, odpowiadając na pytanie o zadanie formalizacji zaznacza, iż jest ona „sposobem konstruktywnej reprezentacji naszych intuicji. Nawet jeśli skądinąd [z twierdzeń limitacyjnych — T. O.] wiemy, że nie jest to całkowicie realizowalne, każdy częściowy sukces w tym względzie jest ważny"[45].

[43]Por. J. Życiński, *Teizm i filozofia analityczna*, t. 2, Znak, Kraków 1985, s. 21–27.

[44]K. Wójtowicz, *O nadużywaniu...*, art. cyt., s. 42.

[45]J. Woleński, *Metamatematyka a epistemologia*, dz. cyt., s. 96.

Semina □ Nr 3
Scientiarum 2004

Anna Brożek

Hilbert a Gödel: prawda i dowód w matematyce[1]

Od czasów najdawniejszych matematyka uznawana była za wiedzę pewną i niepodważalną, a jej twierdzenia za bezwzględnie prawdziwe. Wraz z logiką stanowiła wzorzec pewności dla innych nauk. O ile można było wątpić w wyniki nauk empirycznych i w świadectwa zmysłów, o tyle matematyka wydawała się wolna od tego typu problemów. Była zawsze, dzięki oczywistości swoich twierdzeń, ideałem epistemologicznym.

Co decyduje o tym, że przekonania o prawdziwości zdań matematycznych wydają się pewniejsze niż wszystkie inne? Przyjmijmy że „pewne" znaczy tyle, co „dobrze uzasadnione". Matematyczne twierdzenia wydają się ugruntowane tak dobrze, gdyż uzasadnia się je w szczególny sposób. *Prawdy w matematyce zajmują honorowe miejsce w systemie naszych przekonań. Podczas, gdy nasze wierzenia empiryczne – że ziemia jest okrągła, że rośliny wyrastają z nasion, że ciężkie przedmioty spadają – wszystkie są potwierdzone jedynie przez nagromadzenie empirycznych obserwacji czy eksperymentu, w matematyce osiągamy umiłowany ideał oczywistości: mamy* ***dowody***[2]. Wydaje się, że to właśnie specyficzny rodzaj dowodu w matematyce przyczynia się do szczególnego statusu jej prawd.

[1] Tytułowym zagadnieniem zainteresowałam się, uczestnicząc w seminarium „Logic and cognition" prowadzonym w roku 2003 na Uniwersytecie w Lipsku przez prof. Ryszarda Wójcickiego. Panu Profesorowi bardzo dziękuję za inspirację. Dziękuję także Redakcji za cenne uwagi, które pozwoliły mi uniknąć wielu błędów.

[2] Maddy [1997], s. 1.

Celem niniejszego artykułu jest omówienie wzajemnej relacji dowodu i prawdy w matematyce na kanwie zestawienia dokonań matematycznych i poglądów filozoficznych dwóch postaci: Kurta Gödla i Davida Hilberta. W paragrafie pierwszym zarysuję problem dowodu w matematyce i przedstawię ideę systemu zaksjomatyzowanego. Następnie opowiem o pożądanych cechach systemów zaksjomatyzowanych w matematyce (przede wszystkim niesprzeczności) i o zastrzeżeniach, jakie w XIX wieku pojawiły się co do niesprzeczności matematyki. Omówię następnie program sformułowany przez Hilberta – matematyka, który wierząc w ideę dowodu formalnego, pragnął uratować pewność matematyki przed groźbą pojawiających się w jej podstawach antynomii. W paragrafie trzecim opiszę słynne twierdzenia Gödla o niezupełności i ich konsekwencje dla programu Hilberta. Kolejnym krokiem będzie próba analizy poglądów filozoficznych Hilberta i Gödla, które, jak pokażę, miały wpływ na ich pracę nad podstawami matematyki, ich koncepcję dowodu oraz matematycznej prawdy. W końcu omówię konsekwencje, jakie przedstawione zagadnienia mają dla relacji prawdy i dowodu w matematyce.

1. *Calculemus !*

W XIII wieku filozof Raimond Lullus napisał: *pojętność chce, aby rozmaite zasady zostały ze sobą zhierarchizowane, sklasyfikowane, a poza tym sprowadzone do reguł; ażeby rozumienie prawdy w każdej kolejnej nauce dało pewność, że można przyswoić sobie inne nauki*[3]. Lullus wierzył, że da się zbudować uniwersalną i pewną naukę opartą na logice i matematyce. W ramach takiej, obejmującej wszystkie dziedziny wiedzy *mathesis universalis*, każdą prawdę można byłoby ustalić po prostu za pomocą obliczeń, a wręcz manipulacji symbolami. Idea Lullusa, z początku zapomniana, odżyła w filozofii G. Leibniza. Ten siedemnastowieczny filozof i matematyk wierzył, że wszelkie problemy (nawet spory

[3] Cyt. za: Minois [1995], s. 202.

filozoficzne) można rozwiązać, przekształcając argumenty w ciągi matematycznych symboli i dokonując stosownych obliczeń. Sądził nawet, że można zbudować maszynę rozstrzygającą o prawdziwości twierdzeń, gdyż w zasadzie utożsamiał rozumowanie ze – świadomym lub nieświadomym – obliczaniem. Stąd jego słynne wezwanie: *„Calculemus!”*

Geneza marzenia o zbudowaniu uniwersalnej nauki w oparciu o zasady matematyczno–logiczne wydaje się oczywista. Kusząca jest myśl, że w każdej dziedzinie można osiągnąć taką pewność, jaka występuje w naukach dedukcyjnych. Aby wytłumaczyć fenomen tej pewności, wyobraźmy sobie, że ktoś pyta nas, czy prawdziwe jest następujące zdanie matematyczne:

$$2 + 2 = 4. \tag{1}$$

Tym, co sprawia, że bez chwili wątpienia zgadzamy się nazwać je prawdziwym, jest narzucająca się oczywistość zapisanego za jego pomocą rachunku (zakładamy naturalnie rozumienie symboli użytych w jego zapisie). A teraz załóżmy, że ktoś pyta, czy zdanie:

$$27463284672 + 57294625 = 2803679297 \tag{2}$$

jest prawdziwe. Niewątpliwie nasza odpowiedź nie będzie tak szybka, jak w pierwszym wypadku. Każdy jednak, kto przeszedł w szkole kurs arytmetyki, potrafi znaleźć odpowiedź na zadane pytanie przy pomocy kawałka kartki i ołówka – stosując się do zasad pisemnego dodawania. Po zapisaniu kilku symboli na kartce uzyskać można odpowiedź niemal tak pewną, jak odpowiedź na pytanie pierwsze. Na lekcjach matematyki nauczyliśmy się bowiem niezawodnej metody rozwiązywania tego typu matematycznych problemów. Potrafimy, za pomocą dających się ująć algorytmicznie kilku prostych czynności, dodać do siebie każde dwie liczby całkowite. Tym samym znamy procedurę pozwalające rozstrzygnąć, czy zdania arytmetyczne tego typu są prawdziwe. Do rozstrzygnięcia prawdziwości (2) wystarczy umiejętność dodawania w zakresie liczb $1 - 9$ i odpowiedniego operowania symbolami[4].

Czynności wykonywane przy dodawaniu pisemnym można nazwać „dowodzeniem" zdania (2). Pewność tego dowodu bierze się stąd, iż procedura, którą stosujemy, jest niezawodna. Dowód w matematyce nie zawsze jednak opierał się na tak ściśle określonych zasadach, z jakimi mamy do czynienia w działaniach arytmetycznych. Początkowo zbiór zdań matematycznych *nie miał żadnego strukturalnego porządku. Zdanie jakieś uznawano za prawdziwe albo dlatego, że wydawało się intuicyjnie oczywiste, albo dlatego, że zostało udowodnione na podstawie innych, intuicyjnie oczywistych zdań, czyli dlatego, że na podstawie innego intuicyjnie prawdziwego rozumowania okazało się ono konsekwencją logiczną innych zdań*[5]. Matematyk musiał po prostu, w taki czy inny sposób, «przekonać» społeczność uczonych, że teza przez niego dowodzona jest prawdziwa. Dowód taki można nazwać dowodem „w sensie psychologicznym"[6]. Budził on szereg zastrzeżeń ze względu na obecne w nim elementy subiektywne, które matematycy próbowali usunąć.

Wzorem dla ulepszonej teorii dowodu stała się metoda dowodzenia zastosowana w „Elementach" Euklidesa. Z tego dzieła — jak uważa wielu, największego osiągnięcia matematyki starożytnej — wywieść można dwie podstawowe zasady nauk dedukcyjnych. Po pierwsze — budowanie systemu naukowego należy rozpocząć od wymienienia pewnej małej ilości zdań, zwanych aksjomatami, uznanych za prawdziwe bez żadnego dowodu. Po drugie — nie można uznać za prawdziwe żadnych innych zdań, jeśli nie zdoła się ich udowodnić odwołując się do aksjomatów i innych, już dowiedzionych zdań, posługując się mechanizmem logicznym. W celu rozszerzenia ideału Euklidesowego dowodu z geometrii na całą ma-

[4]Osoby lepiej „wyposażone" poradzą sobie jeszcze szybciej przy pomocy kalkulatora lub komputera. Fakt, że komputer może pomóc w odpowiedzi na to pytanie, świadczy o istnieniu algorytmu pozwalającego na sprawdzenie owego obliczenia.

[5]Tarski [1995] s. 319 – 320.

[6]Por. m. in. Tarski [1995], s. 322 oraz Czeżowski [1965].

tematykę, należało więc i w tej ostatniej wprowadzić podział na dwie klasy zdań: tych, które nie są dowodzone (aksjomatów), oraz tych wymagających dowodu. Rozwój tworzonych w ten sposób tzw. systemów aksjomatycznych polegał na stopniowym ograniczaniu liczby zdań pierwszej klasy, a rozszerzaniu klasy drugiej. Im mniejszą liczbę bardziej oczywistych podstaw ma nauka, tym wydaje się lepiej uprawomocniona.

W XIX wieku, za sprawą G. Fregego, wykształciło się specyficzne pojęcie dowodu w matematyce (czy szerzej w naukach dedukcyjnych) – pojęcie dowodu formalnego, które miało zastąpić stare, nieostre pojęcie dowodu psychologicznego. Sprecyzujmy, na czym polega jego specyfika. Przez „system formalny" rozumiemy system (język?), który spełnia następujące warunki: (a) posiada dobrze zdefiniowany słownik używanych w nim symboli oraz (b) określa ściśle sposób tworzenia za ich pomocą poprawnych wyrażeń (reguły formowania). W dalszej kolejności (c) pewne z tych wyrażeń uznane zostają za aksjomaty, oraz (d) podaje się tzw. reguły inferencji (dowodzenia), pozwalające ze zdań już uznanych wyprowadzać dalsze twierdzenia systemu (np. *modus ponendo ponens*). Przez „dowód formalny" w takim systemie rozumie się ciąg zdań lub formuł zdaniowych, który zawiera: wyrażenia przyjęte jako aksjomaty, wyrażenia otrzymane z aksjomatów w wyniku ich przekształceń zgodnie z regułami dedukcyjnymi; dalej ewentualnie wyrażenia powstałe z przekształceń poprzednich wyrażeń. Ostatnim zdaniem w ciągu jest zdanie dowodzone[7].

W dowodzie formalnym poszczególne twierdzenia są wyrażone w języku sformalizowanym – za pomocą ściśle określonego zbioru symboli, a stosowane w nim dyrektywy dowodowe są dyrektywami strukturalnymi. Dowody formalne sprowadzają się więc do przekształceń napisów wykonywanych według zasad określonych przez system. W praktyce można posługiwać się nimi abstrahując od znaczeń stosowanych w nich symboli, a znalezienie dowodu formalnego dla dowolnej dobrze zbudowanej formuły okazuje się spra-

[7]Por. Marciszewski [1998], s. 24.

wą kombinowania symboli. Dowodząc formalnie matematycznego twierdzenia, możemy działać w mechaniczny sposób – szukamy dozwolonego przez reguły dowodzenia «przejścia» od aksjomatów do dowodzonej formuły. Ten nowy, formalny typ dowodu miał swoje wady i zalety. Z jednej strony, dzięki wyeliminowaniu metod intuicyjnych w dowodzeniu twierdzeń, nowa teoria dowodu zapewniała intersubiektywność kontroli jego przebiegu. Dlatego pojęcie dowodu formalnego wydawało się początkowo triumfem logiki i matematyki. Z drugiej jednak strony, rozumienie dowodu jako ciągu symboli kłóci się z naszymi intuicjami: niczego tam się bowiem nie «dowodzi». Zauważmy, że w dowodzie formalnym zdanie prawdziwe to zdanie będące mechanicznie wywiedzioną konsekwencją przyjętych aksjomatów. Czy jednak pojęciem konsekwencji da się zastąpić pojęcie prawdy?

Teorię wyposażoną w aksjomaty i w pojęcie dowodu nazywamy „sformalizowaną". Zastanówmy się teraz, jakie są pożądane cechy takiej teorii, powracając w tym celu jeszcze raz do rozpatrzonego przykładu zdania (2). Załóżmy, że nasze pisemne dodawanie wykazało, iż zdanie (2) jest prawdziwe. Jednakże w celu upewnienia się co do naszej odpowiedzi, wykonujemy obliczenia jeszcze raz. Tym razem nasze obliczenia prowadzą do wniosku, że zdanie (2) nie jest prawdziwe. Co robimy? Przypuszczalnie większość z nas zdecyduje się jeszcze raz wykonać obliczenia, sądząc, że za którymś razem w rachunki wkradł się błąd. Dlaczego jednak obliczenia nie mogą prowadzić do różnych wyników? Dlaczego wynik dodawania dwóch takich samych liczb nie może raz być taki, a raz inny? Powodem jest tzw. zasada niesprzeczności. Dwa zdania nawzajem ze sobą sprzeczne nie mogą być równocześnie prawdziwe. $2+2$ zawsze jest równe 4. Nie może zdarzyć się, że wynik wynosi raz 4, a raz 5.

Dobra teoria zaksjomatyzowana nie powinna dopuszczać, by z jej aksjomatów dało się wywieść dwa zdania ze sobą sprzeczne. Nie jest to jednak jedyna pożądana jej cecha. Jeśli dowód formalny miałby być jedyną metodą dowodzenia prawdziwości zdań w danym w systemie, należałoby jeszcze pokazać, że za jego pomocą można o każdym zdaniu rozstrzygnąć, czy jest prawdziwe, czy nie. Inaczej mówiąc, powinien istnieć dowód formalny dla każdego zdania prawdziwego w systemie. Własność dowodliwości wszystkich prawd danego systemu nazywa się „pełnością”[8].

2. *Wir wollen wissen* czyli program Hilberta

Niesprzeczność jest, jak uważa wielu, podstawową zasadą ludzkiego myślenia i dlatego na sprzeczności w najpewniejszej z nauk – matematyce – nie można się zgodzić. Tymczasem w XIX wieku pojawiły się w matematyce paradoksy (antynomie), stawiające niesprzeczność matematyki pod znakiem zapytania. „Antynomiami” nazywa się rozumowania, które wydają się poprawne, ale które prowadzą do sprzeczności. Powodują, że w ramach jednego systemu formalnego dowodliwe są dwie tezy o postaci „A” i „$\neg A$”. Antynomie pojawiły się w dziewiętnastowiecznej matematyce głównie za sprawą Cantorowskiej teorii mnogości. Przykładami są np. paradoks zbioru wszystkich zbiorów Cantora i antynomia Russella. Matematycy i filozofowie matematyki próbowali się pozbyć paradoksów ze swojej dziedziny. Przecież – jako sprzeczna – matematyka przestawała być pewna i niepodważalna. Na dodatek teoria zawierająca sprzeczności, dzięki zasadzie *ex contradictione quodlibet*, pozwala na udowodnienie każdej tezy. Stąd dający się zaobserwować na przełomie XIX i XX stulecia wzrost zainteresowania problemami podstaw matematyki i liczne pomysły na to, jak z niej usunąć niepożądane paradoksy.

Na ogół mówi się o trzech głównych programach, rewidujących podstawy matematyki. Logicyści (jak G. Frege i przez pe-

---

[8]Należy tu zwrócić uwagę na rozróżnienie między „pełnością” systemu, i dwoma rodzajami jego „zupełności”. Pierwsze pojęcie jest semantyczne, dwa dalsze – syntaktyczne. System jest (semantytcznie) pełny, jeśli wszystkie twierdzenia, które są w nim prawdziwe, są w nim też dowodliwe. System jest zupełny1, gdy z dwóch formuł o postaci A oraz (A co najmniej jedna jest twierdzeniem systemu. Jest zaś zupełny2 (zupełny w sensie Posta), gdy każda formuła niedowodliwa w tym systemie po dołączeniu do aksjomatów czyni tę teorię sprzeczną. (Por. Marciszewski [1987], s. 32 – 33).

wien czas B. Russell) wierzyli, że da się sprowadzić matematykę do logiki i w ten sposób przywrócić jej miano wiedzy pewnej. Tak zwani intuicjoniści (np. L. Brouwer) postulowali pozbycie się paradoksów poprzez ograniczenie dziedziny dociekań matematycznych i usunięcie z niej wszystkich tzw. elementów niekonstruowalnych, do których należały według nich m.in. pojawiające się w teorii Cantora nieskończoności. Trzecim pomysłem na usunięcie antynomii i odzyskanie pewności matematyki był sformułowany w latach dwudziestych XX wieku program Hilberta. Przeciwstawiając się pomysłom intuicjonistów, ten wybitny matematyk wypowiedział swoje słynne zdanie: *Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen hat, soll uns niemand vertreiben können*[9]. David Hilbert był «rasowym» matematykiem i sądził, że pozbycie się tak dobrego narzędzia w rękach matematyków, jakim okazała się teoria mnogości, byłoby niepotrzebnym ograniczeniem w ich pracy. Uważał, że nie można po prostu pozbyć się wszystkiego, co sprawia trudność i trzeba raczej próbować uprawomocnienia stosowania metod nieskończonościowych. Zadaniem, jakie Hilbert postawił matematykom w swoim programie, było uzasadnienie całej matematyki, łącznie z jej częścią infinitystyczną. Jego strategia obejmowała kilka etapów. Po pierwsze, uważał, należało (1) wydzielić część matematyki, która «nie sprawia kłopotów», nie generuje paradoksów. Hilbert sądził, że tą częścią matematyki jest jej część finitystyczna. Następnym krokiem miała być (2) rekonstrukcja całej matematyki (także owej infinitystycznej, «kłopotliwej») w jednym systemie formalnym. W końcu należało (3) dowieść niesprzeczności tego systemu przy pomocy metod finitystycznych. Przyjrzyjmy się nieco bliżej tym krokom.

Na czym opiera się finitystyczna część matematyki „nie budząca zastrzeżeń”? Według Hilberta jest to matematyka mówiąca o wielkościach dyskretnych – takich, jak liczby naturalne[10]. Dużą

[9]Nikt nie powinien nas wypędzać z raju, do którego wprowadził nas Cantor.

[10]Zaznaczmy, że często zwraca się uwagę na fakt, iż Hilbert nigdy nie sprecyzował wyraźnie, co znaczy „finitystyczny”

rolę w formułowaniu finitystycznego programu odegrała aksjomatyzacja arytmetyki dokonana przez Giuseppe Peano. Definiując liczby naturalne oraz charakteryzując podstawowe działania przy użyciu jednej funkcji (następnika), Peano zbudował system zawierający zaledwie kilka aksjomatów, stanowiących podstawę całej arytmetyki. Hilbertowi wydawało się, że pokazując związki między matematyką finitystyczną a infinitystyczną, da się dokonać uprawomocnienia stosowania metod wykorzystujących cantorowskie nieskończoności. Z «raju cantorowskiego» nie trzeba by było wychodzić. Hilbert, wraz ze swoimi uczniami, postawił sobie taki właśnie cel — pokazać niesprzeczność matematyki finitystycznej, a następnie, dzięki wykazaniu, że rachunek nieskończonościowy da się wyprowadzić ze skończonego, «rozciągnąć» niesprzeczność i pełność na całą, także infinitystyczną matematykę. Niesprzeczność była oczywiście podstawowym postulatem każdego systemu matematycznego. Hilbert był jednak także przekonany, że postulowany przez niego duży system formalny powinien cechować się także zupełnością, czyli każde jego twierdzenie lub jego negacja powinno mieć formalny dowód.

We wrześniu 1930 roku w Królewcu odbyła się konferencja z udziałem najwybitniejszych matematyków tego czasu, na której Hilbert jeszcze raz wyłożył swój program. W trakcie tej samej konferencji młody matematyk, Kurt Gödel, przedstawił jako wynik swej pracy doktorskiej dowód pełności logiki pierwszego rzędu. Dowiódł, że każde prawdziwe logicznie zdanie (tautologia) rachunku predykatów jest dowiedlne w rachunku predykatów, czyli że istnieje dla niego formalny dowód. Twierdzenie o pełności Gödla było etapem na drodze do realizacji programu Hilberta, po wcześniejszym dowodzie pełności rachunku zdań Posta i Bernaysa. (Rachunek pierwszego rzędu jest bowiem rachunkiem silniejszym, zawierającym w sobie rachunek zdań.) Hilbert oczekiwał tego wyniku, o czym wspominał już w 1928 roku w artykule o podstawach matematyki. Zaprezentowany dowód pełności rachunku predykatów był bez wątpienia wynikiem dającym nadzieję na pełną realizację programu Hilberta i wydawało się, że autor programu finitystycznego ma w Gödlu «sprzymierzeńca». W takim przeświadczeniu Hilbert opuścił konferencję.

Tymczasem tuż przez zakończeniem obrad Gödel postanowił przedstawić jeszcze jeden swój wynik, który okazał się jednym z najbardziej zaskakujących w matematyce. W powszechnym przekonaniu zapewnił on też Gödlowi tytuł jednego z największych matematyków w historii. Gödel, używając środków preferowanych przez Hilberta, dowiódł, iż niesprzeczność i pełność arytmetyki liczb naturalnych nie mogą zachodzić równocześnie, a dowodu niesprzeczności nie da się przeprowadzić w ramach systemu formalnego, zawierającego w sobie arytmetykę liczb naturalnych. Jak się uważa, twierdzenia Gödla pozbawiły Hilberta nadziei na pełną realizację programu.

Kilka dni po zakończeniu konferencji w Królewcu Hilbert, nie uświadamiając sobie jeszcze rangi odkrycia Gödla, dał w wywiadzie radiowym wyraz swojemu matematycznemu optymizmowi, mówiąc: *Wir müssen wissen, wir werden wissen*[11]. Tymczasem wynik Gödla poddał drugi człon tego zdania w wątpliwość...

3. *Ignorabimus.* O dowodzie Gödla[12]

Celem Hilberta było wykazanie niesprzeczności i pełności klasycznej matematyki. Aby to osiągnąć, należało pokazać, że klasa zdań prawdziwych w danym systemie formalnym jest identyczna z klasą zdań dowodliwych w tym systemie. Inaczej mówiąc, że każde zdanie wywiedzione za pomocą reguł dowodowych z aksjomatów jest prawdziwe i odwrotnie – każde zdanie prawdziwe posiada dowód formalny. Ponieważ aksjomaty «uznaje się» za prawdziwe

[11]Musimy wiedzieć, będziemy wiedzieć.

[12]Niniejszy paragraf jest (z konieczności skrótowym) omówieniem wyniku Gödla. Zdaję sobie sprawę, że może pojawić się w nim wiele niedomówień i niejasności. Dokładniejsze, a równocześnie klarowne (w moim przekonaniu) omówienie twierdzeń Gödla można znaleźć w: Dadaczyński [2000] oraz Nagel [1996].

a reguły dowodzenia uważa się za poprawne reguły wyprowadzania konsekwencji przyjętych aksjomatów, jasne jest, że klasa zdań dowodliwych zawiera się w klasie zdań prawdziwych[13]. Ażeby jednak stwierdzić identyczność owych dwóch zbiorów zdań, musiałoby jeszcze zachodzić zawieranie odwrotne: zbioru zdań prawdziwych w zbiorze zdań dowodliwych. Z kolei aby udowodnić, że owo drugie zawieranie nie zachodzi, wystarczyłoby wskazać jedno zdanie prawdziwe, a nie posiadające dowodu. Założeniem i przekonaniem matematyków było, że każda prawda matematyczna musi mieć dowód, a dowodliwość można wręcz utożsamić z matematyczną prawdziwością. Gödel podał kontrprzykład podważający to mocne założenie i odrzucił, wbrew powszechnym przekonaniom matematyków, utożsamienie dowodliwości i prawdy[14]. W ramach arytmetyki opartej na aksjomatyce Peano i na niezawodnych regułach inferencji pokazał, że przy użyciu takich środków pewnych prawd w matematyce dowieść nie można.

Twierdzenie Gödla jest twierdzeniem metamatematycznym, a dokładniej: metaarytmetycznym. Przez metamatematykę (w węższym tego słowa znaczeniu) rozumie się zdania o matematyce wyrażone za pomocą środków ściśle matematycznych[15]. Ażeby dowieść metaarytmetycznego twierdzenia w ramach danego systemu (dokładniej – arytmetyki z *Principia matematica* Whiteheada i Russela), Gödel posłużył się procedurą tzw. arytmetyzacji. Korzystając z własności systemu sformalizowanego (z aksjomatami,

---

[13] Podważenie tego zawierania wymagałaby albo podważenia aksjomatów albo reguł derywacji – czyli logiki. Można tak uczynić – gdyż mówi się o paradoksach logiki takich jak paradoks implikacji materialnej.

[14] Gödel musiał bardzo ostrożnie przeprowadzać swój dowód, gdyż, jak po latach napisał w liście do Wanga, prawdziwość wydawała się wówczas podejrzana, a dowodliwość – nie. (Por. Krajewski [2003], s. 190.)

[15] Por. Dadaczyński [2000], s. 15. Choć początki metamatematyki sięgają wieku XIX, to w zasadzie dopiero dzięki szkole Hilberta idea mówienia o matematyce za pomocą samej matematyki nabrała wyraźniejszych kształtów. Postulowane przez Hilberta dowiedzenie niesprzeczności matematyki za pomocą metod finitystycznych wymagało właśnie matematycznego ujęcia metamatematycznych zdań.

regułami inferencji i pojęciem dowodu formalnego), Gödel znalazł sposób na przedstawienie wszystkich zdań metaarytmetyki w tejże arytmetyce. Znalazł procedurę, która pozwoliła dowolne zdanie metaarytmetyczne przedstawić w postaci liczby naturalnej – numeru Gödlowskiego tej formuły. Przypomnijmy, że jednym z założeń programu Hilberta było wykazanie niesprzeczności matematyki za pomocą finitystycznych środków dowodowych. Arytmetyzacja mogła stanowić krok do realizacji tego postulatu.

Każda liczba naturalna daje się rozłożyć na iloczyn liczb pierwszych. Korzystając z tej własności Gödel pokazał, że każdą formułę metamatematyczną można przestawić jako iloczyn potęg kolejnych liczb pierwszych. Jak tego dokonał? Najpierw przypisał liczby naturalne wszystkim symbolom używanym w metaarytmetyce. Stałym logicznym (takim, jak symbol implikacji, nawiasy, itp.) przypisał Gödel liczby $1 - 10$. Zmiennym liczbowym – kolejne liczby nieparzyste, począwszy od 11. Zmiennym zdaniowym – kwadraty owych kolejnych liczb nieparzystych, a predykatom – ich sześciany. Na przykład kolejnym symbolom zdania $0 = 0$ przypisane były liczby: 6, 5, 6. Numer Gödlowski (g) tego zdania to iloczyn pierwszych trzech liczb pierwszych (bo zdanie zapisane jest za pomocą trzech znaków) podniesionych do potęg o wykładnikach 6, 5, 6, czyli $2^6 * 3^5 * 5^6$, co daje wynik 243 000 000. Ta ostatnia liczba to numer Gödlowski wyjściowej formuły.

Dzięki arytmetyzacji, każdemu zdaniu metaarytmetyki można było przypisać w sposób jednoznaczny jego numer Gödlowski, a liczbę będącą takim numerem jednoznacznie „przetłumaczyć” na formułę metaarytmetyczną. Dzięki temu, że Gödlowi udało się wszystkim zdaniom metamatematyki przypisać jakiś element zbioru liczb naturalnych, metamatematykę można było wyrazić w postaci relacji w zbiorze liczb naturalnych. Dzięki tak zarytmetyzowanemu systemowi Gödel przeprowadził konstrukcję tzw. zdania Gödlowskiego. Przyjrzyjmy się, na czym ona polegała.

Na początek zauważmy, że dowód w sensie formalnym to po prostu ciąg formuł i jako taki również ma swój numer Gödlowski.

Na dodatek musi istnieć ściśle matematyczna zależność między numerem dowodu a numerem zdania dowodzonego. Przecież zdanie dowodzone jest ostatnim elementem ciągu dowodowego. Gödel oznacza relację między zdaniem a dowodem symbolem $Dem(x, y)$, co czytamy: „x jest numerem Gödlowskim ciągu formuł stanowiącego dowód formuły o numerze Gödlowskim y". Zatem zdanie „$\forall x \ \neg Dem(x, y)$" oznacza, że dla każdego numeru x, x nie jest numerem Gödlowskim dowodu formuły o numerze y. To zdanie, «przetłumaczone na metamatematykę», mówi, że nie istnieje ciąg formuł, stanowiący dowód formuły o numerze y. Gödel pokazał, że w pewnym szczególnym przypadku zdania tego typu nie można dowieść, czyli że $\exists y \forall x \ \neg Dem(x, y)$. Skonstruował taką formułę y, dla której nie można dowieść, czy ma ona dowód, czy nie.

Każdej formule, także zawierającej zmienne, da się przypisać liczbę naturalną. Zauważmy, że w szczególnym wypadku można w danej formule A w miejsce zmiennej liczbowej wstawić numer Gödlowski tejże formuły A. Niech numer Gödlowski formuły zawierającej zmienną liczbową wynosi y. Przez formułę $sub(y, 13, y)$ Gödel rozumiał numer Gödlowski zdania powstałego przez podstawienie w formule o numerze Gödlowskim y cyfr oznaczających liczbę y zamiast zmiennej o numerze Gödlowskim 13[16]. Nowa formuła, powstała przez podstawienie za y w wyrażeniu $sub(y, 13, y)$ jakiejś określonej liczby, także posiada swój numer Gödlowski.

Powróćmy do formuł stwierdzających niedowodliwość.
Formuła:

$$\forall x \ \neg Dem(x, sub(y, 13, y))$$

[16] Zastosowany przez Gödla zabieg można opisać następująco. Załóżmy, że dana jest formuła $\exists x(x = sy)$, mówiąca, że istnieje następnik liczby y. Owa formuła, jak każda formuła metaarytmetyczna, posiada numer Gödlowski. Nazwijmy go m. Ponieważ y jest w naszej formule zmienną liczbową (o numerze Gödlowskim 13), można zamiast niej wstawić do owej formuły dowolną liczbę, w szczególności liczbę m. Owa nowa formuła także posiada numer Gödlowski, który można opisać: „numer Gödlowski formuły, którą otrzymuje się z formuły posiadającej numer Gödlowski m przez wstawienie zamiast zmiennej o numerze Gödlowskim 13 cyfr oznaczających liczbę m".

wyrażona w arytmetyce, mówi, że dla każdego numeru x, x nie jest dowodem formuły o numerze $sub(y, 13, y)$. I to zdanie ma swój numer Gödlowski, który da się wyliczyć. Przyjmijmy, że ten numer wynosi n. Możemy teraz w formule $sub(y, 13, y)$ wstawić za zmienną y liczbę n. Otrzymamy zdanie:

$$\forall x \ \ \neg Dem(x, sub(n, 13, n))$$

będące właśnie zdaniem zwanym od nazwiska swego twórcy — „zdaniem Gödlowskim" (G). I ta formuła ma swój numer Gödlowski. Chwila namysłu wystarcza by stwierdzić, że wynosi on $sub(n, 13, n)$. Charakterystyczną cechą G jest to, że odnosi się ono do samego siebie. «Mówi» mianowicie o sobie, że nie jest dowodliwe.

Gödel dowodzi następnie, że G nie da się dowieść, czyli, że jest tak, jak G mówi. Przypomnijmy, że z założenia konieczną cechą systemu aksjomatycznego jest jego niesprzeczność. Zdanie Gödlowskie mówi o sobie, że nie jest dowodliwe. Załóżmy, że G da się udowodnić. Wówczas jest tak, jak G mówi: że G nie daje się udowodnić. Zatem, jeśli dałoby się dowieść G, to dałoby się również dowieść zaprzeczenia tego zdania. Łatwo pokazać, że jest także odwrotnie: jeśli $\neg G$ jest dowodliwe, to dowodliwe jest także G. Możliwość dowodu zdania Gödlowskiego oznaczałaby więc pojawienie się w systemie sprzeczności. Prowadzi to do wniosku, że o ile arytmetyka ma być niesprzeczna, to musi być niezupełna[17].

Jak dotąd Gödel pokazał, że istnieją w arytmetyce zdania nie posiadające dowodu, o których nie możemy matematycznie orzec ani prawdziwości ani fałszywości. Sam fakt istnienia zdań niedowodliwych (niezależnych) nie byłby jeszcze może groźny, gdyby nie

[17] Niedowodliwe zdanie wskazane przez Gödla jest zdaniem metamatematycznym, choć – dzięki zabiegowi arytmentyzacji – także zdaniem matematycznym. Warto tu jednak zaznaczyć, że udało się znaleźć inne zdania niedowodliwe w systemie arytmetyki, ale już o treści «czysto–matematycznej» (czy też interesującej z matematycznego punktu widzenia). Takie zdania odnaleźli J. Parris, L. Kirby oraz L. Harrington w latach siedemdzisiątych i osiemdziesiątyh dwudziestego wieku. (Zob. Murawski [2000], ss. 110–118).

to, że zdanie G, z metamatematycznego punktu widzenia, jest zdaniem prawdziwym. Krajewski tak rekonstruuje metamatematyczne rozumowanie stwierdzające jego prawdziwość: *W trakcie dowodu twierdzenia Gödla pokazaliśmy, że G nie jest dowodliwe w S (systemie aksjomatycznym), jeśli S jest niesprzeczny. G stwierdza jednak, że jest niedowodliwe w S. A zatem jest tak, jak G mówi, czyli G jest prawdziwe. Choć sam końcowy wniosek tego rozumowania wyprowadzony jest „z zewnątrz systemu", to wszystkie fakty potrzebne do wyciągnięcia wniosku o prawdziwości G i poprawności dowodu dają się wypowiedzieć i dowieść w ramach systemu. Dlatego wątpliwości co do prawdziwości zdania Gödla rzadko pojawiały się wśród matematyków*[18].

Wniosek, jaki można wyciągnąć z pierwszego twierdzenia Gödla brzmi: jeśli arytmetyka jest niesprzeczna, jest niezupełna. Nie ma dowodu dla wszystkich jej prawd, a zatem dowodliwość nie jest tożsama z prawdziwością. Cecha dowodliwości jest zrelatywizowana do konkretnego systemu, podczas gdy prawda matematyczna wydaje się niezależna od jakiegoś stworzonego przez człowieka układu aksjomatów i reguł. Na dodatek, trudności wskazanej przez Gödla – czyli niedowodliwości pewnych prawdziwych twierdzeń – nie da się całkowicie usunąć wprowadzając nowe, silniejsze aksjomaty. Twierdzenie Gödla wykazuje niezupełność wszystkich takich teorii, które dane są efektywnie (czyli takich, które posiadają przeliczalny zbiór aksjomatów i reguł) oraz wystarczająco bogatych, by dało się za ich pomocą wyrazić arytmetykę liczb naturalnych. W każdym takim systemie, mimo kolejnych wzmocnień, pojawią się bowiem nowe niedowodliwe zdania.

Z twierdzenia pierwszego, dzięki jego formalnej analizie, wynika drugi wynik Gödla. Można mianowicie z jego pomocą pokazać, że w ramach systemu aksjomatycznego arytmetyki nie da się dowieść niesprzeczności tejże arytmetyki. Tę konsekwencję referatu Gödla zauważył już von Neumann, w owym czasie bliski współpracownik Hilberta, a nawet dowiódł jej niezależnie od Gödla. Za-

[18] Por. Krajewski [2003], s. 122.

ważmy tu jednak, że drugie twierdzenie Gödla nie mówi, że dowód niesprzeczności arytmetyki w ogóle nie jest możliwy. Nie da się go tylko przeprowadzić wewnątrz niej, za pomocą środków uznanych przez Hilberta za „matematykę nie budzącą wątpliwości”[19].

Najczęściej chyba cytowana wypowiedź Hilberta brzmi: *w matematyce nie ma żadnych ignorabimus.* Gödel pokazał, że prawdopodobnie «jakieś *ignorabimus*» będą w matematyce istnieć zawsze...

4. *Werden wir wissen?* czyli o strategiach rozwiązywania problemów matematycznych

Zatrzymajmy się tu na chwilę, by przedstawić analizę poglądów filozoficznych Hilberta i Gödla. Zastanowimy się, jaki wpływ miały one na pracę w dziedzinie matematyki i jak determinowała ona stosowaną przez obu matematyków metodologię. Hilbert mówił w swym wystąpieniu z 1900 roku (w którym przedstawił zestaw 20 doniosłych i nierozwiązanych problemów matematycznych): P*rzekonanie o rozwiązywalności każdego problemu matematycznego stanowi doskonałą motywację dla matematyka. Słyszymy ciągłe wezwanie: Oto problem. Poszukaj jego rozwiązania*[20]. Także Gödel był «optymistą» w matematyce – pomimo dowodu twierdzenia o niezupełności. Obaj uważali, że pytania matematyczne są dobrze postawione, że można na nie odpowiedzieć i że nawet sprzeczności i antynomie pojawiające się w ramach ich dziedziny dadzą się ominąć lub wytłumaczyć. Zarówno Hilbert, jak i Gödel wierzyli, że da się utrzymać pogląd uznający matematykę za wiedzę pewną i bezwzględnie prawdziwą. Różnie jednak uzasadniali filozoficznie to przekonanie. Na przestrzeni wieków pojawiły się co

---

[19] W istocie dowód niesprzeczności arytmetyki został przeprowadzony m. in. w 1936 roku za sprawą ucznia Hilberta, G. Gentzena, z tym, że nie został on przeprowadzone w systemie arytmetyki i nie obyło się bez środków nie–finistycznych. Zatem nie realizował programu Hilberta w jego pierwotnym sformułowaniu.

[20] Hilbert [1901].

najmniej dwie koncepcje filozofii matematyki, które pozwalały na ugruntowanie jej jako wiedzy pewnej. Nazywa się je – od imion twórców – „platonizmem" i „kantyzmem". Postaram się pokazać, że optymizm Gödla oparty był na jego platońskich przekonaniach filozoficznych, podczas gdy Hilbert inspirował się filozofią matematyki Immanuela Kanta.

W realizmie platońskim prawda matematyczna jest ugruntowana «metafizycznie». Platon wierzył, że przedmioty matematyczne istnieją w świecie idealnym, niezależnym od świata fizycznego, a dostęp do nich mamy dzięki sile intelektu. Dzięki idealnemu, niezmiennemu istnieniu matematycznych obiektów, w matematyce nie ma miejsca na niepewność. Matematyka była dla Greków wzorem *episteme*, czyli wiedzy pewnej, którą przeciwstawiali oni prawdopodobnej *doxa*. Inaczej pewność matematyki ugruntowuje Immanuel Kant. W jego *Krytyce czystego rozumu* pojawia się koncepcja matematyki jako wiedzy syntetycznej *a priori*. Twierdzenia matematyki są pewne, gdyż są niezależne od zawodnego doświadczenia, a ich konieczność wynika z konstrukcji ludzkich władz poznawczych. Matematyka jest ugruntowana w tzw. formach naoczności czasu i przestrzeni, dzięki którym poznajemy świat w trzech wymiarach przestrzennych i jednym czasowym. Jest dzięki temu wiedzą bezpośrednią, intuicyjną. W *Krytyce czystego rozumu* pojawia się kantowskie, bardzo specyficzne rozumienie intuicji. Według Kanta, intuicyjna matematyczna wiedza *a priori* opiera się na mentalnych przedstawieniach indywiduów czasoprzestrzennych. Przedmiotem intuicji jest to, co może stać naraz i bezpośrednio przez naszymi oczami i co można sobie bezpośrednio wyobrazić. Mówiąc inaczej, wszystko co człowiek może sobie przedstawić jako indywiduum, jest intuicyjne[21].

[21] Por. Hintikka [1991]. Pisze on, że u Kanta: *Intuitivity is simply individuality.* Hintikka dodaje, że nie ma nic «intuicyjnego» w takim rozumieniu intuicyjności. Jest to po prostu silne założenie filozoficzne. Należy tu zaznaczyć, że istnieją inne interpretacje kantowskiej teorii intuicji. Na przykład I. Dąbska (w: Dąbska [1978]) twierdzi, że rozumienie intuicji matematycznej Kanta jako

Najbardziej podstawowe prawdy arytmetyczne można ugruntować dzięki bezpośredniemu spostrzeganiu przedmiotów jednostkowych. Pozostała wiedza matematyczna jest, według Kanta, skonstruowana na podstawie tych pierwotnych intuicji. Filozof z Królewca definiuje matematykę jako *czystą wiedzę a priori, która opiera swe poznanie jedynie na konstrukcji pojęć na podstawie intuicyjnego wyobrażenia przedmiotu*[22]. Według Kanta, złożone przedmioty matematyczne nie są, jak u Platona, bytami samoistnymi, a pochodzą z apriorycznej konstrukcji podmiotu. Choć jednak Kant uznawał wiedzę a priori za konstruowaną niezależnie od zmysłowego doświadczenia, to uważał, że zdobycie takiej wiedzy może się dokonać dopiero wtedy, gdy nasz umysł zostanie wyposażony w «jakieś» poznanie. Warto tu znów zacytować filozofa z Królewca:

> *Matematyczne poznanie* [jest] *zaś poznaniem na podstawie konstrukcji pojęć. Skonstruować zaś pojęcie to znaczy przedstawić odpowiadającą mu naoczność a priori. Dla konstrukcji pojęcia wymagana jest więc naoczność nieempiryczna, która przeto – jako naoczność – jest przedmiotem jednostkowym* [...]. *Konstruuję więc trójkąt przedstawiając przedmiot odpowiadający temu pojęciu albo za pomocą samej tylko wyobraźni w naoczności czystej, albo wedle niej także na papierze w naoczności empirycznej, ale w obu wypadkach całkowicie a priori, nie zapożyczając na to wzoru z żadnego doświadczenia*[23].

Porównajmy te poglądy Kanta z wypowiedzią Hilberta:

---

sposobu percepcji znaków liczbowych (przyjęte przez Hilberta i Hintikkę) jest mylne. Por. też Dadaczyński [2000], ss. 181–183.

[22]Kant, *Metaphysische Anfangsgrunde der Naturwissenschaft*, cyt. za: Dadaczyński [2002], s. 181.

[23]Kant [2001], s. 540, 713.

> *Coś musi być już dane w przedstawieniu jako warunek wstępny dla zastosowania wnioskowań i wykonywania operacji logicznych: są to mianowicie pewne pozalogiczne konkretne przedmioty, które tam występują poglądowo, jako bezpośrednie przeżycia. Jeżeli myślenie logiczne ma być pewne, to przedmioty te muszą całkowicie dać się ogarnąć jednym spojrzeniem we wszystkich ich częściach* [...]. *Takie jest podstawowe stanowisko filozoficzne, które uważam za potrzebne dla matematyki i w ogóle dla całego naukowego myślenia, rozumienia i porozumiewania się*[24].

Dochodzimy tu do źródła finitystycznej strategii Hilberta. Posiadamy intuicję skończonych indywiduów, a wiedza o nich narzuca się nam z niepowątpiewalną oczywistością. Pewność matematyki można ugruntować właśnie na postrzeganiu bezpośrednio dyskretnych obiektów, a w szczególności potrafimy rozpoznawać symbole takie, jak ciągi: I, II, III, IIII. Bezpośrednie ich poznanie daje nam wiedzę o liczbach naturalnych – dlatego prawdy ich dotyczące wydają się niepodważalne. Według Hilberta, podobnie jak w filozofii Kanta, pozostałą część matematyki można skonstruować dzięki tej niewzruszonej podstawie i operacjom logicznym.

Przypomnijmy jeszcze jedną istotną tezę Kantowskiej filozofii matematyki — stosunek do nieskończoności. Filozof z Królewca nie uznawał istnienia nieskończoności aktualnej. Określał ją jako ideę czystego rozumu — punkt graniczny naszego poznania. Nieskończoności nie możemy poznawać bezpośrednio, nie może być nam dana. Wydaje się, że i ten pogląd przejął Hilbert od Kanta i stąd jego, jak się często mówi, instrumentalistyczne traktowanie metod teorii mnogości. Łatwo teraz zrozumieć, dlaczego Hilbertowi był potrzebny mocny program finityzmu — należało uprawomocnić posługiwanie się czymś, co nie jest nam w żaden sposób dane[25].

---

[24]Hilbert, *Uber das Unendliche*, cyt. za: Murawski [2001], s. 125–126.

[25]Hilbert odwoływał się także do wyników fizyki, które zdają się przeczyć istnieniu w świecie nieskończoności. Musimy tu zaznaczyć, że do Kanta (nawet

Hilbert dzielił matematykę na realną i idealną. Realna matematyka to ta, która «nie sprawia kłopotów», w ramach której nie pojawiają się paradoksy. W szczególności była to matematyka bez nieskończoności. Matematyka zawierająca kantorowską teorię mnogości zwana była przez Hilberta – po linii kantowskiej – matematyką „idealną". Ta «idealność» pojęcia nieskończoności nie przesądza o porzuceniu teorii mnogości. Hilbert uważa jedynie, że *musimy ustanowić w całej matematyce taką samą pewność wnioskowań, jaka ma miejsce w elementarnej teorii liczb, gdzie nikt nie ma wątpliwości, i gdzie paradoksy i sprzeczności powstają tylko przez nieuwagę*[26]. Można powiedzieć, że program Hilberta miał doprowadzić do ugruntowania matematyki idealnej za pomocą realnych środków.

Gödel, jako platonik, uznawał całą matematykę (także nieskończonościową) za realną, a jej przedmioty za istniejące rzeczywiście, choć niezależnie od świata fizycznego i ludzkiego umysłu. Napisał:

> *Pojęcia i klasy mogą być potraktowane jako obiekty rzeczywiste* [...]. *Wydaje się, że założenie o istnieniu takich obiektów jest równie uzasadnione jak założenie o istnieniu obiektów fizycznych. Filozofia matematyki powinna i musi być metafizyczna*[27].

Ale Gödel również wprowadził w matematyce podział, choć zasadniczo inny niż ten Hilbertowski: na matematykę obiektywną

---

bardziej bezpośrednio) odwołuje się też nurt intuicystyczny w filozofii matematyki. Jego protoplasta – Kronecker powiedział kiedyś, że „Liczby naturalne stworzył Pan Bóg, reszta jest dziełem człowieka". Wnioski intuicjonistów szły jednak o wiele dalej, niż hilbertowska interpretacja Kanta. Szczególną rolę przywiązywali do tzw. konstruowalności przedmiotów matematyki. Na przykład uważali, że matematykę nieskończonościową należy wyeliminować jako niekonstruowalną. Hilbert natomiast nie wykluczał ze swoich dowodów metod nie–konstruktywistycznych, a niesprzeczność, nie zaś konstruowalność, uznawał najważniejszy warunek matematycznego systemu.

[26] Hilbert [1986], s. 296.

[27] Gödel [1990], ss. 119–153.

i subiektywną. Pierwsza stanowi ogół prawdziwych zdań o istniejących obiektywnie bytach matematycznych. Matematyka subiektywna zaś to ogół zdań dowodliwych w jakimś konkretnym matematycznym systemie. Są to twierdzenia, którą formułują ludzie, badając świat matematyki obiektywnej. Dokonują tego za pomocą intuicyjnego analizowania jej pojęć.

Zaznaczmy od razu, że „intuicję" rozumie Gödel zupełnie inaczej niż Hilbert. Pisze:

> *Należy zauważyć, że intuicja matematyczna nie powinna być uważana za zdolność, która daje bezpośrednią wiedzę o analizowanych obiektach. [...] Wydaje się raczej, że podobnie jak w przypadku doświadczenia fizycznego, formułujemy nasze idee na gruncie czegoś innego niż to, co jest dane bezpośrednio, w sposób natychmiastowy. To coś innego tutaj nie jest, a przynajmniej nie jest głównie, wrażeniem. Fakt, że coś jeszcze oprócz wrażeń jest dane w sposób natychmiastowy, wynika (niezależnie od matematyki) z tego, że nawet idee odnoszące się do obiektów fizycznych posiadają w sobie coś, co nie wynika z obserwacji – na przykład ideę obiektu. Oczywiście to, co dane w matematyce, jest ściśle związane z abstrakcyjnymi elementami zawartymi w naszych ideach empirycznych. Nie wynika stąd jednak, że te dane drugiego rodzaju, jak twierdził Kant, są czymś czysto subiektywnym, ponieważ nie mogą być związane działaniem określonych przedmiotów na nasze organy. Przeciwnie, one też mogą wyrażać jakiś aspekt obiektywnej rzeczywistości, a ich pojawienie się może wynikać z innej relacji pomiędzy nami a rzeczywistością*[28].

Matematyka subiektywna zbliża się do matematyki obiektywnej, odkrywając coraz więcej jej prawd, podobnie, jak fizyka zbli-

[28]Gödel [2003], s. 121.

ża się do adekwatnego opisu świata materialnego. Tak jak świat fizyczny, matematyczne obiekty (także np. zbiory nieskończone) istnieją obiektywnie i nie są tylko ludzką konstrukcją. Dostęp do prawd o nich mamy poprzez analizę pojęć matematycznych, ale ta analiza nigdy nie będzie pełna. Zbiór zdań prawdziwych matematyki obiektywnej tworzy nieprzekraczalną granicę, której nie zdołamy osiągnąć, lecz do której staramy się zbliżyć, rozszerzając stopniowo klasę zdań dowodliwych[29]. Mimo ograniczeń intuicji, poznajemy dzięki niej dużą klasę matematycznych przedmiotów. Jesteśmy w stanie analizować pojęcia matematyczne, nawet te postulowane przez teorię mnogości. Takie analizy pojęć doprowadzają do coraz lepszego ich rozumienia i eksploracji obiektywnej matematyki.

Wobec takich przekonań Gödla widać, że finitystyczne założenia Hilberta nie były mu potrzebne i nie stanowiły nieodzownego warunku uprawomacniającego matematykę. Dlatego miał on inną strategię «radzenia sobie» z paradoksami teorii mnogości. Przede wszystkim Gödel był przekonany, że paradoksy są czysto logiczne, a nie dotyczą matematyki czystej. Obiekty tej ostatniej istnieją obiektywnie i nie ma między nimi sprzeczności. Zatem, jeśli przyjęty system aksjomatyczny nie pozwala na udowodnienie wszystkich prawd lub doprowadza do powstania antynomii, oznacza to, że pojęcia matematyczne w jego ramach nie zostały dostatecznie zanalizowane. Prawdopodobnie należy go więc rozszerzyć o takie aksjomaty, które pozwolą na rozwiązanie problemu. Załóżmy, rozumuje Gödel, że A jest nierozstrzygalnym zdaniem systemu aksjomatycznego S. Zdanie A jest albo bezsensowne, albo prawdziwe, albo fałszywe. Nie możemy go uznać za bezsensowne ze względu na klarowność pojęć stosowanych w jego budowie, może więc być tylko prawdziwe albo fałszywe. Jednakże ani A, ani jego negacja, nie mogą być dowiedzione w S. Stąd, aby rozstrzygnąć, czy A jest prawdziwe, czy fałszywe, musimy dodać nowy zestaw S_1 aksjoma-

[29] Jak się zdaje – na przykład w ujęciu Peirce'a czy Poppera – pojęcie prawdy odgrywa podobną rolę w naukach empirycznych.

tów do S, budując rozszerzony system aksjomatów $S \cup \{S_1\}$, taki, że za ich pomocą możemy dowieść A lub jego negacji, ale nie możemy dowieść ich obu. Choć rozszerzony system (nasze $S \cup \{S_1\}$) pozwala na rozstrzygnięcie zdania A, to w jego ramach pojawią się inne zdania nierozstrzygalne, wymagające jeszcze silniejszych aksjomatów. Tak będzie w nieskończoność, gdyż, według Gödla, matematyczne pojęcia są niewyczerpane.

> *Konstruowanie coraz wyższych szczebli jest konieczne do dowodzenia twierdzeń dotyczących nawet stosunkowo prostej struktury, a mianowicie twierdzeń arytmetycznych. Istnieją zadania arytmetyczne, które mogą być udowodnione tylko metodami analitycznymi, a nawet przez zastosowanie metod, w których odwołujemy się do bardzo dużych nieskończonych liczb kardynalnych i podobnych rzeczy*[30].

Każde zdanie tzw. niezależne – czyli takie, które jest niedowodliwe i niedowodliwa jest także jego negacja – może zostać dołączone do aksjomatów, nie wywołując sprzeczności. Takimi niezależnymi, jak wykazał Gödel, zdaniami są między innymi: zdanie Gödlowskie, aksjomat wyboru i hipoteza continuum.

Bez wątpienia odkrycie niezupełności arytmetyki mogło dla Gödla stanowić uzasadnienie trafności jego założeń ontologicznych. Pokazał, że mamy pozaformalne rozumienie twierdzeń matematycznych oraz dana jest kategoria prawdziwości, którą można stosować do zdań tego typu. Dowodliwość nie jest równoważna prawdziwości. Zdanie Gödlowskie jest prawdziwe w «pozaformalny» sposób, a my widzimy jego prawdziwość spoza systemu, w ramach którego zostało sformułowane.

---

[30] Gödel [1995] s. 48.

5. Od programu Hilberta do programu Gödla

Gödel dowiódł zatem, że formalnie – przy pomocy metod preferowanych przez Hilberta – nie da się dowieść niesprzeczności arytmetyki. Jeśli arytmetyka jest niesprzeczna, jest także niezupełna, bo istnieją zdania prawdziwe, ale w jej ramach niedowodliwe. W tym ostatnim paragrafie postawimy sobie dwa pytania. Po pierwsze: czy i w jakim stopniu Gödel położył kres programowi Hilberta? Po drugie: czy Gödel skutecznie i trwale oddzielił pojęcia prawdy i dowodu?

Twierdzenie Gödla wywołało ferment wśród badaczy podstaw matematyki, choć nie stało się to z dnia na dzień. Przypuszczalnie matematycy nie od razu dostrzegli doniosłość twierdzenia. Na przykład H. Reichenbach, podsumowując słynną konferencję w Królewcu, nawet nie zwrócił uwagi na drugi referat Gödla[31]. Hilbert podobno początkowo zareagował złością. Musiał zdawać sobie sprawę, że twierdzenie Gödla stawia pod znakiem zapytania sensowność jego programu i wieloletniej pracy. Nie ma jednak całkowitej zgody co do tego, czy wynik Gödla definitywnie kładzie kres programowi finitystycznemu. Wątpliwości co do konsekwencji twierdzenia Gödla dla finitystycznego programu Hilberta wynikają z faktu, że sam ten program był sformułowany niezbyt ściśle. Dla przykładu niedookreślona była idea finityzmu – czy przez „finityzm" rozumiał Hilbert tylko istniejącą już aksjomatyzację matematyki, czy też dopuszczał możliwość innej, lepszej finitystycznej aksjomatyzacji. Dlatego, o ile niektórzy są przekonani, że program Hilberta zakończył się w 1931 roku definitywną klęską, o tyle inni uważają, że wcale tak nie jest[32]. Warto zauważyć, że do tej drugiej grupy należeli (przynajmniej w pewnym okresie) dwaj główni bo-

[31] Podobno tylko Von Neuman – ówczesny bliski współpracownik Hilberta – od razu uznał dowód niezupełności za doniosły, szczególnie dla programu finitystycznego.

[32] Por. Krajewski [2003], ss. 261 i nn. Udowodniono m.in. tzw. twierdzenie Friedmana i Siega, głoszące, że każde twierdzenie matematyczne, które można udowodnić w systemie stanowiącym podsystem Z2, (arytmetyki drugiego

haterowie niniejszego artykułu – Hilbert i Gödel. Hilbert (w przedmowie do książki o podstawach matematyki napisanej wspólnie z Bernaysem) stwierdził:

> *Zazwyczaj utrzymuje się opinię, że z wyniku Gödla wynika niewykonalność mojej teorii dowodu. Ale jego dowód pokazuje tylko, że bardziej zaawansowane teorie niesprzeczności wymagają użycia finistycznych dowodów, które nie mogą być wyrażone w formalizmie P*[33].

Z kolei Gödel, jeszcze w artykule z roku 1931 zaznacza wyraźnie, że jego twierdzenie

> *nie zaprzecza formalistycznym poglądom Hilberta. To podejście presuponuje jedynie istnienie dowodu niesprzeczności, w którym mogą być użyte tylko środki finitystyczne, a jest możliwe, że istnieją takie dowody, które jednak nie mogą być wyrażone w P*[34].

Najrozsądniej jest chyba przyjąć, że twierdzenie Gödla narzuca poważne ograniczenia na program Hilberta. Jeśli może on nadal być realizowany, to tylko w pewnym ograniczonym zakresie.

Hilbert napisał: *Gdzie tylko są jakieś widoki powodzenia, tam chcemy dokładnie badać owocne definicje i metody dedukcji. Chcemy je pielęgnować, wzmocnić i uczynić użytecznymi*[35]. Skoro, co wiemy dzięki twierdzeniu Gödla, nie da się programu przeprowadzić dla całości matematyki, trzeba przynajmniej uczynić to tam, gdzie to możliwe. Choć dzięki twierdzeniom Gödla wiemy, że prawdziwości całej matematyki nie da się wykazać za pomocą finitystycznych operacji (rozumiejąc tu „finitystyczne" wąsko — jako

---

rzędu), nazwany WKL, jest finitystycznie dedukowalne w sensie programu Hilberta. Por. Simpson [2002], s. 200.

[33] Hilbert, Bernays [1934], s. 8.

[34] Gödel [1931], s. 37.

[35] Hilbert [1986], s. 296

„wyrażalne w arytmetyce Peano"), nie oznacza to, że nie da się tego zrobić dla jakiejś części matematyki. Kontynuatorzy programu Hilberta zdają się uważać, że całkiem duża część matematyki może być jednak finitystycznie uprawomocniona[36]. Najciekawszym chyba przykładem kontynuacji badań nad podstawami matematyki w duchu hilbertowskim jest tzw. arytmetyka odwrotna (ang. *reverse mathematics*). Przedstawmy w paru słowach jej ideę[37]. Załóżmy, że dane jest zwykłe twierdzenie matematyki. Wobec każdego takiego twierdzenia możemy zapytać: jakie aksjomaty istnienia zbiorów są potrzebne, aby dowieść tego zdania? «Odwrotność» tego typu dociekań matematycznych polega na tym, że przechodzi się, nie jak w klasycznie pojętym dowodzie — od aksjomatów do ich konsekwencji, a odwrotnie — od gotowych twierdzeń do ich minimalnych założeń ontologicznych.

Warto tu przypomnieć charakterystyczne podejście Gödla do badań nad systemami aksjomatycznymi. W zgodzie ze swym realizmem, Gödel wierzył, że każde zdanie matematyczne jest prawdziwe lub fałszywe. Równocześnie pokazał, że w gotowych już systemach istnieją zdania niezależne (niedowodliwe). Gödel proponował zatem poszukiwanie nowych aksjomatów, które dodane do aksjomatyki teorii mnogości pozwoliłyby na dowiedzenie zdań niezależnych – takich, jak hipoteza continuum. Ten Gödlowski postulat zostały nazwany „programem Gödla"[38]. Łatwo zauważyć, że kierunek dociekań jest tu właśnie «odwrotny», a pomysł wprowadzenia *reverse mathematics* jest prawdopodobnie inspirowany ideami Gödla.

Zwróćmy jeszcze uwagę, że analiza strategii postępowania w programie Gödla prowadzi do przekonania, iż autor twierdzeń o niezupełności nie neguje doniosłości idei formalnego dowodu matematycznego. Choć twierdzi, że w naszym rozumieniu matematyki jest «coś więcej» niż da się udowodnić za pomocą finistycz-

[36] Por. Krajewski [2003], s. 199.
[37] Por. Wójtowicz [2002], ss. 99 i nn.
[38] Por. Wójtowicz [2001], ss. 100–117.

nego systemu formalnego, to sam proponuje poszukiwanie takich aksjomatów, które pozwoliłyby na formalne dowiedzenie uznawanych (intuicyjnie) twierdzeń. Gödel uważa, że dowód jest ważny w matematyce, ale stanowi tylko końcowy etap pracy matematyka. Aby przeprowadzić dowód, należy najpierw zbudować system aksjomatów i reguł dowodowych, a do tego potrzeba rozumienia pojęć matematycznych. Rolę dowodu formalnego widział Gödel raczej — użyjmy określenia z filozofii nauki — tylko w „kontekście uzasadnienia".

Twierdzenie Gödla bywa nadużywane — często słyszy się, że Gödel dowiódł, iż niczego nie możemy dowieść. Tymczasem dowód jest nadal podstawową metodą uzasadnienia prawd matematycznych i tak już pewnie zostanie. Jak napisał Tarski:

> *w rozwoju matematyki nie ma sprzeczności pomiędzy pojęciem prawdy i pojęciem dowodu; pojęcia te nie są na stopie wojennej, lecz pozostają w stanie pokojowego współistnienia*[39].

Pozostaje więc pytanie: jeśli dowód w sensie formalnym służyć miałby przede wszystkim – jak to zdaje się postulować Gödel – w kontekście uzasadnienia, to czy istnieje jakaś inna metoda odkrywania prawd matematycznych, czy też jakieś inne, pozaformalne kryteria pozwalające matematykom na przyjęcie dowodzonych twierdzeń? Czy istnieją inne kryteria matematycznej prawdy? Pod koniec tych rozważań chcę pokazać «kandydata» na takie kryterium, które zaakceptowaliby, przypuszczam, zarówno Hilbert, jak i Gödel. Kryterium to można nazwać „pragmatycznym", a polega ono na wykazaniu skuteczności i użyteczności dowodzonych twierdzeń matematycznych.

Zacznijmy od Hilberta. Przedstawiciel intuicjonizmu, L. Brouwer, nazwał twórcę programu finitystycznego „formalistą". Od tego czasu utarło się określać Hilberta jako głównego przedstawi-

[39] Tarski [1995], s. 332.

ciela tego kierunku, ale istnieją wątpliwości co do słuszności takiego przyporządkowania. Oczywiście rozstrzygnięcie tej kontrowersji zależy od naszego rozumienia formalizmu. Według niektórych, mocnych wersji formalizmu, przedmiotem matematyki są, w dosłownym tego słowa znaczeniu, ciągi napisanych symboli i dokonywane na nich manipulacje. Konsekwentny formalista nie zwraca uwagi na „prawdziwość" aksjomatów i nie starta się jej uzasadnić. Jego wymaganiem jest niesprzeczność aksjomatów, a wszystkie niesprzeczne systemy uważa za równoważne. W zasadzie nie mówi o prawdzie, a o manipulacji symbolami, przypominającej grę o określonych, konwencjonalnych regułach. Każda «gra na symbolach» jest równie dobra. Tak skrajnie rozumiany formalizm nie rozwiązuje szeregu problemów epistemicznych. Przede wszystkim nie tłumaczy skuteczności matematyki i czyni ją intelektualną zabawą i raczej nieużyteczną czynnością[40].

Hilbert mocno wierzył w skuteczność matematyki i w sensowność jej uprawiania. Jeśli uznawałby, że matematykę można sprowadzić do gry na symbolach, niezrozumiała stawałaby się chęć ugruntowania jej aksjomatów, która towarzyszyła formułowaniu programu finitystycznego. Dlatego, o ile chce się stosować do filozofii Hilberta określenie „formalizm" — to tylko w drugim, słabszym znaczeniu. Owa druga, słabsza wersja formalizmu znana jest też pod nazwą „deduktywizmu". Deduktywista uważa, że można tak wyznaczyć znaczenie ciągu symboli, że «reguły gry», czyli operowania nimi, staną się prawdziwe — w tym sensie, że za ich pomocą można dobrze opisywać rzeczywistość. Metodę stosowaną przez Hilberta można zatem raczej nazwać „teoretyczno–

[40]Hilbert mówił często, że jego symbole są pozbawione znaczenia – i stąd może wspomniane nieporozumienia. Pisał np.: *w szczególności w matematyce przedmiotem naszych rozważań są konkretne znaki, których kształt jest bezpośrednio jasny i niepodważalny.* Z drugiej strony wydaje się, że Hilbert przyznawał zdaniom matematycznym pewną treść. Solidaryzując się z Kantem, pisał: *Już Kant uczył, że matematyka posiada treść pewną i niezależną od jakiejkolwiek logiki i dlatego nigdy nie może zostać ugruntowana w oparciu o samą tylko logikę.* (Por. Murawski [2002], s. 125 i nn.)

modelową". Matematyk dostarcza różnych, niesprzecznych systemów aksjomatycznych, a sprawdzenie, które z nich mogą prawdziwie (czy raczej — skutecznie) opisywać świat, należy już do fizyków.

Rozpatrzmy przykład z historii geometrii. Gdy w XIX wieku powstały geometrie nieeuklidesowe (przez zastąpienie piątego, niezależnego postulatu Euklidesa przez postulaty alternatywne), nikt nie przypuszczał, że nowe geometrie mają coś wspólnego z realnie istniejącym światem. Tymczasem już w początkach XX wieku okazało się, że geometria opisująca Wszechświat jest odmianą geometrii nieeuklidesowej. Można z tego wyciągnąć wniosek, że budowanie alternatywnych, niesprzecznych systemów nie jest pozbawione sensu. Każda niesprzeczna teoria matematyczna może okazać się dobrym narzędziem do opisu świata. Na dodatek, istnienie w fizycznym świecie modelu dla teorii matematycznej uznać można za pośredni dowód jej niesprzeczności[41].

Przytoczmy teraz poglądy Gödla:

> *obok intuicji istnieje inne (choć tylko prawdopodobne) kryterium prawdziwości aksjomatów matematycznych – ich owocność w matematyce i, można powiedzieć, także w fizyce*[42]*. Decyzja dotycząca prawdziwości* [aksjomatów] *jest także możliwa w inny sposób, a mianowicie przez indukcyjną analizę ich „sukcesu". Sukces oznacza tutaj owocność w sensie konsekwencji, w szczególności weryfikowalnych konsekwencji badanych aksjomatów.* [...] *Mogą istnieć aksjomaty tak owocne w sprawdzalne konsekwencje, rzucające tak dużo światła na dyscyplinę i dostarczające tak dobrych metod rozwiązywania problemów, że niezależnie od zagadnienia, czy są one wewnętrznie konieczne, powinny zostać zaakceptowane*

[41] Rozważając problem, czy istnieje nieskończoność aktualna mówi na przykład Hilbert: *tutaj musimy zbadać rozciągłość wszechświata, aby zbadać, czy istnieją w nim nieskończenie duże.* (Hilbert [1996], s. 291)

[42] Gödel [2002], s. 121.

> *przynajmniej w takim stopniu, jak dobrze ugruntowana teoria fizyczna*[43].

Jak widać, Gödel również dopuszczał pragmatyczne kryterium uznawania twierdzeń matematycznych. I choć intuicja matematyczna jest dla niego bez wątpienia podstawowym narzędziem poznawczym, to skuteczność zbudowanego systemu stanowi dobre, choć zawodne kryterium jego uzasadniania. Nie trzeba dodawać, że kryterium pragmatyczne jest do przyjęcia niezależnie od przekonań filozoficznych. Najlepszym na to dowodem jest fakt, że dwaj matematycy o tak różnych poglądach filozoficznych, jak Hilbert i Gödel, uznali je za doniosłe.

Literatura cytowana

Czeżowski, Tadeusz [1965] *Filozofia na rozdrożu*, PWN, Warszawa 1965

Dadaczyński, Jerzy [2002] *Filozofia matematyki w ujęciu historycznym*, Biblos, Tarnów

Dąmbska, Izydora [1978]*Idee Kantowskie w filozofii matematyki XX wieku,*w: Archiwum historii i myśli społecznej (24), ss. 167–213

Hilbert, David [1996] „Über das Unendliche”, przekład polski w: Murawski Stefan, *Filozofia matematyki. Antologia tekstów historycznych*, PWN, Warszawa, ss. 288–307

Hilbert, David [1901] *Mathematical Problems*, przekład angielski wykładu z 1900 roku (wydanego w roku 1901) na stronie: `<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/hilbert/problems.html>`

Hilbert, David; Bernays, Paul [1934] *Grundlagen der Matematik*, Springer Verlag, Berlin

[43] Gödel [2002], s. 113.

Hintikka, Jaakko [1998] „Hilbert vindicated?”, w: *Language, truth and logic in mathematics, Collected Works*, Kluwer Academic Publishers, ss. 84–105.

Hintikka, Jaakko [1991] „Kant's New Method of Though and his Theory of Mathematics”, w: *The Knowledge and the Known*, Kluwer Academic Publishers, ss. 126–134

Gödel, Kurt [1931] „Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Matematica und verwandter Systeme I”, w: Davis, Martin (wyd.) *The undecidable*, Ravin Press, New York 1965, ss. 5–37 (tłumaczenie angielskie)

Gödel, Kurt [1944] „Russell's mathematical logic”, w: *Collected works*, vol. II. Oxford 1990, ss. 119–153

Gödel, Kurt [1995] „The present situation in fundations of mathematics”, w: *Collected works*, vol. III, Oxford 1995, s. 47

Gödel, Kurt [2003] „What is Cantor's Continuum Problem?”, tł. polskie w: Murawski [2003], ss. 103 – 123.

Kant, Immanuel [2001] *Krytyka czystego rozumu*, przeł. R. Ingarden, Antyk, Kęty

Krajewski, Stanisław [2003] *Twierdzenie Gödla i jego implikacje filozoficzne*, Wydawnictwo Instytutu Filozofii i Socjologii PAN, Warszawa

Maddy, Penelope [1990] *Realism in mathematics*, Oxford

Maddy, Penelope [1997] *Naturalism in mathematics*, Oxford

Minois, Georges [1995] *Kościół i nauka*, Warszawa

Marciszewski, Witold (red.) [1987] *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny*, PWN, Warszawa

Murawski, Roman [1994] „Hilbert's Programm: Incompletness Theorem vs Partial Realizations”, w: Woleński [1994], ss. 103–127

Murawski, Roman [2000] *Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki*, Wydawnictwo UAM, Poznań

Murawski, Roman [2001] *Filozofia matematyki, zarys dziejów*, PWN, Warszawa

Murawski, Stefan (red.) [2002] *Współczesna filozofia matematyki. Wybór tekstów*, PWN, Warszawa

Nagel, Ernst; Newman, James R. [1996] *Gödel's Proof*, New York University Press,

Podsiad, Antoni [2001] *Słownik terminów i pojęć filozoficznych*, PAX, Warszawa

Simpson, Stephen [2002] „Partial Realizations of a Hilbert's Programm", przekład polski: „Częściowe realizacje programu Hilberta", w: Murawski [2002], ss. 189–213

Tarski, Alfred [1995] „Prawda i dowód", w: *Pisma logiczno–filozoficzne*, t. I, PWN, Warszawa, ss. 292–332

Woleński, Jan (red.) [1994] *Philosophical Logic in Poland*, Kluwer Academic Publishers

Wójtowicz, Krzysztof [2002] *Platonizm matematyczny. Studium filozofii matematyki Kurta Gödla*, Biblos, Tarnów

Wójtowicz, Krzysztof [2001] „O tzw. programie Gödla", *Zagadnienia Filozoficzne w Nauce*, XXVII/XXIX, ss. 100–117

Wójtowicz, Krzysztof [2002] „Reverse Mathematics and the Indispensability Argument", w: M. Tałasiewicz (red.) *Logic, Methodology nad Philosophy of Science at Warsaw University*, Semper, Warszawa 2002

Semina □ Scientiarum Nr 3 2004

Leszek Wroński

Twierdzenia Gödla — dowody. Czy arytmetyka jest w stanie dowieść własną niesprzeczność?

W tym krótkim opracowaniu chciałbym przedstawić dowody obu twierdzeń Gödla wykorzystujące warunki dowodliwości Löba, a także problem pewnej, być może zbyt pochopnie wysuwanej filozoficznej implikacji drugiego twierdzenia Gödla dotyczącego niedowiedlności niesprzeczności arytmetyki środkami samej arytmetyki.

1. Wstęp

Niech $\mathfrak{M} =< \mathbb{N}, +, \cdot, S, 0 >$ będzie tzw. modelem Peano, czyli standardowym modelem arytmetyki. Niech PA będzie systemem standardowo sformalizowanym opartym o następujące aksjomaty:

(1) $\forall x, y(Sx = Sy \rightarrow x = y)$

(2) $\forall x(\neg(0 = Sx))$

(3) $\forall x(x + 0 = x)$

(4) $\forall x, y(x + Sy = S(x + y))$

(5) $\forall x(x \cdot 0 = 0)$

(6) $\forall x, y(x \cdot Sy = x \cdot y + x)$

(7) $[\alpha(0) \wedge \forall x[\alpha(x) \rightarrow \alpha(S(x))]] \rightarrow \forall x \alpha(x)$

(oczywiście, (7) powyżej to schemat nieskończenie wielu aksjomatów).

Łatwo dowieść, iż $\mathfrak{M} \models PA$, tak więc możemy stwierdzić, co następuje:

Twierdzenie 1.1 *PA jest teorią niesprzeczną.*

Jasne jest, że zbiór aksjomatów PA jest rozstrzygalny, czyli istnieje algorytm rozpoznawania aksjomatów PA w zbiorze wszystkich formuł języka arytmetyki. Pierwsze twierdzenie Gödla pokazuje, iż arytmetyka PA jest istotnie niezupełna, czyli niezupełne jest każde jej rozszerzenie o rozstrzygalnym zbiorze aksjomatów.

Definicja 1.2 *Mówimy, że wyrażona w języku teorii PA formuła $\alpha(x_1, \ldots x_k)$ mocno reprezentuje relację $R \subseteq \mathbb{N}^k$ jeśli dla dowolnych $n_1, \ldots n_k$ jest tak, iż*

(1) $< n_1, \ldots n_k > \in R \Rightarrow PA \vdash \alpha(\overline{n_1}, \ldots \overline{n_k})$

(2) $< n_1, \ldots n_k > \notin R \Rightarrow PA \vdash \neg\alpha(\overline{n_1}, \ldots \overline{n_k})$,

gdzie $\overline{n_1}, \ldots \overline{n_k}$ są tzw. termami kanonicznymi, które w języku arytmetyki desygnują liczby naturalne — term oznaczający liczbę n ma postać $\underbrace{SS \ldots S}_{n-razy}0$.

W dalszym ciągu — dla uproszczenia notacji — liczbę oraz desygnujący ją term będziemy często oznaczać tym samym symbolem w sytuacjach, w których kontekst nie pozostawia wątpliwości co do tego, co mamy na myśli. Zakładam, iż Czytelnikowi znana jest jakaś metoda arytmetyzacji, czyli jednoznacznego przyporządkowania liczb naturalnych wyrażeniom języka arytmetyki. Może być to metoda samego Gödla, albo np. Smullyana lub Boolosa. Nie będzie dla nas ważny sposób dokonania arytmetyzacji, lecz tylko fakt, iż jest ona możliwa. Numer Gödla formuły α będziemy oznaczać często używanym symbolem $\ulcorner\alpha\urcorner$. Wprowadźmy następujące relacje:

Definicja 1.3 *Prf(a,b)* wtw *a jest numerem Gödla dowodu formuły o numerze Gödla b.*

Definicja 1.4 *Pr(a)* wtw $\exists x : Prf(x, a)$
(w obu definicjach $a, b, x \in \mathbb{N}$*).*

Dla dowodu twierdzeń Gödla potrzebny nam będzie następujący fakt:

Fakt 1.5 *Relacja* Prf *jest mocno reprezentowalna w teorii* PA*.*

Dla uproszczenia notacji używać będziemy tego samego symbolu na określenie relacji Prf oraz formuły w języku PA, która ową relację mocno reprezentuje. Łatwo udowodnić następujący fakt:

Fakt 1.6 *Dla dowolnej formuły* α*, jeśli numer Gödla* $\ulcorner\alpha\urcorner$ *ma własność* Pr*, to* $PA \vdash \alpha$*.*

Przypomnijmy, że w zależności od kontekstu symbol Prf będzie oznaczał relację zawartą w $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ lub formułę arytmetyczną z dwiema zmiennymi wolnymi, która tę relację mocno reprezentuje w PA.

Definicja 1.7 *Mówimy, że formuła* $\varphi(x, y, z)$ *mocno reprezentuje funkcję* f $(f : \mathbb{N}^2 \mapsto \mathbb{N})$*, jeżeli dla dowolnych* $n, m \in \mathbb{N}$ *jest tak, że*

$$PA \vdash \forall z[\varphi(\overline{n}, \overline{m}, z) \leftrightarrow [z = \overline{f(n, m)}]].$$

Tak więc reprezentacją k-argumentowej funkcji jest formuła z $k + 1$ zmiennymi wolnymi.

Rozważmy funkcję $Sub : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. Niech $Sub(\ulcorner\alpha\urcorner, n) = \ulcorner\alpha(x/\overline{n})\urcorner$, jeśli pierwszy argument jest numerem formuły, zaś w innym przypadku wartość funkcji nie jest określona. Wiemy, iż prawdziwy jest następujący fakt:

Fakt 1.8 *Istnieje formuła arytmetyczna* $\mathfrak{S}(x, y, z)$*, która mocno reprezentuje w* PA *funkcję* Sub*.*

Udowodnijmy następujące twierdzenie, zwane „lematem przekątniowym”:

Twierdzenie 1.9 *Dla dowolnej formuły arytmetycznej $\theta(x)$ zawierającej dokładnie jedną zmienną wolną x istnieje zdanie Δ takie, że*

$$PA \vdash \Delta \leftrightarrow \theta(\overline{\ulcorner\Delta\urcorner}).$$

Dowód: Nasze intuicje co do zdania Δ można wyrazić stwierdzeniem, iż mówi ono „Mój numer ma własność θ”. Zdefiniujmy formułę $\Gamma(x)$ z jedną zmienną wolną:

$$\Gamma(x) \stackrel{\text{def}}{=} \forall y[\mathfrak{S}(x,x,y) \rightarrow \theta(y)].$$

Niech $n = \ulcorner\Gamma(x)\urcorner$. Zdefiniujmy tak oto zdanie Δ:

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma(x/\overline{n}) \tag{1}$$

czyli

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \forall y[\mathfrak{S}(\overline{n},\overline{n},y) \rightarrow \theta(y)].$$

Wiemy, że $PA \vdash \Delta \leftrightarrow \Delta$, a zatem

$$PA \vdash \Delta \leftrightarrow \forall y[\mathfrak{S}(\overline{n},\overline{n},y) \rightarrow \theta(y)]. \tag{2}$$

Fakty, iż formuła $\mathfrak{S}$ mocno reprezentuje w PA funkcję Sub, a także, iż $n = \ulcorner\Gamma(x)\urcorner$ implikują[1]:

$$PA \vdash \forall y[\mathfrak{S}(\overline{n},\overline{n},y) \leftrightarrow y = \overline{\ulcorner\Gamma(\overline{n})\urcorner}]. \tag{3}$$

Z (2) i (3) otrzymujemy

$$PA \vdash \Delta \leftrightarrow \forall y[(y = \overline{\ulcorner\Gamma(\overline{n})\urcorner}) \rightarrow \theta(y)]. \tag{4}$$

Na mocy definicji (1):

$$\overline{\ulcorner\Gamma(\overline{n})\urcorner} = \overline{\ulcorner\Delta\urcorner}.$$

[1]Stosujemy def. 1.7 do funkcji Sub i reprezentującej ją formuły $\mathfrak{S}$.

Po podstawieniu do (4) otrzymujemy:

$$PA \vdash \Delta \leftrightarrow \forall y[(y = \overline{\ulcorner \Delta \urcorner}) \rightarrow \theta(y)],$$

czyli

$$PA \vdash \Delta \leftrightarrow \theta(\overline{\ulcorner \Delta \urcorner}).$$

Q.E.D.

Dowody twierdzeń Gödla sprowadzają się do zwykłego rachunku zdań przy założeniu tzw. warunków dowodliwości Löba:

(D1) jeśli $PA \vdash \varphi$, to PA $\vdash Pr(\ulcorner \varphi \urcorner)$

(D2) $PA \vdash Pr(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow Pr(\ulcorner Pr(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$

(D3) $PA \vdash [Pr(\ulcorner \varphi \urcorner) \wedge Pr(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner)] \rightarrow Pr(\ulcorner \psi \urcorner)$

2. Twierdzenia Gödla

Poniżej wykorzystywać będziemy zdanie φ_g, które wyraża własną niedowodliwość środkami PA. Fakt, iż owo zdanie da się napisać w języku arytmetyki uzasadniamy powołując się na (1.5) oraz (1.9).

Twierdzenie 2.1 (I twierdzenie Gödla) *Niech φ_g będzie takim zdaniem języka PA, że $PA \vdash \varphi_g \leftrightarrow \neg Pr(\ulcorner \varphi_g \urcorner)$. Wtedy:*

(i) $PA \nvdash \varphi_g$

(ii) $PA \nvdash \neg\varphi_g$.

Dowód: Najpierw dowiedziemy warunku (i). Załóżmy, że $PA \vdash \varphi_g$. Wtedy, z warunku D1 mamy $PA \vdash Pr(\ulcorner \varphi_g \urcorner)$. Ponieważ $PA \vdash \neg\varphi_g \leftrightarrow Pr(\ulcorner \varphi_g \urcorner)$, otrzymujemy wniosek, iż $PA \vdash \neg\varphi_g$, dochodzimy więc do sprzeczności z twierdzeniem (1.1). Zatem $PA \nvdash \varphi_g$.

Następnie dowiedziemy warunku (ii). Załóżmy, że $PA \vdash \neg\varphi_g$. Zatem $PA \vdash Pr(\ulcorner \varphi_g \urcorner)$, czyli, z faktu (1.6), $PA \vdash \varphi_g$, co prowadzi do sprzeczności. Tak więc $PA \nvdash \neg\varphi_g$. Q.E.D.

Twierdzenie 2.2 (II twierdzenie Gödla) *Niech* Con_{PA} *oznacza formułę* $\neg Pr(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$. *Wtedy* $PA \nvdash Con_{PA}$.

Dowód: Niech φ_g będzie zdaniem takim, że $PA \vdash \varphi_g \leftrightarrow \neg Pr(\ulcorner \varphi_g \urcorner)$. Chcemy pokazać, że $PA \vdash \varphi_g \leftrightarrow Con_{PA}$.

Udowodnimy najpierw implikację w prawo, $PA \vdash \varphi_g \rightarrow Con_{PA}$. Zauważmy, że $PA \vdash (0 = 1) \rightarrow \varphi_g$. Z warunku D1 otrzymujemy: $PA \vdash Pr(\ulcorner (0 = 1) \rightarrow \varphi_g \urcorner)$. Po wykorzystaniu warunku D3 mamy: $PA \vdash Pr(\ulcorner 0 = 1 \urcorner) \rightarrow Pr(\ulcorner \varphi_g \urcorner)$. Po zastosowaniu prawa kontrapozycji: $PA \vdash \neg Pr(\ulcorner \varphi_g \urcorner) \rightarrow \neg Pr(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$. Z definicji φ_g: $PA \vdash \varphi_g \rightarrow \neg Pr(\ulcorner \varphi_g \urcorner)$. Zatem, z przechodniości implikacji, $PA \vdash \varphi_g \rightarrow \neg Pr(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$, czyli $PA \vdash \varphi_g \rightarrow Con_{PA}$.

Następnie udowodnijmy implikację w lewo,
$PA \vdash Con_{PA} \rightarrow \varphi_g$.

Z definicji φ_g mamy

$$PA \vdash \varphi_g \rightarrow \neg Pr(\ulcorner \varphi_g \urcorner)$$

z czego po zastosowaniu transpozycji wynika

$$PA \vdash Pr(\ulcorner \varphi_g \urcorner) \rightarrow \neg \varphi_g.$$

Z warunku D1 otrzymujemy

$$PA \vdash Pr(\ulcorner Pr(\ulcorner \varphi_g \urcorner) \rightarrow \neg \varphi_g \urcorner)$$

zaś po zastosowaniu warunku D3

$$PA \vdash Pr(\ulcorner Pr(\ulcorner \varphi_g \urcorner) \urcorner) \rightarrow Pr(\ulcorner \neg \varphi_g \urcorner). \tag{5}$$

Z D2, (5) oraz przechodniości implikacji otrzymujemy

$$PA \vdash Pr(\ulcorner \varphi_g \urcorner) \rightarrow Pr(\ulcorner \neg \varphi_g \urcorner). \tag{6}$$

Wiemy, że $PA \vdash \varphi_g \rightarrow (\neg \varphi_g \rightarrow (\varphi_g \wedge \neg \varphi_g))$. Zatem, na mocy D1 i D3, otrzymujemy

$$PA \vdash Pr(\ulcorner \varphi_g \urcorner) \rightarrow (Pr(\ulcorner \neg \varphi_g \urcorner) \rightarrow Pr(\ulcorner \varphi_g \wedge \neg \varphi_g \urcorner))$$

a zatem, po zastosowaniu prawa komutacji,

$$PA \vdash Pr(\ulcorner \neg\varphi_g \urcorner) \to (Pr(\ulcorner \varphi_g \urcorner) \to Pr(\ulcorner \varphi_g \wedge \neg\varphi_g \urcorner)). \qquad (7)$$

Z samorozdzielności implikacji i prawa komutacji otrzymujemy tautologię

$$[p \to (q \to r)] \to [(q \to p) \to (q \to r)]$$

Za zmienną p podstawiamy $Pr(\ulcorner \neg\varphi_g \urcorner)$, za q $Pr(\ulcorner \varphi_g \urcorner)$ oraz za r $Pr(\ulcorner \varphi_g \wedge \neg\varphi_g \urcorner)$, by otrzymać

$$PA \vdash [Pr(\ulcorner \neg\varphi_g \urcorner) \to (Pr(\ulcorner \varphi_g \urcorner) \to Pr(\ulcorner \varphi_g \wedge \neg\varphi_g \urcorner))] \to$$
$$\to [(Pr(\ulcorner \varphi_g \urcorner) \to Pr(\ulcorner \neg\varphi_g \urcorner)) \to (Pr(\ulcorner \varphi_g \urcorner) \to Pr(\ulcorner \varphi_g \wedge \neg\varphi_g \urcorner))]$$

Odrywamy (7), (6) i otrzymujemy

$$PA \vdash Pr(\ulcorner \varphi_g \urcorner) \to Pr(\ulcorner \varphi_g \wedge \neg\varphi_g \urcorner) \qquad (8)$$

Wiemy, że $PA \vdash (\varphi_g \wedge \neg\varphi_g) \leftrightarrow (0 = 1)$. Zatem w szczególności $PA \vdash (\varphi_g \wedge \neg\varphi_g) \to (0 = 1)$. Z warunków D1 i D3 otrzymujemy:

$$PA \vdash Pr(\ulcorner \varphi_g \wedge \neg\varphi_g \urcorner) \to Pr(\ulcorner 0 = 1 \urcorner). \qquad (9)$$

Z (8) i przechodniości implikacji mamy

$$PA \vdash Pr(\ulcorner \varphi_g \urcorner) \to Pr(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$$

a zatem (z prawa kontrapozycji)

$$PA \vdash \neg Pr(\ulcorner 0 = 1 \urcorner) \to \neg Pr(\ulcorner \varphi_g \urcorner)$$

Z definicji Con_{PA} i φ_g mamy

$$PA \vdash Con_{PA} \to \varphi_g,$$

co chcieliśmy udowodnić.

Wnioskujemy więc, że $PA \vdash \varphi_g \leftrightarrow Con_{PA}$. Z udowodnionego wyżej pierwszego twierdzenia Gödla wiemy, że $PA \nvdash \varphi_g$. Zatem $PA \nvdash Con_{PA}$. Q.E.D.

3. Niesprzeczność arytmetyki

Często słyszy sie pogląd, iż drugie twierdzenie Gödla implikuje niedowiedlność niesprzeczności arytmetyki środkami samej arytmetyki. Można by sądzić, iż dobrą interpretacją powyższego poglądu jest następujące zdanie (występujący w nim symbol „$\perp$” oznacza wybraną „formułę absurdalną” (np. „$\neg(0 = 0)$”): nie może ona być twierdzeniem żadnej niesprzecznej teorii zawierającej arytmetykę):

Nie istnieje formuła arytmetyczna $\gamma(x)$ taka, że

(1) dla dowolnej formuły α, $PA \vdash \alpha$ wtw $PA \vdash \gamma(\ulcorner\alpha\urcorner)$ (czyli formuła γ wyraża dowiedlność w PA)

(2) $PA \vdash \neg\gamma(\ulcorner\perp\urcorner)$.

Jednakże zdanie powyższe jest fałszywe. Zdefiniujmy $\gamma(x)$ tak oto:

$$\gamma(x) \leftrightarrow \exists y[Prf(y, x) \wedge (x \neq \ulcorner\perp\urcorner)]$$

Jeśli $PA \vdash \alpha$ to, wobec niesprzeczności arytmetyki, $\ulcorner\alpha\urcorner \neq \ulcorner\perp\urcorner$; tak więc (ponieważ relacja różności między liczbami naturalnymi jest mocno reprezentowalna w PA) $PA \vdash (\ulcorner\alpha\urcorner \neq \ulcorner\perp\urcorner)$. Zatem

$$PA \vdash \exists y[Prf(y, \ulcorner\alpha\urcorner) \wedge (\ulcorner\alpha\urcorner \neq \ulcorner\perp\urcorner)]$$

z czego wnioskujemy, iż $PA \vdash \gamma(\ulcorner\alpha\urcorner)$. Mamy więc implikację w lewo z powyższego warunku (1). Implikacja w prawo jest oczywista z definicji własności Prf.

Aby dowieść warunku (2) zauważamy, że

$$\neg\gamma(\ulcorner\perp\urcorner) \leftrightarrow \neg\exists y : (Prf(y, \ulcorner\perp\urcorner) \wedge (\ulcorner\perp\urcorner \neq \ulcorner\perp\urcorner)) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \forall y : (Prf(y, \ulcorner\perp\urcorner) \rightarrow (\ulcorner\perp\urcorner = \ulcorner\perp\urcorner))$$

zaś to ostatnie jest prawem logiki.

Stajemy więc w obliczu takiej sytuacji: wiemy, iż

$$PA \vdash \alpha \text{ wtw } PA \vdash Pr(\ulcorner\alpha\urcorner) \text{ wtw } PA \vdash \gamma(\ulcorner\alpha\urcorner)$$

a także

$$PA \vdash \neg\gamma(\ulcorner\bot\urcorner)$$

oraz (z poprzedniego twierdzenia)

$$PA \nvdash \neg Pr(\ulcorner\bot\urcorner)$$

Tak więc istnieje formuła arytmetyczna $\gamma(x)$ wyrażająca dowiedlność w PA i taka, że $PA \vdash \neg\gamma(\ulcorner\bot\urcorner)$. Widać stąd, iż drugie twierdzenie Gödla wymaga, by formuła Pr wybrana została w sposób „właściwy”, tak, by miała pożądany sens arytmetyczny. Może się bowiem zdarzyć, iż dla odpowiednio skonstruowanej formuły Pr_1 formuła

$$Pr(\ulcorner\alpha\urcorner) \leftrightarrow Pr_1(\ulcorner\alpha\urcorner)$$

będzie prawdziwa w modelu $\mathfrak{M}$ (czyli $Th(\mathfrak{M}) \models Pr(\ulcorner\alpha\urcorner) \leftrightarrow Pr_1(\ulcorner\alpha\urcorner)$), ale nie będzie twierdzeniem PA (z pierwszego twierdzenia Gödla wiemy, że jest to możliwe)[2].

[2]Podane tu informacje można w dużej części znaleźć w książce Romana Murawskiego „Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki” (Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2000) oraz drugim wykładzie z „Foundational Studies” Andrzeja Mostowskiego (PWN 1979).

Semina ☐ Scientiarum Nr 3 2004

Robert Piechowicz

Dlaczego twierdzenia Gödla inspirują filozofów?

Tak zwane twierdzenia Gödla należą chyba do najczęściej komentowanych wyników (meta)matematycznych. Niestety liczba poświęconych im publikacji jest odwrotnie proporcjonalna do jakości zawartych w nich rozważań. Aby więc nie powiększać ilości inspirowanych twierdzeniami Gödla spekulacji o wysokim stopniu dowolności w niniejszej pracy przedyskutuję, jakie cechy tych twierdzeń decydują o ich atrakcyjności dla filozofii. Jako punkt wyjścia przyjmuję następującą listę takich cech podaną przez Krajewskiego:

1. kontekst filozoficzny w którym się pojawiły,
2. ogólność,
3. paradoksalność[1].

Część pierwsza i druga niniejszej pracy będą miały charakter historyczny; zrekonstruuję w nich wspomniany kontekst filozoficzny twierdzeń Gödla, gdyż charakterystyka pozostałych cech wymaga jego znajomości. W części trzeciej przedyskutuję wymienione cechy, zaś całość niniejszej pracy zakończę krótkim podsumowaniem.

[1] S. Krajewski, *Czy twierdzenia Gödla mają zastosowanie filozoficzne?*, [w:] J. Perzanowski, A. Pietrszuczak, *Byt, Logos, Matematyka*, Wydawnictwo UMK, Toruń 1995, s. 399.

Pytanie o jedność matematyki

Głównym problemem matematyki XIX i początku XX stulecia była jej jedność i spójność. Pojawił się on z uwagi na bogactwo i różnorodność rezultatów działalności matematyków, ponieważ nie potrafili oni wskazać, co jest podstawą matematycznego charakteru tych teorii ani zależności pomiędzy nimi. *Gdy na dodatek próby wskazywania dyscyplin unifikujących prowadziły do znacznego powiększenia liczby proponowanych matematyce dróg (algebra) czy też wręcz wyprowadzały ją na bezdroża, gdzie problem spójności ustępował lękowi o zasadność jej istnienia (teoria mnogości), sprawa uporządkowania matematyki stawała się dla wielu jej twórców kwestią pierwszoplanową*[2]. Innymi słowy, matematyka wymagała unifikacji oraz systematyzacji, to znaczy uporządkowania poszczególnych teorii i wskazania zależności pomiędzy nimi[3]. Dwie główne propozycje to sformułowany przez F. Kleina program erlangeński oraz program Hilberta[4].

Klein wskazywał, że należy badać obiekty matematyczne a nie teorie. To, że w matematyce występuje wiele różnorodnych teorii, jest konsekwencją aspektowości poznania matematycznego; jedynie *pojęcia matematyki mają [...] swój (niezawisły) byt podglądany przez nas za pomocą naszych (różnych) matematycznych teorii*[5]. Według Kleina podobieństwo teorii jest oparte na odniesieniu do tych samych obiektów. Jednak z różnych względów matematycy wybrali drugą propozycję, w myśl której należy skoncentrować się na teoriach, nie zaś na obiektach. Istotą teorii matematycznej jest nie to, o czym ona mówi, lecz sposób w jaki jest skonstruowana.

[2] M. Kordos, *Wykłady z historii matematyki*, WSiP, Warszawa 1994, s. 245.

[3] Por. J. Dadaczyński, *Filozofia matematyki w ujęciu historycznym*, OBI – Kraków, Biblos – Tarnów 2000, s. 22.

[4] Program ten stworzył M. Pasch; Hilbert rozwiną go i przede wszystkim upowszechnił. W niniejszej pracy używam pojęcia „program Hilberta” zamiast „program Pascha”, gdyż nie jest moim celem reformowanie zastanego kanonu terminologicznego.

[5] M. Kordos, *op. cit*, s. 246.

Zalecany przez Pascha syntaktyczny rygoryzm stał się kryterium unifikacji matematyki i ułatwił — prowadzoną już — jej systematyzację.

Rezultatem działalności matematyków było nie tylko wskazanie odpowiednich zależności pomiędzy teoriami, ale również wyodrębnienie arytmetyki liczb naturalnych jako teorii podstawowej. Wraz z tym pojawiła się kontrowersja co do tego, czy podstawy matematyki to właśnie arytmetyka, czy też istnieje dyscyplina bardziej fundamentalna.

Problem podstaw

Zagadnienie istnienia i charakteru podstaw matematyki związane jest z pytaniem o *ignorabimus* w tej dziedzinie. Skoro bowiem matematycy nie wiedzieliby, jak ich dyscyplina jest ufundowana, to działalność matematyczną można by uznać — na przykład — za przejaw jakiegoś zbiorowego szaleństwa czy też zrozumiałą tylko dla nielicznych, działalność magiczną. Nieznajomość pewnego szczegółowego twierdzenia czy problem ze znalezieniem dowodu nie jest tak zasadniczym mankamentem, jak brak wiedzy dotyczącej najbardziej podstawowych struktur. Zaproponowano dwa rozwiązania tego problemu. Z jednej strony, L. Kronecker w swojej słynnej wypowiedzi wskazał, że obiekty arytmetyki są *po prostu*dane; rozważania dotyczące ich natury nie będą miały matematycznego, lecz — co najwyżej — filozoficzny charakter. Na szczęście nie wszyscy matematycy przejęli się kroneckerowskim *dictum*; podjęto próby wyprowadzenia arytmetyki liczb naturalnych z bardziej podstawowej dyscypliny, mianowicie teorii mnogości.

Jako pierwszy próbę taką podjął G. Frege mniej więcej w tym samym czasie, gdy pojawiła się propozycja Pascha. Frege stwierdził, iż *teorię mnogości trzeba wyprodukować jakoś tam, ale jeśliby się już ją miało, to z niej wyprodukuje się arytmetykę liczb natural-*

nych[6]; co więcej *sam Frege nie ma ambicji zajmowania się teorią mnogości i zaczyna od zbudowania w teorii mnogości arytmetyki liczb naturalnych*[7]. Brak dobrze skonstruowanej teorii mnogości miał dla koncepcji Fregego poważne konsekwencje — teoria ta prowadziła do antynomii[8]. Problemy z teorią mnogości zmusiły matematyków do ponownego zrewidowania podstaw swojej dyscypliny i stosowanych w niej metod. W rezultacie pojawiły się trzy odrębne propozycje metodologiczne: intuicjonizm, formalizm i tzw. poprawiony logicyzm[9].

Intuicjoniści wskazywali, że problemy podstaw matematyki są konsekwencją niefrasobliwości jej twórców; dlatego należy wprowadzić ograniczenia metodologiczne. Według intuicjonistów matematyka musi być oparta na pierwotnej intuicji liczb naturalnych i zasadzie indukcji; a zatem rozwiązując problem podstaw matematyki poszli oni w ślady Kroneckera. Z kolei w odniesieniu do procedur dowodowych dopuszczali dowody istnienia, o ile mają one charakter konstrukcyjny[10]. *Oszczędność metodologiczna intuicjonistów chroniła ich skutecznie przed paradoksami [...] niestety chroniła ich także przed ogromną częścią matematyki*[11]; z tego względu stanowisko to nie było dla matematyków zadowalające.

Logicyści — podobnie jak Frege — postulowali, że arytmetyka liczb naturalnych jest wyprowadzalna z teorii mnogości[12]; przedstawienie takiej konstrukcji wymaga skonstruowania systemu, w którym nie dałoby się odtworzyć – nie tylko aktualnie zna-

---

[6] M. Kordos, *op. cit*, s. 280. Teoria mnogości o której pisze Kordos to — ściśle rzecz biorąc — fragment logiki drugiego rzędu.

[7] *Ibid.*

[8] Była to tak zwana antynomia Russella.

[9] Logicyzm poprawiony to logicyzm w wersji Russella i Whiteheada.

[10] J. Dadaczyński, *op. cit*, s. 354.

[11] M. Kordos, *op. cit*, s. 282.

[12] Nazwa kierunku sugeruje, iż matematyka miała być wyprowadzalna z logiki. Realizacja tego przedsięwzięcia wykroczyła poza wcześniejsze deklaracje, *realizując idee logicyzmu, zredukowano matematykę nie do logiki, lecz do (przynajmniej pewnego fragmentu) teorii mnogości.* Zob. J. Dadaczyński, *op. cit*, s. 231.

nych ale jakichkolwiek – antynomii. Ambicje logicystów znalazły wyraz w monumentalnych *Principia mathematica* Russella i Whiteheada. Aby właściwie ocenić doniosłość tej pracy przypomnijmy sobie, że twierdzenie o niezupełności podane przez Gödla dotyczy między innymi systemu tam zawartego[13].

Formalizm z kolei był przede wszystkim dokładniejszą realizacją koncepcji Pascha; a zatem, według przedstawicieli tego kierunku, teorie w matematyce są określone jedynie syntaktycznie. Postulat ten miał umożliwić zachowanie całej dotychczasowej matematyki oraz uniknięcie wyprowadzania jej z teorii mnogości; formalizm był więc alternatywą tak dla intuicjonizmu, jak i dla logicyzmu. Podstawową dyscypliną matematyki jest zatem arytmetyka liczb naturalnych, a jako główny problem podstaw matematyki formaliści wskazali niesprzeczność i zupełność. Cała dotychczasowa matematyka byłaby zatem niesprzeczna i zupełna, o ile cechy te posiadałaby arytmetyka. Obie sugestie i próby ich dowiedzenia zostały podważone przez twierdzenia Gödla.

Kontekst, ogólność i paradoksalność

Twierdzenia Gödla rozwiały filozoficzne oraz metodologiczne pretensje logicyzmu i formalizmu; mimo to sądzę, że — wbrew sugestiom Krajewskiego — kontekst filozoficzny tych twierdzeń to nie tylko wspomniane kierunki badania podstaw matematyki[14]. Zarówno program Hilberta, jak i logicyzm należały do pewnego — zainicjowanego w XIX stuleciu — nurtu badań metamatematycznych, który miał na celu uporządkowanie matematyki i wyodrębnienie dyscypliny podstawowej. Twierdzenia Gödla są jego końcowym rezultatem.

Oba twierdzenia nie dotyczą jakiejś konkretnej teorii formalnej — z tego względu są one ogólne. Ich założenia wymagają, by układ

[13]Tytuł pracy Gödla, w której znajduje się to twierdzenie wraz z dowodem, brzmi *Über formal unentscheidbare Sätze der „Principia mathematica" und verwandter Systeme.*

[14]Por. S. Krajewski, *op. cit*, s. 399.

aksjomatów teorii, do której można je zastosować pozwalał na rekonstrukcję arytmetyki liczb naturalnych. Z formalnego punktu widzenia nie jest to wymóg zbyt silny; ma on jednak istotne konsekwencje — teoria taka jest niezupełna, a jej niesprzeczności nie da się dowieść bez wykorzystania konstrukcji spoza tej teorii. A zatem twierdzenia Gödla mówią *coś, i to coś bardzo podstawowego, o całej teorii, całym systemie*[15].

Wynik Gödla jest paradoksalny tak ze względu na swoją konstrukcję, jak i z uwagi na konsekwencje dla filozofii matematyki. Jednakże pierwszy przypadek jest interesujący jedynie dla kogoś, kto zna lub chce poznać te twierdzenia od strony formalnej; problematyka ta jest w rozważaniach filozoficznych prawie nieobecna – większość inspiracji Gödlowskich to analizy i próby ekstrapolacji konsekwencji filozoficznych.

Filozoficzna paradoksalność twierdzeń Gödla związana jest z wyróżnionym miejscem matematyki w dziejach ludzkiej myśli; wyjątkowość tej dziedziny nie uległa zmianie mimo pojawiających się podczas jej rozwoju problemów, ani mimo zwiększającej się abstrakcyjności. Dopiero wynik Gödla wskazał na potrzebę zrewidowania rozmaitych filozoficznych deklaracji. Jego dokonanie wskazuje bowiem na niemożliwość usunięcia z matematyki takich pojęć, jak sens czy intuicja; innymi słowy *aby cokolwiek mogło być sformalizowane, coś innego musi pozostać niesformalizowane*[16]. Matematycy – w odróżnieniu od filozofów — zazwyczaj byli i są tego świadomi. Zapewne dlatego obecne w niektórych filozoficznych komentarzach pesymistyczne wnioski są im obce[17]. Twórcza aktywność matematyków świadczy o tym, że są oni przekonani o sensowności uprawiania swojej dziedziny.

---

[15] *Ibid.*

[16] J. Woleński, Metamatematyka a epistemologia, PWN, Warszawa 1993, s. 32.

[17] Warto zwrócić uwagę na wypowiedzi samego Gödla. Zob. K. Wójtowicz, Platonizm matematyczny, OBI – Kraków, Biblos – Tarnów, 2002 oraz A. Brożek, Russell i Gödel — filozofowie, paradoksy i broda Platona, „Semina Scientiarum", 2 (2003), ss. 30 – 45.

Zakończenie

Dotychczasowa argumentacja miała wskazać, jakie cechy posiadają twierdzenia Gödla. Czy są to jednak cechy decydujące o filozoficznej atrakcyjności tychże twierdzeń? Pozytywną odpowiedź na to pytanie uzasadnię nie wprost. Zauważmy bowiem, iż twierdzenia nie posiadające którejś z wymienionych cech nie spotkały się z podobnym zainteresowaniem; na przykład:

a) twierdzenie Lindenbauma (o nadystemach zupełnych) jest ogólne i paradoksalne, ale pozbawione odpowiedniego kontekstu;

b) lemat Craiga jest z kolei ogólny i ma pewien kontekst, ale pozbawiony jest paradoksalności;

c) twierdzenie Banacha–Tarskiego (o paradoksalnym rozkładzie kuli) posiada odpowiedni kontekst, jest paradoksalne, ale ma charakter szczegółowy;

d) twierdzenie o antypodach — jest ono paradoksalne, nie ma zaś kontekstu i jest szczegółowe.

Oczywiście w oparciu o podane kontrprzykłady nie można rozstrzygnąć tego, czy lista rozważanych w niniejszym artykule cech jest pełna; wskazują one natomiast na to, że wymienione cechy stanowią istotną charakterystykę twierdzeń Gödla.

Semina □ Nr 3
Scientiarum 2004

Anna Tomaszewska

Twierdzenie Gödla a filozofia umysłu. W sprawie pewnej dwuznaczności argumentu Lucasa

1.

Co mają wspólnego artykuł Gödla z 1931 roku o zdaniach formalnie nierozstrzygalnych w systemie *Principia Mathematica* i filozofia umysłu? Z punktu widzenia nie uprawiającego filozofii matematyka czy logika być może niewiele, natomiast z punktu widzenia filozofa umysłu czy epistemologa – wprost przeciwnie: filozofowie uważają, że korzystając przede wszystkim z osiągnięć z zakresu metamatematyki (choć w filozoficznych rozważaniach uwzględnia się przeważnie w równym stopniu odkrycia z zakresu nauk przyrodniczych), mogą dowodzić twierdzeń o charakterze wyłącznie filozoficznym, a nawet metafizycznym. Niekiedy żywią przekonanie, że rozstrzygnięcia dotyczące zagadnień matematycznych czy metamatematycznych, wykorzystane w filozoficznych sporach, umożliwią ostateczne rozwiązanie niejako z definicji nierozwiązywalnych problemów filozoficznych albo – co wydaje się niezwykle istotne – „oczyszczenie" filozofii z ogromnej liczby błędnych mniemań, „metafizycznych iluzji", „nonsensów" itp. Przykładowo, Kazimierz Ajdukiewicz, korzystając z twierdzenia Gödla o niezupełności arytmetyki, dowodził fałszywości idealizmu transcendentalnego w ujęciu Rickerta[1]. John R. Lucas, w oparciu o to

[1] Por. K. Ajdukiwewicz, *Problemat transcendentalnego idealizmu w sformułowaniu semantycznym* [w:] *Język i poznanie*, Warszawa 1985, t. I.

samo twierdzenie, usiłował wykazać fałszywość mechanicyzmu[2], tj. poglądu, zgodnie z którym można skonstruować model umysłu ludzkiego nie różniący się istotnie od modelu skonstruowanego dla maszyny. W niniejszej pracy zajmę się argumentem zaproponowanym przez Lucasa.

Zanim jednak zostanie przedstawiona struktura tego argumentu, należałoby przybliżyć treść pierwszego twierdzenia Gödla. Artykuł Gödla[3] zaczyna się nawiązaniem do programu formalizacji matematyki Hilberta. Jeden z postulatów tego programu wyrazić można w najprostszy sposób tak: zdanie, które jest prawdziwe w danym systemie formalnym, daje się w nim w skończonej liczbie kroków dowieść przy użyciu środków, jakich ten system dostarcza (czyli zestawu znaków i procedur konstruowania z nich wyrażeń, aksjomatów systemu i obowiązujących w nim reguł inferencji) i na odwrót: zdanie, które daje się w danym systemie formalnym udowodnić, jest w nim prawdziwe, czyli jest tezą tego systemu. Tym samym po udowodnieniu powyższych zależności ustalona zostałaby koekstensjonalność odnoszących się do zdań predykatów „prawdziwy" i „mający dowód", przy czym tak rozumiana prawdziwość przestaje być pojęciem semantycznym, lecz zostaje zredukowana do własności syntaktycznej. Procedurę rozstrzygania, czy dane zdanie jest, czy też nie jest tezą danego systemu formalnego, można nazwać mechaniczną. Sposób postępowania, mający na celu przedłożenie dowodu tego zdania, zostaje bowiem ściśle wyznaczony przez określenie, jakiego rodzaju operacje można wykonywać na pewnych wyrażeniach, przy czym nie bierze się pod uwagę ich znaczenia, a tylko poprawność syntaktyczną (czyli uwzględnia się fakt, czy są poprawnie zbudowane).

---

[2]Por. J. R. Lucas, *Minds, Machines and Gödel*, Philosophy 36, 1961; artykuł można znaleźć także na stronie internetowej: `<http://users.ox.ac.uk/~jrlucas/Godel/mmg.html>`.

[3]Opieram się na angielskiej wersji tego artykułu: *On Formally Undecidable Propositions of 'Principia Mathematica' and Related Systems I* [w:] *Goedel's Theorem in Focus*, ed. G. S. Shanker, London 1988.

Ideę pierwszego twierdzenia Gödla można wyrazić tak: dla każdego niesprzecznego systemu formalnego SF, zawierającego elementarną arytmetykę liczb naturalnych z operacją mnożenia i dodawania, istnieje zdanie G, wyrażone w języku systemu formalnego J_{SF}, które jest dla tego systemu prawdziwe, ale nie daje się w nim dowieść; jest więc tak, że ani zdanie G, ani jego negacja nie należy do zbioru konsekwencji tez SF. Zakładamy na początku, ze zdanie prawdziwe to takie, dla którego istnieje dowód w SF. Niech zdanie G[4] brzmi: „To zdanie nie ma dowodu w SF". Jeśli jest ono fałszywe, to znaczy, że jego negacja – przy metalogicznym założeniu dwuwartościowości logiki – jest prawdziwa, a głosi ona, że zdanie to ma dowód w SF, a skoro tak, to należy do zbioru tez SF – bo, zgodnie z naszym założeniem, każde zdanie, dające się dowieść w SF, jest zdaniem prawdziwym, co w rezultacie przeczy założeniu o jego fałszywości. Jeśli natomiast jest prawdziwe, to na mocy przyjętego wcześniej założenia, ma dowód w SF, a więc zdanie: „To zdanie nie ma dowodu w SF" jest fałszywe, co przeczy założeniu o jego prawdziwości. Aby rozwiązać tę antynomię, przyjmujemy, że jest tak, jak to zdanie mówi: zdanie G jest prawdziwe, czyli – jak „samo" stwierdza – nie ma ono dowodu. Z tego oraz z założenia o niesprzeczności naszego systemu formalnego wynika jego niezupełność, czyli nie jest tak, że dla dowolnego zdania albo ono samo, albo jego negacja jest tezą SF.

[4] Należące do języka J_{SF}.

2.

Zdaniem J. R. Lucasa, filozoficzną konsekwencją[5] rozumowania Gödla jest teza, iż umysł ludzki istotnie różni się od maszyny, rozumianej tutaj jako maszyna Turinga czy też równoważność dowolnego systemu formalnego, zawierającego porcję arytmetyki. Różnica, o jaką tu chodzi, polega na tym, iż umysł, co najmniej w zakresie matematyki, potrafi wykonywać operacje, których nie potrafi wykonywać maszyna. Jeśli maszyna (system formalny) potrafi przedłożyć n zdań prawdziwych, my – ludzie – potrafimy zawsze podać ich $n+1$. Na naszej liście zdań prawdziwych znajduje się bowiem zdanie gödlowskie, dla którego dowód formalny, możliwy do przedstawienia przez maszynę, nie może istnieć.

Można zadać sobie pytanie: co to znaczy, że pojęcie prawdziwości okazuje się, w rezultacie, nie być pojęciem jednoznacznym

[5]Kiedy mówi się o filozoficznych konsekwencjach danego twierdzenia matematycznego albo teorii fizycznej, z pewnością nie można mieć na myśli tego rodzaju konsekwencji, o jakiej mówi się w logice. (Zob. w tej sprawie: J. Woleński, *Metamatematyka a epistemologia*, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 1993, s. 10nn). W tym ostatnim przypadku jest tak, że jeśli z jakiegoś zbioru zdań wynika pewne zdanie, to pod warunkiem, że ów zbiór nie jest sprzeczny, nie może zeń wynikać także negacja owego zdania. W przypadku tzw. konsekwencji filozoficznych nie jest to takie oczywiste: teorie fizyczne czy nawet twierdzenia matematyki mogą być rozmaicie interpretowane – to m.in. od interpretacji zależy wyciągnięcie z nich takich czy innych konsekwencji. Przez interpretację rozumiem funkcję przeprowadzającą według z góry określonych reguł pewien zbiór zdań w inny, nie zawierający się w nim, zbiór zdań.
Operator konsekwencji logicznej ma między innymi taką własność: dla pewnego zdania p i zbioru zdań A, jeśli p należy do A, to p należy także do zbioru konsekwencji logicznych A. W szczególnym przypadku, gdy A jest zbiorem pustym, zbiór konsekwencji tego zbioru będzie się składał z praw logiki. Nie jest natomiast prawdą, jakoby zbiór konsekwencji filozoficznych danego zbioru zdań zawierał się w tym zbiorze. Przykładowo, z twierdzenia Gödla o niedowodliwości niesprzeczności elementarnej arytmetyki liczb naturalnych w niej samej logicznie nie wynika zdanie mówiące, dajmy na to, że poznanie prawdy absolutnej jest niemożliwe. Byłoby raczej tak, że zbiór konsekwencji filozoficznych stanowiłby podzbiór zbioru zdań będących interpretacjami interesujących nas w danym przypadku twierdzeń czy teorii.

z pojęciem dowodliwości, co to znaczy, że prawdziwość jakiegoś zdania nie sprowadza się do wszystkich „mechanicznych” procedur, jakie trzeba wykonać, by prawdziwość tę wykazać? Nieco tajemniczą mogłaby się wydać odpowiedź, że umysłowi ludzkiemu dane jest coś w rodzaju „wglądu w naturę rzeczywistości” czy „wglądu w naturę prawdy”. Umożliwiałby on uznawanie za prawdziwe zdania, którego prawdziwości nie można w żaden sposób dowieść, a w każdym razie nie przy pomocy narzędzi systemu formalnego (ale wtedy powstaje pytanie o innego rodzaju „narzędzia” służące dowodzeniu naszych twierdzeń *nieempirycznych*[6]). Prawdziwość jest niejako dostępna w bezpośrednim intelektualnym ujęciu, widoczna „gołym okiem”, jej „samomanifestowanie się” oznacza dokładnie to samo, co zasadność zdania charakteryzującego się ową prawdziwością. Żywienie takiego przeświadczenia mogłoby się okazać równoznaczne ze zwolnieniem osoby, głoszącej prawdziwość jakiegoś twierdzenia, z odpowiedzialności za podanie dlań stosownego, akceptowalnego uzasadnienia. W ostateczności uzasadnienie dowolnego stwierdzenia typu „Wiem, że A”, gdzie A ma charakter zdania nie mającego empirycznych podstaw uzasadnienia, a więc charakter czegoś w rodzaju zdania *a priori*, przedstawiałoby się nadzwyczaj prosto: „Wiem, ponieważ wiem”.

Jak należałoby rozumieć pojęcie prawdziwości w kontekście argumentacji przedstawionej przez Lucasa? Niestety, sprawa ta nie została dokładnie przez niego wyjaśniona. Co to bowiem znaczy, że zdanie gödlowskie jest prawdziwe? Nie podejmuję się jednoznacznie odpowiedzieć na to pytanie, pozwolę sobie jednak zacytować stosowny fragment artykułu Lucasa. Otóż pisze on tak:

Konstruujemy teraz formułę gödlowską w tym[rozważanym przez Lucasa] *systemie formalnym. Formuła ta nie może być* ***dowiedziona–w–systemie*** [podkr. Lucasa]. *Dlatego maszyna nie może wyprodukować odpowiadającej jej formuły jako prawdziwej. My jednak* ***widzimy, że formuła gödlowska jest prawdziwa***

[6]Problem nie dotyczy wszak dowodzenia twierdzeń w rodzaju „Słońce dzisiaj wzeszło”, lecz takich, które mają charakter aprioryczny.

[podkr. A.T.]: *każda* ***racjonalna istota*** [podkr. A.T.] *mogłaby prześledzić argument Gödla i* ***przekonać się***[podkr. A.T.], *że formuła gödlowska, choć niedowodliwa–w–systemie, jest jednakże*[...] *prawdziwa.*[...] *dla każdej maszyny istnieje prawda, której nie może ona* [*scil.* maszyna] *wyprodukować jako prawdziwej, ale którą umysł może*[jako prawdziwą przedłożyć]. *To pokazuje, że maszyna nie może być zupełnym i adekwatnym modelem umysłu*[7].

W ostateczności niezbyt dobrze wiadomo, jak należałoby interpretować fakt rozumienia przez nas prawdziwości formuły gödlowskiej. Lucas zdaje się jednak sugerować co następuje: każda racjonalna istota, a więc istota wyposażona w ludzki umysł[8], jest w stanie — jak zakładamy, abstrahując od wszelkiego rodzaju ograniczeń z intelektualnymi włącznie —zrozumieć argumentację Gödla. Jeśli ją zrozumie, da się przekonać co do jej słuszności. A zatem zgodzi się z twierdzeniem, iż dla każdego systemu formalnego istnieje pewne zdanie prawdziwe, którego w systemie tym nie można dowieść. W następstwie tego zaś uzna antymechanistyczną tezę Lucasa, stanowiącą filozoficzną konsekwencję twierdzenia Gödla o niezupełności arytmetyki. Zwróćmy uwagę na pewną szczególną własność prawdziwości, wychodzącą tu na jaw jakby niezamierzenie: otóż prawdziwość jest tym, co ma *moc przekonywania* albo raczej tym, co stwierdza się w odniesieniu do jakiegoś zdania wtedy, gdy zostało się już w dostatecznym stopniu (czyli najczęściej „do końca") przekonanym. Aby zostać przekonanym, trzeba się najpierw poddać działaniu tego, kto przekonuje; mamy zatem sytuację – nazwijmy ją „sytuacją dialektyczną"[9] – w któ-

---

[7]John R. Lucas, *Minds, Machines and Göedel* [w:] *Philosophy* XXXVI, 1961, ss. 112–127. Także na stronie: `<http://users.ox.ac.uk/~jrlucas/Godel/mmg.html>`, tłum. A.T.

[8]Nie będziemy się tutaj wdawać w analizę natury ontologicznej umysłu; prawdopodobnie Lucas nie zgodziłby się z fizykalistycznym redukcjonizmem uznającym tezę o tożsamości umysłu i mózgu, gdyż uznanie tej tezy może łatwo prowadzić do uznania mechanicyzmu.

[9]Lucas mówi o „dialektycznej grze", której protagonistami będą Umysł i Maszyna – „obrazek" odsyłający do artykułu Turinga *Maszyna licząca a in-*

rej dwa umysły wchodzą we wzajemną relację, porozumiewają się ze sobą dla osiągnięcia pewnego *celu*. Być może nie całkiem od rzeczy będzie powiedzieć, że zrozumienie, na czym polega prawdziwość jakiegoś zdania, wymaga, aby przyjrzeć się temu, jak do prawdziwości owego zdania *w praktyce* się dochodzi. Jest to dla filozofa niezmiernie interesująca kwestia, wymaga jednak zajęcia stanowiska maksymalistycznego, niemiłego orędownikom programu Hilberta, pozytywistom, zwolennikom, niewykonalnej zresztą, redukcji semantyki do syntaksy itp. Prawdziwość bowiem w ludzkiej praktyce życiowej[10] jedynie w luźny sposób wiąże się z dowodliwością; aby się o tym przekonać, wystarczy sporządzić listę twierdzeń przyjmowanych niejako „na wiarę", czyli bez dowodu, których odrzucenie jednakże mogłoby poważnie zachwiać naszą racjonalnością, czyniąc obraz naszego doświadczenia świata wewnętrznie niespójnym czy po prostu sprzecznym. Jednym z takich nie mających dowodu twierdzeń będzie to, które mówi, że jesteśmy istotami niesprzecznymi.

3.

Przedstawiony w poprzedniej części argument Lucasa[11], wykazujący fałszywość mechanistycznych koncepcji umysłu[12], spotkał się z licznymi zarzutami, z których najważniejszy brzmi: Lucas jest sprzeczny. Dlatego też, bez względu na to, kto ma rację: mechanicyści czy antymechanicyści, z matematycznego punktu widzenia, teza Lucasa okazuje się fałszywa. Odwołując się do twierdzenia Gödla, nie możemy zatem pokazać, że umysł istotnie różni się

---

teligencja, [w:] *Filozofia umysłu. Fragmenty filozofii analitycznej*, Aletheia–Spacja, Warszawa 1995.

[10] Jeśli chcemy być bardziej precyzyjni, możemy mówić o praktyce językowej.

[11] Jak widać, rekonstrukcja argumentu Lucasa nie wypadła imponująco, ale też nie widzę powodów, dla których miałoby być inaczej. Rozumowanie przeprowadzone przez Lucasa jest bowiem bardzo proste, ale jak wkrótce zobaczymy, nie znaczy to jeszcze, iż jest ono zarazem matematycznie poprawne.

[12] Sformułowanie to brzmi nieco zbyt „dziewiętnastowiecznie", dlatego można by zastąpić je wyrażeniem „komputacjonistyczne modele umysłu".

od „inteligentnej” maszyny. Przed omówieniem jednak tego najistotniejszego zarzutu warto przyjrzeć się kilku „mniej groźnym” zarzutom, z którymi rozprawia się autor *Minds, Machines and Gödel*.

Zarzut 1. Tworzenie zdania gödlowskiego jest procedurą standardową, można wręcz powiedzieć: mechaniczną, za każdym razem bowiem stosujemy taką samą sztuczkę – przedkładamy prawdziwe zdanie gödlowskie, którego maszyna (system formalny) nie ma na liście swoich tez. Jeśli przedłożone przez nas zdanie zostanie wciągnięte przez maszynę na tę listę (poprzez dołączenie do zbioru jej aksjomatów), to możemy przedłożyć kolejne zdanie, którego maszyna nie ma na liście — i tak w nieskończoność[13]. Skoro zatem „wygödlowywanie” (*out-gödeling* — słowo, którego używa Lucas) jest procedurą standardową, powinno dać się sformalizować — można zaprogramować maszynę tak, by „produkowała” bez żadnych ograniczeń (ograniczeń technicznych ani czasowych nie bierzemy tu pod uwagę) zdania nierozstrzygalne; maszyna posiadałaby wtedy tzw. *Gödelizing operator*.

Lucas odpowiada na ten zarzut, że umysł *zawsze* jest w stanie „wygödlować” maszynę, przedkładając takie zdanie, którego ta nie ma na liście. Ta w istocie niezbyt interesująca procedura przypomina grę, polegającą na wymienianiu coraz większych liczb naturalnych —wygra ten, kto poda taką liczbę, że jego przeciwnik nie będzie potrafił podać większej. Wiadomo, że w takiej grze, która gdyby nie przeszkody natury technicznej, nigdy by się nie skończyła, nie ma wygranej. Według Lucasa, jeśli maszyna jest w stanie podać ω zdań gödlowskich, to umysł zawsze może podać tych zdań $\omega + 1$ i wygra. Skoro wiemy, że arytmetyka jest niezupełna i zakładamy też, że arytmetyka jest „wbudowana” w program maszyny, to zgodnie z twierdzeniem Gödla *musi* dać się zna-

[13]Podobnie w nieskończoność można rozbudowywać hierarchię języków: dla *każdego* języka, prócz języka naturalnego, zawierającego swój własny metajęzyk, istnieje co najmniej jeden metajęzyk, będący też językiem, tyle że wyższego stopnia.

leźć zdanie, którego maszyna nie przedłoży. Można postawić Lucasowi pytanie, czy *nasza* umiejętność „wygödlowania" maszyny nie oznacza, że jesteśmy „zupełni"[14], a więc potrafimy efektywnie rozstrzygnąć wartość logiczną każdego zdania[15]? I na czym by to „efektywne rozstrzygnięcie" miało polegać – wszak przecież nie na podaniu formalnego dowodu nierozstrzygalnego dla maszyny zdania – wtedy bowiem z powrotem „lądujemy" w systemie formalnym. Mówi się w takich wypadkach o jakimś „intuicyjnym ujęciu" prawdy czy, jak już wspominałam, o jakimś szczególnego rodzaju „wglądzie", umożliwiającym identyfikację konkretnej prawdy nawet wtedy, gdy prawda ta nie ma dowodu; nie zawsze jest jednak jasne, co się rozumie przez samo pojęcie intuicji czy wglądu. Jak już sygnalizowałam, problem sprowadza się do uznawania bądź nieuznawania procedur innych niż dowodowe za wystarczający warunek uzasadniania naszych twierdzeń — i do tego, czy w ogóle takie „procedury" istnieją. Problem ten staje się jeszcze bardziej ogólny w momencie, gdy rozszerzymy, „odformalizujemy" nasze rozumienie pojęcia dowodu — będziemy wtedy mówić, że jakieś zdanie ma dowód, jeżeli istnieją powszechnie uznane, racjonalne procedury demonstracji prawdziwości tego zdania; innymi słowy, jeśli można *sprawdzić*, czy dane zdanie jest prawdziwe czy nie. Starałam się także wcześniej zasugerować, że takie rozumienie prawdziwości zdań byłoby zbyt restrykcyjne: w praktyce uznajemy za prawdziwe wiele twierdzeń, których prawdziwości z różnych przyczyn nie potrafimy udowodnić, co nie oznacza bezzasadności ich przyjmowania. Żyjemy w konkretnych społecznościach, gdzie zachowanie, sposób postępowania itd. jednostek są wyznaczane przez

[14] A zarazem niesprzeczni, w przeciwnym bowiem wypadku całe to rozumowanie, którego konsekwencją jest odróżnienie umysłów od maszyn, po prostu upada. Jeśli umysł jest sprzeczny, a maszyna – nie, to na liście zdań, które umysł przedkłada maszynie, znajdzie się wiele takich, które nie znajdą się na liście przedkładanej przez maszynę, jak choćby negacje tych ostatnich.

[15] Chodzi oczywiście o takie zdania, które są dobrymi kandydatami na posiadaczy wartości logicznej, których szczególny przypadek stanowią zdania matematyczne.

pewne reguły racjonalności, każące pewne twierdzenia akceptować, pewne zaś odrzucać. Prawdziwość, jaką charakteryzują się tego rodzaju niedowodliwe, zdania, nie będące jednak aksjomatami, nazwałabym *prawdziwością normatywną* (albo *transcendentalną*) – *warunkującą* prawdziwość twierdzeń, które się na ich podstawie wygłasza oraz wewnętrzną spójność systemu, do którego się one stosują.

Zarzut 2[16]. Twierdzenie Gödla zachowuje ważność jedynie dla systemów dedukcyjnych, ale ludzie stosują także inne rodzaje rozumowania, np. indukcyjne, probabilistyczne.

Zarzut ten mówi tyle: nie trzeba twierdzenia Gödla, aby pokazać, że nie jesteśmy maszynami. W pewnym sensie bowiem oczywiście nie jesteśmy nimi, a tylko być może ta część naszego myślenia, którą stanowi matematyka, daje się „zmechanicyzować". Lucasowi jednakże chodzi o to właśnie, by pokazać, że nasze *myślenie matematyczne* jest niemechaniczne, a w konsekwencji niezdeterminowane ściśle określonymi, wewnątrzsystemowymi regułami. Po prostu: nawet wtedy, gdy rozumujemy dedukcyjnie, rezultat naszego rozumowania nie musi być z góry określony; dlatego matematyka jest tak twórczą dziedziną ludzkiej działalności poznawczej.

Zarzut 3 (Hilary Putnam[17]). Nie da się wykluczyć możliwości, że jesteśmy sprzecznymi maszynami.

Lucas uważa to za mało prawdopodobne. Bywamy wprawdzie niekiedy sprzeczni, na przykład wtedy, gdy nasz rozum daje się opętać niezdrowym emocjom[18]. Przyznajmy Lucasowi rację: rzekomą sprzeczność istot ludzkich możemy złożyć na karb ich omylności i ignorancji. Wartość naszych twierdzeń – to, czy są one prawdziwe czy nie – zależy przecież od stanu naszej wiedzy; korzystając z różnych założeń, dysponując na wyjściu raz

---

[16]Na liście zarzutów rozpatrywanych przez Lucasa był to zarzut trzeci.

[17]O zarzucie tym wspomina Lucas w cytowanym wyżej artykule *Minds, Machines and Goedel.*

[18]Prawdę mówiąc, jeśli określenie „niezdrowy" uznać w tym przypadku za determinujące, nie zaś modyfikujące, to otrzymamy pleonazm, prosiłabym jednak Czytelnika o wybaczenie tej językowej usterki.

takim, a innym razem zgoła odmiennym zasobem informacji, dochodzimy niekiedy do wzajemnie się wykluczających wniosków. Stąd konkluzja, że absolutnie czy też idealnie niesprzeczny podmiot musiałby zarazem być podmiotem wszystkowiedzącym. Ale z drugiego twierdzenia Gödla, mówiącego o niedowodliwości niesprzeczności arytmetyki w niej samej, oraz z rozważań Ajdukiewicza przedstawionych w artykule *Problemat transcendentalnego idealizmu w sformułowaniu semantycznym*[19] wynika, że idea wszystkowiedzącego podmiotu jest wewnętrznie sprzeczna, oczywiście jeśli zgodzić się z postulatem, że „wiedzieć" znaczy tyle, co „dysponować dowodem" dla tego, co się wie. Podmiot ów nie może wtedy wiedzieć wszystkiego – nie wie bowiem tego, czy jest niesprzeczny.

Zauważmy, że założenie niesprzeczności umysłu ma charakter normy, którą nasza racjonalność sama sobie nakłada; norm zaś nie dowodzi się, a tylko się je postuluje lub wyznacza. Można jednakże pójść nieco dalej i postawić pytanie o prawomocność tej normy. Abstrahując od gödlowsko–lucasowskiego kontekstu naszych rozważań, możemy zapytać, co w ogóle czyni zasadę niesprzeczności normą regulującą naszej działalności teoretycznej, a także (w dużym stopniu przynajmniej) praktycznej. Niesprzeczność, jako warunek wszelkiej rozumności, umożliwia racjonalny dyskurs, a więc rozumienie znaczenia zdań, za pomocą których ludzie się komunikują – szacowanie ich prawdziwości względnie fałszywości. Jeśli naraz przyznaję jednemu i temu samemu zdaniu dwie wykluczające się wartości logiczne, zwyczajnie nie wiem, o czym mówię, czyli nie rozumiem znaczenia wypowiadanego przez siebie zdania.

Wracam teraz do wspomnianego wyżej zarzutu Putnama. Otóż jeśli niemechaniczność umysłu należy wykazać przy założeniu jego niesprzeczności, to musimy znać odpowiedź na pytanie, czy jesteśmy sprzeczni, czy nie; uczciwość intelektualna wymaga, abyśmy posiadali dowód naszej niesprzeczności (przyjmujemy tu, że wiedza, iż jakieś zdanie jest prawdziwe, oznacza posiadanie dowodu

[19] K. Ajdukiewicz, *Problemat...* [w:] *Język i poznanie*, Warszawa 1985, t. 1.

na tę jego prawdziwość). Wiemy jednak tylko tyle, że pod warunkiem, iż jesteśmy niesprzeczni, maszyna przegrywa. Ale założenie, że jesteśmy niesprzeczni, przyjmuje się bez uzasadnienia. Z tego, że *wiem, że [jeśli A, to B]* wynika, że *jeśli wiem, że A, to wiem, że B* (rozdzielność operatora epistemicznego względem implikacji); nie wynika natomiast, że *jeśli A, to wiem, że B*. Antymechanicysta zdaje się być w takiej sytuacji: *wie, że [jeśli jest niesprzeczny, to wygrywa]* i *wie, że wygrywa* (ale jeśli wygrywa, to nie znaczy jeszcze, że jest niesprzeczny; może być sprzeczny, również tego nie wiedząc; wtedy też musi wygrać). Nie wie jednak najważniejszego, mianowicie, czy jest niesprzeczny i nie ma nadziei na to, że nawet jeśli byłby niesprzeczny, to mógłby tego dowieść. Argument Lucasa nie może być zatem konkluzywny.

Zarzut 4 (oczywiście nie rozpatrywany przez Lucasa!). Lucas[20] jest sprzeczny[21].

Sprawa przedstawia się w następujący sposób: mechanicysta przedstawia Lucasowi maszynę M, o której twierdzi, że stanowi adekwatny model zdolności matematycznych (czy — szerzej — umysłu) Lucasa. Wtedy ten przedstawia mechanicyście formułę gödlowską G_M odpowiadającą teorii $T(M)$, w której znajdują się zdania arytmetyki, dające się udowodnić przez maszynę M. Mamy dwie możliwości: albo (1) $T(M)$ jest sprzeczna, albo (2) $T(M)$ jest niesprzeczna. Jeśli zachodzi (2), G_M nie daje się dowieść przez maszynę, ale Lucas widzi, że formuła ta jest prawdziwa. Jeśli zachodzi (1), maszyna ma dowód dla każdego zdania, w tym także G_M i takich zdań jak np. $0 + 1 = 0$, czego Lucas nie udowodni, jako że jest niesprzeczny. W obu przypadkach Lucas różni się od maszyny.

---

[20] A ściślej mówiąc, proponowany przez oksfordzkiego filozofa model umysłu, mający istotnie się różnić od modelu maszyny Turinga.

[21] Dowód sprzeczności Lucasa można znaleźć w: Stanisław Krajewski, *Twierdzenie Goedla i jego interpretacje filozoficzne*, Warszawa 2003, a także w: tenże, *Philosophical Consequences of Goedel's Theorem* [w:] *Bulletin of the Section of Logic*, 1983; 12.

Powyższe stwierdzenie dotyczy wszystkich maszyn. Możemy więc sporządzić listę M_1, M_2,... (indeksy oznaczają opisy czy też numery porządkowe maszyn na liście). Istnieje funkcja rekurencyjna g [22], taka że dla każdego n:
(*) jeśli $T(Mn)$ jest niesprzeczna, to $g(n)$ jest numerem gödlowskim zdania gödlowskiego, które jest prawdziwe i nie daje się dowieść w $T(M_n)$.

Wykażemy, że zbiór wartości funkcji g, powiedzmy zbiór $A = \{g(n) : n = 1, 2, \ldots\}$, jest sprzeczny. Dochodzimy do tego następująco: $A = T(M_k)$, dla pewnego k. Jeśli $T(M_k)$ jest niesprzeczna, to na mocy (*) $g(k)$ nie daje się dowieść w $T(M_k)$, czyli nie należy do $T(M_k)$. Ale $g(k)$ należy do A, na mocy definicji, a więc też do $T(M_k)$. Otrzymaliśmy sprzeczność.

Ponieważ n oznacza dowolny numer maszyny, więc możemy przyjąć, że $n = k$. Zatem także $T(M_n) = T(M_k)$ i $T(M_n)$ jest sprzeczna. Stąd też funkcja g nie może być rekurencyjna (rekurencyjność tej funkcji stanowiła warunek niesprzeczności $T(M_n)$).

Pozostaje więc albo zgodzić się z uzyskanym rezultatem mówiącym, że Lucas jest sprzeczny, wobec czego należy odrzucić (*), albo uznać możliwość istnienia nierekurencyjnych sposobów dochodzenia do prawdy za jedną z filozoficznych konsekwencji twierdzenia Gödla i utrzymać (*). Pozostaje jednak problem, czy $T(M_n)$ jest sprzeczna czy nie.

4.

Konkluzje z powyższych rozważań wydają się dość zaskakujące: z jednej strony bowiem intuicyjnie, zdroworozsądkowo zgadzamy się z rozumowaniem Lucasa, bez względu na to, czy nasze ideologiczne sympatie lokują się po stronie antymechanicystów czy też ich przeciwników; z drugiej strony można pokazać, że rozumowanie to jest matematycznie niepoprawne. Oczywiście, brak mi

[22]Założenie to jest istotne dla przeprowadzenia przez S. Krajewskiego, w cytowanych w powyższym przypisie pracach, dowodu sprzeczności Lucasa.

kompetencji, aby dokonać „matematycznej apologii" Lucasa. Nie chcę też zarazem przesądzać o prawdziwości owych intuicji, nakazujących z jego rozumowaniem się zgodzić; niemniej faktu, że takie intuicje tkwią w nas dość głęboko, nie należy lekceważyć. I jeśli w jakiś sposób udało mi się zwrócić uwagę Czytelnika na tę rozbieżność – którą można z grubsza scharakteryzować jako rozbieżność między intuicyjnym, potocznym, zdroworozsądkowym a matematycznym rozumieniem i uznawaniem prawdziwości czy nawet poprawności twierdzeń i rozumowań – uważam, iż cel niniejszego artykułu został osiągnięty.

Semina ☐ Scientiarum Nr 3 2004

Paweł Rojek

Antynomia Russella i twierdzenie Gödla jako logika absolutnego[1]

1. List Russella do Fregego z 1902 roku i wystąpienie Kurta Gödla na konferencji w Królewcu w roku 1930 stanowią kamienie milowe rozwoju dwudziestowiecznej logiki i matematyki. Oba wydarzenia łączy szereg podobieństw. Zarówno Russell jak i Gödel byli bardzo młodzi (Russell pisząc do Fregego był trzydziestolatkiem, Gödel miał 24 lata), i obaj dokonali rewolucyjnego zwrotu w dziejach matematyki: Russell zakończył beztroski okres tzw. „naiwnej teorii mnogości" Cantora, a Gödel – równie naiwny, jak się okazało, program Hilberta. Antynomia Russella i tzw. pierwsze twierdzenie Gödla o niezupełności arytmetyki mają jednak nie tylko podobieństwa historyczne. Wspólna im jest pewna struktura łącząca je z tradycyjnym w filozofii problemem absolutności. Tę osobliwą strukturę (dzieloną także np. z twierdzeniem Tarskiego z 1933 o niedefiniowalności prawdy) łatwo można wydobyć, stosując opracowane niedawno przez W. I. Moisiejewa środki formalne.

Najpierw, z pomocą dobrze znanej antynomii Russella, szczegółowo omówione zostaną cechy tej struktury, które następnie zilustrowane zostaną na przykładzie twierdzenia Gödla. Wreszcie pokazane zostaną związki obu twierdzeń z logiką absolutnego.

[1] Przygotowanie tej pracy umożliwiły mi studia w semestrze wiosennym roku akademickiego 2002/2003 w Państwowym Uniwersytecie w Woronežu (Rosja). Nieocenioną pomoc okazał mi prof. Wiaczesław I. Moisiejew, któremu pragnę złożyć tą drogą podziękowania.

2. Teoria *L-sprzeczności* W. I. Moisiejewa jest jedną z prób zbliżenia dwu linii rozwojowych filozofii: „formalnej" tradycji Parmenidesa, osadzonej na zachowaniu prawa tożsamości, niesprzeczności i wyłączonego środka, i „dialektycznej" linii Heraklita, odrzucającej te zasady. Chodzi o znalezienie kryterium logicznej demarkacji, które pozwoliłoby odróżnić sprzeczności „dialektyczne" (nieusuwalne bez straty dla poznawczych możliwości systemu) od sprzeczności–pomyłek. Teoria ta jest ścisłą eksplikacją pewnych intuicji filozoficznych, podzielanych w kręgu tzw. „rosyjskiej filozofii wszechjedności", biorącej początek od Wł. Sołowjowa. O. Paweł Florenski, na początku XX wieku, w pracy [8] jako pierwszy próbował zastosować współczesną logikę dla wyjaśnienia tych intuicji. Praca ta została współcześnie podjęta przez W. I. Moisiejewa i doprowadziła do skonstruowania formalnych narzędzi, u źródeł których leżą analogie między logiką i topologią, w szczególności możliwość wprowadzenia w logice pojęcia granicy (patrz [5], [6] i najnowsza praca [7]).

I. Antynomia Russella

3. Dobrze znana filozofom antynomia Russella generowana jest przez określenie własności tworzącej tzw. zbiór Russella, czyli zbiór tych zbiorów, które nie są własnymi elementami:

$$R = \{x : x \notin x\}. \tag{1}$$

Jeśli zbiór R jest swoim elementem to, biorąc pod uwagę zadającą go własność, nie jest swoim elementem. Jeśli natomiast R nie jest swoim elementem, to właśnie dlatego jest swoim elementem. Antynomia Russella przybiera postać:

$$R \in R \equiv R \notin R. \tag{2}$$

A zatem, po pewnych przekształceniach:

$$R \in R \wedge R \notin R. \tag{3}$$

4. Istnieje prosty i naturalny sposób ominięcia tej antynomii, wykorzystany w aksjomatycznych teoriach mnogości (aksjomat wyróżniania). Gdyby dziedziną określenia zbioru R był jakiś ograniczony zbiór X, obok którego mogłyby istnieć jakieś inne zbiory, to sprzeczność mogłaby być usunięta przez przypuszczenie, że zbiór R po prostu nie należy do X. Zbiór R byłby wówczas zrelatywizowany do pewnej dziedziny, na której określona jest zadająca go własność:

$$R_x = \{x : x \in X \wedge x \notin x\}. \tag{4}$$

Założenie, że $R_x \in X$ prowadzi do sprzeczności, więc można przyjąć, że $R_x \notin X$, co usuwa problem. *Zbiór Russella* – pisze Moisiejew – *to szczególny typ obiektu–rozszerzyciela. Określenie go na zbiorze X prowadzi do budowy obiektu, wychodzącego za ramy X. I póki X jest lokalny, można wyjść za jego ramy, a zastosowanie do niego predykatu tworzącego zbiór R nie prowadzi do sprzeczności. Ale gdy tylko jako X zaczyna występować obiekt, za którego ramy nie sposób już wyjść, zbiór R staje się sprzeczny – wychodzi za ramy tego, za czego ramy wyjść już się nie da. Oto istota sprzeczności Russella* ([6], s. 267).

5. Moisiejew nazywa zbiór Russella i podobne obiekty *L-obiektami*. Są to obiekty, które:

(i) zakładają wydzielenie dwu planów, w których jeden („przedmiotowy”) zawiera się w drugim („metaplanie”). W przypadku antynomii Russella jest to zbiór X i pewien szerszy zbiór, do którego należy zarówno R_x i X;

(ii) charakteryzują się swoistym „dążeniem” do wyjścia poza plan pierwszy i wymagają (pod groźbą sprzeczności) uznania je za należące do „metaplanu”;

(iii) jednocześnie można je odtwarzać dla dowolnej dziedziny, w tym także dla zbioru otrzymanego przez rozszerzenie pierwszego planu.

Podsumowując: *L-obiekty zadawane są dwoma wzajemnie wykluczającymi się warunkami: określeniem siebie poza planem „przedmiotowym" i warunkiem rozszerzenia przedmiotowego planu na „metaplan"*([6], s. 268).

Jednym z pierwszych *L-obiektów*, opisanych w literaturze filozoficznej, jest platońska idea, prowadząca do tzw. problemu trzeciego człowieka. Platoński *Parmenides* jest zresztą w ogóle paradygmatycznym przykładem analizy problemów absolutnego.

6. Wobec tej naturalnej możliwości usunięcia (czy raczej – jak się okaże –„przesunięcia") antynomii, predykat tworzący zbiór Russella można zadać na dziedzinie uniwersum U, w którym można wydzielić nieskończony ciąg zbiorów U_0, U_1, $U_2, \dots$, takich, że $U_i \subseteq U_{i+1}$ i $U_i \neq U_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Jest to procedura analogiczna w pewnym sensie z podziałem na typy logiczne, proponowanym przez Russella. Niech zbiór R^1 jest zadawany przez własność „x nie należy do x i x należy do U_0":

$$R^1 = \{x : x \in U_0 \wedge x \notin x\}. \tag{5}$$

Zbiór taki nie prowadzi do sprzeczności, wyprowadza jednak poza U_0 do zbioru, do którego należy zarówno R^1 jak i U_0 (aby uniknąć sprzeczności trzeba założyć, że R^1 nie należy do U_0). Niech takim zbiorem będzie U_1. Dla U_1 można jednak utworzyć nowy zbiór Russella R^2, zadawany przez własność:

$$R^2 = \{x : x \in U_1 \wedge x \notin x\}. \tag{6}$$

R^1 spełnia predykat zadany przez własność zbioru R^2 (ponieważ R^1 i U_0 należą do R^2), zatem:

$$R^1 \in R^2 \wedge R^1 \notin R^1, \tag{7}$$

(por. z formułą (3)). R^1 nie może jednak należeć do U_1, ponieważ prowadziłoby to do sprzeczności. Wobec tego wyprowadza on do kolejnego zbioru U_2, który zawiera R^1 i U_1, itd.

Jest jasne, że procedura ta może być powtarzana bez końca. Dla uniwersum U_n zbiór R^{n+1} określa się predykatem „$x \notin x \wedge x \in U_n$". Tworzy się nieskończony szereg narastających uniwersów U_0, U_1, U_2, $\dots$, gdzie $U_i \subseteq U_{i+1}$ i $U_i \neq U_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \dots$ oraz zbiorów $R^1, R^2, \dots$, gdzie $R^i \in R^{i+1}$, $i = 1, 2, \dots$. W ogólnym przypadku formuła (7) przybiera postać:

$$R^n \notin R^n \wedge R^n \in R^{n+1}, \tag{8}$$

która jest prawdziwa dla dowolnych $n = 1, 2, \dots$.

Korzystając z procedury proponowanej przez Moisiejewa (sformułowanej w [1] i omówionej w [5] i [6]), można budować ciągi składające się z formuł języków pewnych teorii. Nad formalną teorią T można skonstruować – jako jej rozszerzenie – *L-sprzeczną* teorię T^*, która jest definiowana jako zbiór ciągów z granicami formuł z teorii T w języku $L(T)$. Posiadający granicę ciąg formuł teorii T typu $\{A_n\}_{n=0}^{n=\infty}$ nazywa się tezą teorii T^* jeśli istnieje pewne $m \geqslant 0$ takie, że dla dowolnego $n \geqslant m$ formuła A_n języka $L(T)$ jest tezą teorii T. Teza teorii T^* (czyli ciąg formuł z granicą) nazywa się *L-sprzecznością* jeśli jej granica równa się $A \wedge \neg A$, gdzie A jest formułą języka $L(T)$. W pracy [1] podane są dowody niesprzeczności i pełności T^*, o ile niesprzeczna i pełna jest teoria T. Ciąg zbudowany na tej zasadzie z formuły (8) przedstawia się następująco:

$$\{R^n \notin R^n \wedge R^n \in R^{n+1}\}_{n=0}^{n=\infty}. \tag{9}$$

Każdy element tego ciągu składa się z koniunkcji dwóch prawdziwych sądów, z których jeden jest „słabą" negacją drugiego (tzn. różni się od drugiego elementu koniunkcji „przesunięciem" indeksu, patrz [6], s. 332) i sam jest zdaniem prawdziwym. Ciąg ten ma granicę, przy której dochodzi do sprzeczności: $R^\infty \in R^\infty \wedge R^\infty \notin R^\infty$. Takie granicznie sprzeczne formuły, dedukowalne ze specjalnych rozszerzeń formalnych teorii, Moisiejew nazywa *L-sprzecznościami*. Logika *L-sprzeczności* nie jest sprzeczna z tradycyjną logiką, stanowi tylko jej rozszerzenie i dopełnienie o ciągi formuł z granicami, podobnie jak zbiór liczb wymiernych może być poszerzony o liczby niewymierne do zbioru liczb rzeczywistych. Sprzeczność zostaje „zneutralizowana” w formie ciągów formuł i pojawia się dopiero w ich granicach.

Otrzymanie *L-sprzeczności* jest świadectwem obecności nietrywialnych sprzeczności, mających „dialektyczny” charakter. Jak zostanie pokazane w punkcie 9, otrzymanie jej w przypadku zbioru Russella związane jest z tym, że struktura antynomii Russella jest izomorficzna ze strukturą wielu filozoficznych antynomii, nie wyłączając Kantowskich.

II. Twierdzenie Gödla

7. Ta sama struktura obecna jest w przypadku twierdzenia Gödla. Niech teoria T^0 jest niesprzecznym, rekursywno–akjomatyzowalnym rozszerzeniem formalnej arytmetyki liczb naturalnych. W tym wypadku – zgodnie z twierdzeniem Gödla o niezupełności – dla tej teorii istnieje niedowodliwe prawdziwe Gödlowskie zdanie G^0, głoszące swoją niedowodliwość w T^0. Teorię T^0 można rozszerzyć przez dołączenie do jej aksjomatów zdania G^0 i otrzymaną nową teorię oznaczyć T^1. Wówczas:

$$T^0 \nvdash G^0 \wedge T^1 \vdash G^0. \tag{10}$$

Teoria zawierająca arytmetykę jest jednak *zasadniczo* niezupełna. *Gdybyśmy bowiem powiększyli pierwotny zbiór aksjomatów o formułę G* [w tym przypadku chodzi o G^0 – P.R.], *to w systemie opartym na tej wzbogaconej aksjomatyce można by zbudować inną prawdziwą, lecz nierozstrzygalną formułę arytmetyczną; konstrukcja takiej formuły polegałaby po prostu na powtórzeniu w nowym systemie procedury zastosowanej w systemie pierwotnym w celu zbudowania formuły prawdziwej lecz nierozstrzygalnej. Ewentualne dalsze wzbogacenie systemu wyjściowego nie zmieni sytuacji; prawdy nierozstrzygalne zawsze będzie można sformułować* ([4], s. 66). Teoria T^1 także jest niesprzecznym rozszerzeniem arytmetyki, wobec czego istnieje zdanie Gödlowskie G^1 takie, że nie jest ono dowodliwe w T^1. G^1 także można dołączyć do T^1 otrzymując T^2, *notabene* niesprzeczne rozszerzenie arytmetyki. Procedurę tę można powtarzać w ten sam sposób, jak miało to miejsce z „poszerzającym się" uniwersum w przypadku zbioru Russella (wyobrażenie o rozszerzającym się uniwersum ma czysto heurystyczny charakter). Dla dowolnych $n = 0, 1, 2, \ldots$ (10) przybiera ogólną postać:

$$T^n \nvdash G^n \wedge T^{n+1} \vdash G^n. \tag{11}$$

Postępując w ten sposób otrzymuje się nieskończony ciąg teorii $T^0, T^1, T^2, \ldots$, gdzie $T^i \subseteq T^{i+1}$ i $T^i \neq T^{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, a teoria T^{k+1} jest otrzymana z T^k przez dodanie do niej zdania G^k jako nowego aksjomatu oraz nieskończony ciąg Gödlowskich formuł $G^0, G^1, G^2, \ldots$. Postępując analogicznie jak w punkcie 6, można zbudować następujący ciąg formuł:

$$\{T^n \nvdash G^n \wedge T^{n+1} \vdash G^n\}_{n=0}^{n=\infty}. \tag{12}$$

W swojej granicy ciąg ten osiąga sprzeczną formułę $T^\infty \nvdash G^\infty \wedge T^\infty \vdash G^\infty$, co świadczy o jego *L-sprzecznym* charakterze.

Inną, bardziej złożoną procedurę, operującą pojęciem n–rekursywności, proponuje dla wyrażenia *L-sprzecznego* charakteru twierdzenia Gödla W. Moisiejew (por. [6] i [7]).

8. W twierdzeniu Gödla rolę *L-obiektu* spełnia zdanie Gödlowskie G. Zdanie to, podobnie jak zbiór R,

(i) skłania do oddzielenia dwu planów: bieżącej teorii T^n w której się pojawiło i teorii T^{n+1}, która powstaje po przyłączeniu go do aksjomatów;

(ii) „wyprowadza" poza posiadaną teorię, domagając się włączenia w skład aksjomatów. Nie ma tego problemu – analogicznie jak w przypadku antynomii Russella – jeśli zgodzić się na sprzeczność;

(iii) odtwarza się dla każdej takiej teorii (por. punkt 5).

Analogia z antynomią Russella wymaga jeszcze wskazania na sprzeczność, do której prowadzi „naiwne” podejście do twierdzenia Gödla w matematyce. Historycznie takie „naiwne” podejście nie zaistniało, ale jest możliwe do pomyślenia w analogii do antynomii Russella. Sprzeczność pojawia się wraz z naturalną skłonnością, aby zdanie G^0 wywieść z aksjomatów teorii T^0: *w ramach naiwnego podejścia zdanie Gödlowskie powinno być włączone w skład twierdzeń teorii* ([6], s. 337). Gdyby G^0 było udowodnione w T^0, to teoria T^0 byłaby sprzeczna (ponieważ wówczas – jak pokazał Gödel – dałoby się udowodnić i $(\neg G^0)$, analogicznie jak rzecz ma się ze zbiorem Russella w naiwnej teorii mnogości. Jest to ta sama struktura, która „wypycha” G, podobnie jak zbiór R, z granic „pierwszego planu” teorii. Ale usunięcie G^0 spośród twierdzeń T^0 dla ratowania jej niesprzeczności jest już świadectwem nie–naiwnego podejścia. A więc – powiada Moisiejew – *zdanie Gödlowskie gra w teorii elementarnej matematyki tą samą rolę co zbiór Russella w teorii mnogości* ([6], s. 338).

III. Logika absolutnego

9. Istnieje niezaprzeczalne podobieństwo – wskazane przez A. Churcha – między próbą usunięcia antynomii Russella w teorii typów a stworzeniem hierarchii języków przez Tarskiego, ponieważ *przypuszczalnie nie robi to większej różnicy, czy ma się hierarchię wyrażeń w jednym języku czy hierarchię różnych języków* ([3], s. 661). Podobieństwo to obejmuje także problemy związane z twierdzeniem Gödla. Wewnętrzna struktura antynomii Russella, twierdzenia Gödla i twierdzenia Tarskiego odtwarza szczególną logikę filozoficznych antynomii związanych z pojęciem absolutnego. Ich ogólna struktura jest wspólna dla wielu antynomii filozoficznych. W szczególności *zbiór Russella przy pewnych dodatkowych umowach w pełni wyraża budowę wielu antynomicznych obiektów należących do dialektycznej tradycji w filozofii* ([6], s. 265). Tą dodatkową umową jest ograniczenie dziedziny rozważań do uniwersów, w których występują tylko zbiory niezwrotne, czyli te, które nie są własnymi elementami. Zbiór R staje się wtedy analogonem „totalnych pojęć” takich, jak świat, przestrzeń, czas, świadomość itp. W ten sposób odtworzyć można strukturę pierwszej antynomii Kanta z *Krytyki czystego rozumu*, która jest izomorficzna do takiej wersji antynomii Russella, gdzie odpowiednikiem „$x \in R$” jest „x jest ograniczone”. Podobnie można odnieść się np. do sławnego paradoksu kamienia, problemu zła i dobroci Boga itd.

Omawiana struktura odtwarza się także w przypadku właściwego problemu logiki absolutnego, który bierze się z samego określenia Absolutu jako – z jednej strony – wolnego od tego, co inne, z drugiej zaś strony – jako pełni wszelkiego bytu, włączając także to, co inne. *Paradoks absolutnego może być sformułowany na wiele różnych sposobów, ale w każdym z nich odtwarza się konieczność jednoczesnej podwójnej relacji absolutnego do względnego (warunkowego) bytu – relacji zawierania i utożsamienia absolutnego z tym, co względne, oraz relacji ich wykluczania* ([5], s. 2). Po oddzieleniu Absolutu (rozumianego jako źródło bytu) od bytu, który jest jego ontologiczną projekcją, pojawia się problem warunków, w których ta projekcja została uzyskana. One jednak także mają swe źródło w Absolucie (który jest przecież pełnią bytu). To z kolei generuje problem warunków powstania tych warunków itd. To, co było brane za bezwarunkowe na jednym etapie, okazuje się względne w perspektywie „rozszerzonego” uniwersum. Odtwarza się struktura znana z antynomii Russella i twierdzenia Gödla. Przedstawiona tu metoda pracy z podobnymi problemami może być wykorzystana do modelowania filozoficznych koncepcji Absolutu, co zostało uczynione np. w przypadku rozbudowanej koncepcji Sołowjowa i jego kontynuatorów (w [6]).

Literatura

[**1**] V. I. Moiseev, „About Some Properties of L–incositent Theories”, preprint 2001.

[**2**] V. I. Moiseev, „To basic definitions of Logical Topology”, [w:] *Smirnov's Readings. 4th International Conference*, Moscow: Russian Academy of Sciences 2003, ss. 84–85.

[**3**] U. Nortmann, „Paradoxes”, [w:] H. Burkhardt, B. Smith (eds.), *Handbook of Metaphysics and Ontology*, vol. II, München: Philosophia Verlag 1991, ss. 658–661.

[**4**] E. Nagel, J. R. Newman, *Twierdzenie Gödla*, przeł. B. Stanosz, Warszawa: PWN 1966.

[**5**] В. И. Моисеев, „Логика абсолютного”, *preprint* 2000.

[**6**] В. И. Моисеев, „Логика всеединства”, Москва: Per Se 2002.

[**7**] В. И. Моисеев, „Математическая логика”, Воронеж: БГУ, 1999.

[**8**] П. Флоренский, „Столп и утверждение истины”, Москва: Изд. АСТ 2003.

Semina ☐ Scientiarum Nr 3 2004

Paweł Polak

Podmiot a system aksjomatyczny

Wstęp

0. Twierdzenie Gödla ukazuje ograniczenie systemów formalnych (aksjomatycznych), które można wyrazić słowami: nie możemy w sposób formalny ująć wszystkich prawd o liczbach naturalnych. Rozważania wokół twierdzenia Gödla prowadzą do pytań o naturę i ograniczenia systemów aksjomatycznych. Wydaje się, że dociekania te mogą iść dwiema drogami: albo poprzez analizę samego formalizmu (jak to uczynił Gödel), albo poprzez postawienie pytań o warunki możliwości istnienia systemów formalnych.

W celu uzupełnienia prezentowanych w tym zbiorze artykułów pragnę zaproponować próbę refleksji nad systemami formalnymi, podążającą drugą z możliwych dróg. Należy poczynić zastrzeżenie, że niniejsze opracowanie ma jedynie charakter wprowadzenia do dyskusji nad wpływem podmiotu na naturę systemów formalnych.

0.1. Nową perspektywę rozumienia, czym są systemy aksjomatyczne otwiera postawienie pytania, *jaki musi być podmiot, który jest w stanie je zdefiniować*. Odpowiedzi na pytanie odkrywają ukryte założenia systemu aksjomatycznego. Zwykle analiza systemów formalnych polega na analizie ich struktury. Metoda ta nie jest jedyna. Można również pytać o warunki możliwości istnienia systemu aksjomatycznego. Nie jest to ani pytanie matematyczne (ani logiczne), ani metamatematyczne (ani metalogiczne). Jest to pytanie *filozoficzne*.

0.2. Aby rozważania uprościć, ograniczmy się do pewnego, bardzo prostego sytemu aksjomatycznego. Nadajmy mu nazwę F.

0.3. Oto F:

obiekty: a b

aksjomat: a

reguła inferencyjna: $X \longmapsto Xb$

0.4. Objaśnienie do 0.3.

System F składa się z obiektów a oraz b. Wyróżniony został obiekt a. Obiekt a jest wyrażeniem sensownym. Mówimy więc, że a jest aksjomatem systemu F. X jest nazwą metazmiennej. W systemie istnieje jedna reguła inferencyjna. Reguła ta opisuje dozwolone przekształcenia wyrażeń. Nowe wyrażenie otrzymujemy przez dołączenie obiektu b z prawej strony pewnego wyrażenia.

0.5. Użyteczne definicje

Wyrażenie oznaczone jako A nazywamy *twierdzeniem* F, jeżeli jest tożsame z a lub da się wyprowadzić z aksjomatu przy pomocy stosowania reguły inferecyjnej. Zapisujemy to: $F \vdash A$.

Oznaczmy przez $Cn(F)$ zbiór wszystkich konsekwencji systemu F, czyli wszystkich wyrażeń, które możemy wyprowadzić z systemu. W naszym przypadku $Cn(F)$ jest nieskończonym *zbiorem* napisów:

a

ab

abb

abbb

abbbb

itd.

Implikacje pytania

1. Wobec takiego postawienia zagadnienia pierwotne pytanie przybiera postać: *jakie są niezbywalne cechy podmiotu mogącego zdefiniować system aksjomatyczny F?* Jest to próba podania założeń koniecznych do zdefiniowania F. Z pewnością nie będą to wszystkie założenia, proszę więc o krytyczne uwagi, pomysły i wnioski.

1.1. Podmiot definiuje system aksjomatyczny. Zdanie to rozumiem w następujący sposób: system aksjomatyczny jest pewną konstrukcją podmiotu. Uściśleniem tego, co rozumiem pod pojęciem *definiować*, zajmę się w dalszej części.

Teza: system aksjomatyczny jest sposobem poznawczego dostępu podmiotu do zewnętrznego świata. Uzasadnienie tej tezy, jest jednym z głównych problemów filozofii nauki i epistemologii.

1.1. Pytanie postawione w 1. zakłada pewne podstawowe cechy podmiotu i systemu aksjomatycznego. Założenie podstawowe: źródłem systemu jest podmiot, to on go definiuje[1].

1.2. Podmiotowi można przypisać pewne cechy.

1.3. Podmiot istnieje (przynajmniej w tym sensie, że może stworzyć system formalny). Jeżeli podmiot nie istniałby w żadnym sensie, to nie można by mówić o jakimś *podmiocie definiującym*. Wówczas system aksjomatyczny istniałby z nicości albo sam z siebie. Nie wymagałby więc definiowania (czyli jakiejś formy stwarzania). Można byłoby go co najwyżej *zdefiniować* w znaczeniu: *dokonać opisu*. Taki system aksjomatyczny byłby najbardziej pod-

---

[1] Wykluczamy więc tutaj platońską interpretację matematyki przyjmującą, że struktury matematyczne istnieją obiektywnie, niezależnie od jakiegokolwiek poznającego podmiotu. Wydaje się, że w postawionym pytaniu chodzi bardziej o opisanie aktywnego podmiotu, którego dziełem jest system formalny. Owszem, można by się zastanawiać nad cechami podmiotu koniecznego do zdefiniowania (tj. opisania) systemu F przy założeniu koncepcji platońskiej, ale rozważania te musiałyby pójść zupełnie odmienną drogą, dlatego pomijam je w niniejszej pracy.

Pozostaje jeszcze pytanie, jaka koncepcja ontologiczna wydaje się być najbliższa prezentowanemu podejściu. Na obecnym etapie rozważań wydaje się, że najbardziej interesująca jest popperowska koncepcja świata 3. Usiłuje ona wytłumaczyć, jak można połączyć aktywną rolę podmiotu przy tworzeniu systemu aksjomatycznego z poźniejszym samodzielnym istnieniem jego. Zob. K. R. Popper, „Świat 3 albo trzeci świat" [w:] *Nieustanne poszukiwania. Autobiografia intelektualna*, tłum. A. Chmielewski, Znak, Kraków 1997, ss. 252–260; K. R. Popper, „Epistemologia bez podmiotu poznającego" [w:] *Wiedza obiektywna. Ewolucyjna teoria epistemologiczna*, tłum. A. Chmielewski, PWN, Warszawa 1992 (zwłaszcza par. 6 „Ocena i krytyka epistemologii Brouwera").

stawowy w porządku ontologicznym — jak już wspomnieliśmy, tę sytuację wykluczamy.

Zagadnienia ontologiczne

2. Czy może istnieć system F bez RZECZYWISTOŚCI (= tego co istnieje)? Częściowa odpowiedź znajduje się już w 1.3., ale nie wyczerpuje to całkowicie problemu. Aby został zdefiniowany system F musi istnieć:

a) podmiot, czyli to, co tworzy system, tj. ustala język, aksjomaty i reguły inferencji,

b) podmiot, czyli to, co może rozpoznać to, co zostało zdefiniowane jako system,

c) podmiot, czyli to, co może dokonywać przekształceń,

d) język J, czyli pewna struktura, w której definiujemy F.

2.1. Podmiot został scharakteryzowany w czterech określeniach. Uważam, że nie jest konieczne, aby podmioty z punktu a) oraz b) były tożsame. Aby możliwe było zdefiniowanie systemu F przez dwa różne podmioty a) i b) musi istnieć między nimi pewna wymiana informacji. Jak inaczej zapewnić tożsamość definiowanego systemu F? Wymiana informacji zakłada zaś pewien język (pewną konwencję dotyczącą oznaczania).

Wydaje się również, że każdy z podmiotów (lub jeden podmiot o dwóch własnościach a)–b)) musi mieć możliwość dokonywania przekształceń (tj. posługiwania się językiem — własność d)). Inaczej bowiem niemożliwe będzie zdefiniowanie systemu F.

2.2. Trzeba zanalizować system F, aby uściślić znaczenie określeń podmiotu (lub trzech podmiotów jednoatrybutowych). Podmiot musi być wyposażony w język, aby móc wykonać a) – c). Operacje te są *operacjami językowymi.* Musi zatem istnieć również pewien język. Język jest konieczny do działania podmiotu. Podmiot, o który pytamy, musi być więc *podmiotem językowym.*

2.3. *Definiowanie* rozumiem jako ustalenie symboli pierwotnych, aksjomatów i reguł inferencji w pewnym języku tak, że możliwe jest rozpoznanie go jako systemu formalnego. Przyjmujemy więc *punkt widzenia podmiotu*.

2.3.1. Jak już zostało powiedziane, aby dokonać definiowania trzeba móc dokonywać przekształceń w języku (używać języka) i móc rozpoznać to, co zostało zdefiniowane jako system aksjomatyczny (a nie bezsensowne napisy).

2.4. Język jest uprzedni wobec wszelkich systemów aksjomatycznych. Taki język należy więc do świata zewnętrznego wobec definiowanego systemu aksjomatycznego. Każda próba opisu języka podmiotu przez system aksjomatyczny jest próbą taką samą, jak próba opisu systemem aksjomatycznym dowolnego fragmentu RZECZYWISTOŚCI — należy do nauk empirycznych. O tej odpowiedniości powiemy jeszcze w punkcie 4.

2.5. Przykład:

System F można zapisać w postaci programu komputerowego. Język zapisu składa się wówczas z dwu symboli: 0 i 1. Operacje (reguły inferencji) kodujemy przy pomocy tego samego alfabetu (zerojedynkowe kody operacji). Są one operacjami językowymi, bo operują na ciągach symboli 0 i 1. Ich zapis jest również językowy. Wyniki (zbiór konsekwencji $Cn(F)$) są zbiorem ciągów znaków 0 i 1. Nie można rozróżnić bez dodatkowej informacji co jest zapisem obiektów, co regułą działania, co wynikiem. Musi istnieć pozajęzykowa[2] reguła przypisania kodom operacji konkretnych operacji, zmieniających stan całego systemu (np. modyfikacja pojedynczego znaku z 0 na 1). Operacje mają kody językowe, operują na języku, ale mają przyczynę pozajęzykową.

Przykład ten jest użytecznym modelem do wskazania pewnych koniecznych cech podmiotu konstruującego system formalny.

2.6. Podstawą konieczną do definiowania systemu formalnego są pojęcia obiektów. Podmiot musi posiadać możliwość wyodrębniania z RZECZYWISTOŚCI pewnych części — obiektów. Inaczej, jeżeli świat jest dany dla przedmiotu jako niepodzielne, izotropowe Jedno, nie jest możliwe ani określanie ani wyróżnianie. Wówczas nie jest więc możliwe definiowanie. Świat rozpoznawa-

[2]Oczywiście tylko w stosunku do omawianego języka służącego do zapisywania obiektów, operacji i ich wyników.

ny przez podmiot musi więc być dyskretyzowalny tj. możliwe jest wyodrębnianie w nim części[3].

2.6.1. Teza: RZECZYWISTOŚĆ poznawalna przez podmiot za pomocą systemów aksjomatycznych musi być dyskretyzowalna.

Ponieważ na drodze formalnej coś poznajemy, można uznać, że jest to cecha naszej RZECZYWISTOŚCI. Z konieczności zajmujemy się więc tylko taką RZECZYWISTOŚCIĄ. Uwaga ta należy do filozofii przyrody i epistemologii, bo mówi zarówno o poznawalnym świecie dyskretyzowalnym, jak i o podmiocie.

2.6.2. Modelem czegoś istniejącego jest pojęcie elementu. Modelem rzeczywistości jest więc pojęcie zbioru wszystkich elementów. Rzeczywistość bez ani jednego czegoś istniejącego jest zbiorem pustym. To wszystko jest *modelem RZECZYWISTOŚCI z której wyodrębniamy poznawczo części* (zob. 2.6.1.). Pojęcia elementu, zbioru i należenia do zbioru są dalej nieuzasadnialne. Są one jedynie modelami (nazwami) czegoś, co pochodzi spoza języka, w którym je teraz opisuję.

2.6.3. Spieranie się o to, czy zbiory istnieją tak samo jak elementy, czy inaczej jest tutaj bezsensowne. Zagadnienie, jaka naprawdę jest rzeczywistość (dyskretyzowalne Jedno czy wielość istniejących) jest domeną metafizyki i pomijam je tutaj. Konieczne natomiast jest założenie, że podmiot poznawczo wyróżnia części i przypisuje im tożsamość.

2.7. Doszliśmy więc do *zasady tożsamości.* Podmiot musi umieć rozpoznawać tożsamość:

$a = a$

oraz brak tożsamości:

$a \neq b.$

2.7.1. Jest to bardzo złożone zagadnienie, jak bowiem podmiot rozpoznaje tożsamość symbolu a w języku mentalnym, «a» zapisanego w tym tekście, «`a`» lub «**a**» zapisanego inną czcionką, «a» zapisanego pismem odręcznym? Zresztą różnią się one położeniem

[3]Pojęcie dyskretyzowalności nie jest najtrafniejsze, ale brak lepszej nazwy w języku polskim.

przestrzennym, dokładnym kształtem, itp. Uznanie tej tożsamości jest konieczne dla podmiotu scharakteryzowanego w punkcie 2. a) – c)[4].

2.7.2. Podmiot musi *abstrahować* od pewnych aspektów znaku, a pewnym *przypisywać doniosłość znaczeniową.* Nie jest to zagadnienie jednoznaczne, weźmy dla przykładu napisy: „kot” i „KOT”. Jeżeli uznamy, że oznaczają to samo — czworonożne zwierzę domowe określane jako kot, to okazuje się wówczas, że zachodzą tożsamości typu: «k» = «K». W innej sytuacji rozróżnienie «k» i «K» może mieć doniosłe znaczenie, np. w systemie Unix nazwy „kot” i „KOT” będą wskazywać w przypadku ogólnym dwa zupełnie różne pliki, wówczas «k» $\neq$ «K».

2.7.3. Podmiot musi więc przyjąć, które aspekty są istotne, a które nie. Określenie tych kryteriów jest konieczne, aby posługiwać się symbolami. Podmiot musi zatem posiadać lub określać samemu *reguły interpretacji tożsamości.* Reguły te mogą być określone tylko przez podmiot. Czy jest to tylko czysta konwencja interpretacji?

2.7.4. Problem ten jest bardzo głęboki. Podmiot musi również zinterpretować tożsamość systemu F, zapisanego w różnych językach. Wydaje się, że w tym przypadku podmiot może uczynić to albo przez zastosowanie reguł przekładu, albo (ogólniej) przez zbadanie konsekwencji. Jeżeli zbiory konsekwencji dwóch systemów aksjomatycznych okażą się według pewnego kryterium izomorficzne, to podmiot może uznać ich tożsamość, w przeciwnym wypadku — brak tożsamości[5].

[4] Wiąże się z tym bardzo interesujące zagadnienie rozpoznawania obrazów. Rzuca ono dużo światła na mechanizmy działania i konieczne cechy podmiotu.

[5] Ta metoda jest jednak nieefektywna w przypadku systemów aksjomatycznych posiadających nieskończoną liczbę konsekwencji, np. dla arytmetyki liczb naturalnych lub dla podanego przykładu systemu formalnego F. Podmiot nie może bowiem porównać nieskończenie wielu konsekwencji. Intrygujący jest fakt, że podmiot mimo, iż nie może operować nieskończonymi (w dowolnym sensie) zbiorami konsekwencji, to może dzięki użyciu metod formalnych wyciągać wnioski dotyczące ich.

Język

3. Język jest *tworzywem* i *uniwersum* systemu F. System formalny jest tworem językowym. Musimy posiadać język z którego stworzymy (zdefiniujemy) F (oznaczmy go J1). W języku tym wyrażamy aksjomaty i reguły inferencyjne[6]. W tym sensie język J1 jest tworzywem dla systemu F. Z drugiej strony, zbiór konsekwencji operuje na języku J2, który nie musi być tożsamy z J1. Można zatem powiedzieć, że język J2 stanowi uniwersum dla F.

3.1. Język musi składać się ze symboli. Symbole te nazywaliśmy już wcześniej znakami. Rozumiemy je jako elementarne cząstki składowe języka[7]. Można je wyróżnić w języku pisanym (litery), mówionym (głoski). Czynię założenie, że każdy język musi charakteryzować się tą właściwością. Zbiór wszystkich symboli elementarnych to *alfabet*. Taki język nazywamy *sformalizowanym*. Dodatkowo, jeśli przyjmiemy założenie, że obiekty tego języka pozbawione są znaczeń (odniesień pozajęzykowych), to będzie on *językiem formalnym*[8].

3.1.1. Twierdzenie Gödla wymaga m.in. tego, aby system aksjomatyczny był normalny (rozsądny, ang. *reasonable*), czyli taki, którego alfabet składa się ze skończonej liczby symboli. System F jest normalny (*reasonable*). Ograniczamy nasze rozważania do języków normalnych[9]. 3.2. Język musi składać się z napisów,

---

[6]To właśnie obecność reguł inferencyjnych w systemie formalnym nie pozwala utożsamić go z językiem. Reguły inferencyjne są to strukturalne reguły wnioskowania dedukcyjnego pozwalające uznawać zdania o określonej strukturze na podstawie już uznanych zdań (por. M. Poletyło, „Reguły dedukcyjne" w: *Mała encyklopedia logiki*, Zakład Narodowy im. Ossolińskich – Wydawnictwo, Wrocław 1998). Nie są one elementem języka.

[7]Hiblert uważał, że istnieje nauka bardziej podstawowa od matematyki. Podał nawet *aksjomat inteligencji* tej nauki: umysł człowieka potrafi tworzyć znaki a następnie je identyfikować.

[8]Zob. W. Marciszewski, „Język" oraz „Język sformalizowany" [w:] *Mała encyklopedia logiki*, dz. cyt.

[9]Interesujący argument na rzecz tego stanowiska podał Alan Turing. Można go przedstawić następująco: ze względu na ograniczoność ludzkiej natury,

jeśli ma być bogatszy od alfabetu. Alfabet można rozumieć jako zbiór różnych napisów nierozkładalnych na mocy konwencji). Napis traktujemy jako złożenie symboli. Można przyjmować albo symbole albo napisy[10] jako podstawowe dla istnienia języka. Jest to nieistotne z naszego punktu widzenia. Przyjmujemy, że symbole są podstawowe, bo ta konwencja jest prostsza w użyciu.

3.3. Podmiot musi dokonywać operacji na znakach, w szczególności konieczne jest dokonywanie *konkatenacji* (łączenia). W przypadku języka systemu F możliwa jest konkatenacja Xb, gdzie w miejsce X możemy wstawić a lub b lub inny dowolny napis języka[11]. Zauważmy, że reguła inferencyjna systemu F jest w tym przypadku po prostu regułą konkatenacji.

3.4. Podmiot musi operować *metajęzykiem* języka pierwszego rzędu J1. Jest on potrzebny, aby opisać znaczenia obiektów, aby uczynić je przenoszalnymi (przekładalnymi) między różnymi reprezentacjami językowymi. W punkcie 0.3., który jest definicją systemu F, do metajęzyka należą napisy: „Oto F:”, „obiekty”, „aksjomat”, „reguła inferencyjna”. Punkt 0.4. (objaśnienie) zawiera zdania metajęzyka. W metajęzyku podaje się znaczenia elementów definicji systemu formalnego.

3.4.1. Teza: *Metajęzyk jest konieczny, aby podmiot mógł rozpoznać napisy z punktu 0.3. jako system aksjomatyczny F.*

---

ilość symboli powinna być skończona, ponieważ w przeciwnym wypadku mielibyśmy problemy z rozróżnieniem symboli, których zapis musiałby się różnić nieskonczenie mało. Nie wchodząc w szczegóły zilustrujmy to następującym przykładem: łatwo rozróżnimy 17 od 999999999, natomiast będziemy mieć już kłopoty z odróżnieniem liczb 999999999999 i 99999999999. Por. A. Turing, „On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem” [w:] M. Davis, *The Undecidable*, Raven Press, New York 1965, ss. 135–136.

[10] Wówczas symbole są sztucznie wydzielonymi powtarzającymi się częściami napisów.

[11] Regułę konkatenacji można zdefiniować również inaczej, np. XY, gdzie X i Y są dowolnymi napisami języka.

3.5. Podmiot musi określić, jakie operacje na języku są niedozwolone, tzn. które operacje dają zawsze wyniki bezsensowne[12].

4. Podmiot rozpoznaje własności systemu aksjomatycznego. Jest to dziedzina matematyki[13].

Relacje

5. Podmiot musi rozpoznawać (określać) *relacje*. Inaczej nie jest możliwy żaden język. Nie jest możliwe nawet zrozumienie tego zdania.

5.1. Podmiot musi posiadać możliwość określania relacji pomiędzy elementami RZECZYWISTOŚCI (przynajmniej potencjalnie). Inaczej RZECZYWISTOŚĆ będzie stanowiła dla niego Jedno tożsame z nim samym (czego jednak nie będzie mógł żadną miarą ustalić).

5.2. Relacje są konieczne do określenia struktury. Relacje językowe odpowiadają relacjom strukturalnym systemu F. Relacje systemu F są językowe.

Zasada podstawienia

6. Podmiot musi posiadać *regułę podstawiania*. Inaczej nie będzie można „rozwinąć” systemu F (podać zbiór konsekwencji $Cn(F)$). Bez reguły podstawiania system będzie mógł składać się tylko z aksjomatów wymienionych explicite. Takie systemy są *trywialne* i nie będziemy się nimi zajmować.

6.1. Aby możliwe było podstawianie musi istnieć pewna zmienna (w przypadku systemu F jest to metazmienna X)[14]. Dzięki

---

[12] Analiza tych ograniczeń to obszerne zagadnienie, dlatego tylko wspominam o tym.

[13] Matematykę rozumiem tutaj jako naukę o przekształceniach struktur.

[14] Warto zauważyć, że paradoksy biorą się właśnie z użycia zmiennych, a dokładnie z pewnych podstawień, gdy za zmienną podstawiamy ją samą (w pewnej formie). Unikanie paradoksów polega na wyeliminowaniu takich podstawień przez przyjęcie odpowiedniej struktury języka i metajęzyka. Takiego zabiegu dokonał Tarski podając swoją definicję prawdziwości zdań, która po-

zmiennym jest możliwy „skrótowy” zapis systemów aksjomatycznych, w przeciwnym razie zbiór konsekwencji $Cn(F)$ byłby zawsze tożsamy ze zbiorem aksjomatów.

6.1.1. Zwróćmy uwagę na przykład 2.5. W przypadku programu komputerowego musi również istnieć przynajmniej jedna zmienna. Dla najprostszych procesorów reprezentowana jest ona akumulatorem (bardziej skomplikowane procesory mają więcej rejestrów). Bez tego niemożliwe jest działanie jakiegokolwiek komputera[15].

6.2. System formalny F jest zapisany w skończonej liczbie znaków[16] (w przykładzie z punktu 0.3. jest to 40 znaków bez znaków oddzielających, które można pominąć). Dzięki regule podstawiania ze skończonego ciągu znaków (systemu F) otrzymujemy nieskończoną, przeliczalną liczbę napisów (patrz 0.5.).

6.3. Podmiot musi mieć możliwość dokonywania podstawień. Zakłada to pewne działanie. Musi on również umieć zinterpretować napisy ze zmiennymi po dokonaniu podstawienia. Podmiot musi też umieć porównywać ciągi. Tylko wtedy będzie mógł rozpoznać system F jako system aksjomatyczny, co jest konieczne do pełnego zdefiniowania (patrz 2.3.).

6.3.1. Dokonywanie podstawień zakłada algorytmiczność działania

6.4. Podmiot musi posiadać możliwość opisania relacji między zbiorami wyrażeń — możliwość zdefiniowania reguł inferencyjnych.

---

zwoliła uniknąć paradoksu kłamcy (A. Tarski, *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*, 1933, por. „Definicja prawdy” [w:] S. Blackburn, *Oksfordzki słownik filozoficzny*, Książka i Wiedza, Warszawa 1997, s. 78).

[15] Maszyna Turinga, będąca matematycznym modelem każdego komputera, posiada pamięć aktualnego stanu, która pełni rolę zmiennej.

[16] Można jednakże zająć się systemami zapisanymi w nieskończonej, przeliczalnej liczbie znaków branych ze skończonego, przeliczalnego alfabetu, jednak wydaje się, że nie mogą być one definiowane przez podmiot. Por. przypis nr 6.

6.4.1. Interesują nas reguły *strukturalne*, czyli takie, które mają wspólny schemat. Dzięki temu możliwa jest „skompresowana" postać sytemu F.

6.4.2. Reguły inferencyjne muszą być efektywne, tzn. mając zadane przesłanki, można powiedzieć jaki jest wniosek. Dzięki temu reguła inferencyjna jest *stosowalna*.

Zakończenie

7. W tym punkcie kończę charakteryzowanie podmiotu, który jest w stanie podać definicję systemu aksjomatycznego F. Zapraszam do dyskusji nad poczynionymi tu propozycjami podkreślając jednocześnie programowy charakter niniejszego artykułu.

Semina □ Nr 3
Scientiarum 2004

Wojciech Załuski

O dwóch aksjomatach teorii zbiorów w kontekście sporu o hipotezę continuum

Uwagi wstępne

Trwający od przeszło wieku spór o hipotezę continuum, w którym kluczową rolę odegrali Georg Cantor, Kurt Gödel i Paul Cohen, dotyka fundamentalnych zagadnień teorii mnogości. Jednym z nich jest pytanie o status i prawomocność niektórych jej aksjomatów. Spośród aksjomatów teorii mnogości tworzących tzw. system ZFC[1] szczególnie kontrowersyjny okazał się aksjomat wyboru: jego przyjęcie jest wprawdzie konieczne dla udowodnienia wielu twierdzeń matematycznych, jednak z uwagi na swój specyficzny[2] charakter został on odrzucony przez wielu matematyków, którzy podjęli próby jego „osłabienia" lub zastąpienia innymi aksjomatami. W niniejszej pracy chcemy zwrócić szczególną uwagę na jedną z wysuniętych propozycji – mianowicie na aksjomat determinacji, ilustrujący ciekawe związki między teorią gier a teorią mnogości.

Hipoteza continuum a aksjomat wyboru

Wprowadzenie aksjomatu wyboru do systemu aksjomatów teorii mnogości było ściśle związane z próbami udowodnienia hipotezy

[1] Od nazwisk jego twórców: Zermelo i Fraenkla; C oznacza dodany aksjomat wyboru (*axiom of choice*).

[2] Antycypując dalsze rozważania, wyjaśnijmy, iż ową „specyfiką" aksjomatu wyboru jest jego niekonstruktywność – pozostałe aksjomaty teorii zbiorów są konstruktywne.

continuum postawionej przez Cantora. Analiza aksjomatu wyboru może być zatem w pełni klarowna tylko wtedy, jeśli przeprowadzi się ją w kontekście sporu o hipotezę continuum.

Otóż, jak wykazała wspomniana analiza, najmniejszą pozaskończoną liczbą kardynalną[3] jest liczba kardynalna zbioru liczb naturalnych (oznaczana jako $\aleph_0$, czyli alef zero[4]). Ponadto, dla każdego zbioru istnieje zawsze zbiór od niego liczniejszy, którym jest zbiór wszystkich jego podzbiorów, zwany zbiorem potęgowym. Liczba kardynalna odpowiadająca continuum wynosi $c = 2^{\aleph_0}$, jest zatem równa liczbie 2 podniesionej do potęgi będącej licznością nieskończonego zbioru liczb naturalnych[5]. Pytanie, które zadał Cantor, brzmi: czy istnieje inna pozaskończona liczba kardynalna – inny alef – który leży między alef zero i pozaskończoną liczbą kardynalną odpowiadającą continuum? **Odpowiedź negatywna na to pytanie jest właśnie hipotezą continuum**[6]. Problem dostrzeżony przez Cantora można, jak widzimy, wypowiedzieć w pro-

---

[3]Liczba kardynalna, moc zbioru i liczność są terminami równoznacznymi; dwa zbiory X i Y posiadają tę samą liczbę kardynalną, gdy są równoliczne, tj. gdy istnieje wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie zbioru X na zbiór Y. Liczbą kardynalna zbioru pustego jest 0, liczbą kardynalną zbioru skończonego jest ilość elementów tego zbioru, czyli dana liczba naturalna – por. np. Kuratowski 1966.

[4]Alef ($\aleph$) jest pierwszą literą alfabetu hebrajskiego. Indeksowanymi alefami Cantor oznaczał kolejne pozaskończone liczby kardynalne (ta konwencja jest obecnie powszechnie przyjęta). O mistycznych korzeniach badań nad nieskończonością, zgłębianiu tajemnic Kabały jako inspiracji tych badań, magicznej aurze, jaką otoczona jest w tradycji hebrajskiej litera $\aleph$ bardzo interesująco pisze Aczel (Aczel 2002).

[5]W identyczny sposób możemy tworzyć coraz liczniejsze zbiory, np. aby skonstruować zbiór potęgowy liczb rzeczywistych, bierzemy pod uwagę wszystkie jego podzbiory – w rezultacie otrzymujemy zbiór d, którego liczność wynosi 2^c; tę procedurę można iterować i w efekcie dochodzimy do coraz większych liczb kardynalnych. Liczby te ciągną się w nieskończoność, nie istnieje więc największa liczba kardynalna (dla każdej liczby kardynalnej możemy utworzyć liczbę kardynalną od niej wyższą, będącą jej zbiorem potęgowym).

[6]Hipoteza continuum mówi zatem, że moc zbioru typu continuum wynosi alef jeden, czyli jest najmniejszą liczbą kardynalną większą od mocy zbioru liczb naturalnych.

stym języku tak, iż na pierwszy rzut oka nic nie wskazuje na to, że sięga on samych podstaw matematyki i dotyka fundamentalnych zagadnień filozoficznych.

Jeśli hipoteza continuum byłaby zdaniem prawdziwym, to c można by oznaczyć jako $\aleph_1$, a więc jako pozaskończoną liczbę kardynalną występującą *bezpośrednio* po alef zero, który jest najniższym rzędem nieskończoności. Hipotezę continuum wyraża zatem równość: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, zaś – po uogólnieniu dokonanym przez Hausdorffa – równość: $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ (jest to tzw. uogólniona hipoteza continuum łącząca *każdy* alef z alefem, który bezpośrednio go poprzedza). Przejdźmy teraz do kwestii związanych z dowodliwością hipotezy continuum.

Otóż, warunkiem wstępnym, który musi być spełniony, by moc w ogóle podejmować próby udowodnienia tej hipotezy, jest znalezienie reguły pozwalającej porównywać pozaskończone liczby kardynalne[7] (z faktu, iż taka reguła istnieje, wynikałoby, iż każda z owych liczb przynależy do skali *alefów* $\aleph_1$, $\aleph_2$, $\aleph_3$,..., $\aleph_n$, którą Cantor oznaczył symbolem *taf*[8]). Zatem każda pozaskończona liczba kardynalna znajdzie swoje miejsce w skali *taf* pod warunkiem, iż istnieje sposób porównywania wszystkich możliwych par tychże liczb, tj. jeśli dla dowolnych dwóch pozaskończonych liczb kardynalnych jedna z nich jest równa lub większa od drugiej[9]. Zachodzenie tej relacji także dla pozaskończonych liczb kardynalnych gwarantuje **twierdzenie o dobrym porządku,** które głosi, że *każdy zbiór daje się dobrze uporządkować, a zbiór dobrze uporządkowany to taki, którego każdy niepusty podzbiór ma element najmniejszy*[10]. Gdyby twierdzenie to okazało się prawdziwe, to

[7] Por. Aczel 2002.

[8] Będącym ostatnią liczbą alfabetu hebrajskiego.

[9] W takiej relacji pozostają np. dwie dowolne liczby rzeczywiste.

[10] Aczel 2002, s.139. Zatem jeśli mamy zbiór złożony z dwóch elementów $\{1, 2\}$, to zbiór wszystkich jego podzbiorów ma cztery elementy: *emptyset* $\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$; każdy z niepustych podzbiorów ma element najmniejszy; są nimi odpowiednio $1, 2, 1$. Warto podkreślić, że zbiór liczb rzeczywistych nie jest dobrze uporządkowany: nie da się wskazać dla danej liczby

pozaskończone liczby kardynalne tworzyłyby skalę zbiorów dobrze uporządkowanych; w takiej sytuacji aby dowieść hipotezy continuum, należałoby wykazać, że liczba kardynalna odpowiadająca continuum jest w skali *taf* drugą pozaskończoną liczbą kardynalną, czyli $\aleph_1$. Jak pisze Aczel: *widzimy zatem, że hipoteza continuum może być spełniona tylko wtedy, jeśli każda pozaskończona liczba kardynalna będzie jednym z alefów Cantora; a do udowodnienia tego koniecznego warunku trzeba było wykazać, że każdy zbiór można dobrze uporządkować*[11]. Dowód twierdzenia o dobrym porządku[12] został podany w roku 1904 przez Zermelo, który posłużył się w nim **aksjomatem wyboru**.

Aksjomat wyboru[13]**:**

Jeżeli R jest rodziną zbiorów, żaden z tych zbiorów nie jest pusty i żadne dwa zbiory należące do tej rodziny nie mają wspólnych elementów, to istnieje taki zbiór (zwany selektorem), który zawiera dokładnie po jednym elemencie z każdego zbioru należącego do rodziny R.

rzeczywistej ani liczby bezpośrednio po niej następującej, ani jej poprzedzającej; ponadto między dwie dowolne, różne liczby można wstawić nieskończenie wiele innych liczb, a zbiór ograniczony z dołu może nie mieć elementu najmniejszego (np. przedział $(0, 1)$). Nie jest zresztą dobrze uporządkowany również zbiór liczb całkowitych, gdyż nie ma on elementu najmniejszego.

[11] A.D Aczel, *Tajemnica alefów. Matematyka. Kabała i poszukiwanie nieskończoności*, Rebis, Poznań 2002, s.142.

[12] Z twierdzenia Zermelo wynika np., że także liczby rzeczywiste można dobrze uporządkować, a więc tak, iżby dla każdego elementu istniał element następny; nie ma jednak konkretnej metody wskazującej, jak to zrobić; inaczej jest w przypadku liczb całkowitych, które można dobrze uporządkować w następujący sposób: $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$ – każdy podzbiór tego ciągu ma element najmniejszy, a więc w przypadku każdej liczby wiadomo, jaka po niej nastąpi.

Kontrowersje wokół aksjomatu wyboru

Niebawem po sformułowaniu przez Zermelo dowodu twierdzenia o dobrym porządku rozpoczęła się burzliwa dyskusja na temat zasadności przyjęcia aksjomatu wyboru. Krytycy tego aksjomatu zwrócili uwagę na fakt, iż nie jest rzeczą oczywistą, że wybór elementów ze zbiorów należących do danej rodziny jest możliwy, jeśli zbiorów tych jest nieskończenie wiele; sam Zermelo nie zdołał np. podać żadnej reguły wskazującej, w jaki sposób można by przeprowadzić ów nieskończony ciąg wyborów. W istocie cały problem dotyczył tego, jak należy rozumieć wyrażenia, które mówią o istnieniu bytów matematycznych. Przeciwnicy włączania aksjomatu wyboru – mimo jego intuicyjnej oczywistości – do zestawu aksjomatów teorii mnogości reprezentowali nurt intuicjonistyczny w filozofii matematyki, w ramach którego istnienie bytów matematycznych utożsamia się z możliwością ich efektywnego skonstruowania. Nic więc dziwnego, że odrzucali oni aksjomat wyboru, który nie dostarcza żadnych algorytmów wyboru zbioru reprezentantów (czyli selektora), lecz tylko stwierdza jego istnienie (jest zatem niekonstruktywny).

Dodajmy, że matematycy sformułowali wiele twierdzeń równoważnych aksjomatowi wyboru; jednym z nich okazało się twierdzenie o dobrym uporządkowaniu, które, jak pisze Aczel, *zostało od razu uznane za podejrzane, gdyż uwierzenie w jego dowód było równoznaczne z przyjęciem, że istnieje możliwość wybierania elementu ze zbioru nieskończenie wiele razy*[14]; inne równoważne twierdzenia to lemat Kuratowskiego–Zorna[15], twierdzenie Tichonowa o produkcie przestrzeni topologicznych, lemat Teichmüllera–Tukeya, czy aksjomat multiplikatywny Russella[16]. Cechą wspólną wszystkich tych twierdzeń,

---

[14] Aczel 2002, s. 142.

[15] Mówi on, że jeśli A jest rodziną zbiorów o następującej własności: $\left(\bigcup_{X \in B} X\right) \in A$ dla każdej monotonicznej rodziny $B \subset A$ i jeśli istnieje funkcja wyboru dla rodziny $P(A) - \{\emptyset\}$, to istnieje element maksymalny w A (sformułowanie to pochodzi z Kuratowski 1966).

[16] Por. Marciszewski (red.) 1988, s. 141.

która czyni je „podejrzaną” w oczach wielu matematyków, jest fakt, iż należą one do tzw. twierdzeń egzystencjalnych, tj. takich, które podają tylko warunki istnienia jakiegoś obiektu, nie wskazują natomiast metody jego konstrukcji.

Przeciwnicy dołączania aksjomatu wyboru do systemu Zermelo – Fraenkla zwrócili także uwagę na fakt, że aksjomat ten *prowadzi do paradoksalnych konsekwencji*. Stwierdza on mianowicie istnienie zbiorów i funkcji *niemierzalnych*, tj. gwarantuje, że istnieje (choć oczywiście nie podaje metody jego konstrukcji) zbiór na płaszczyźnie, którego pola nie da się określić oraz zbiór w przestrzeni trójwymiarowej, którego objętości również nie można określić. Na tezie o istnieniu takich zbiorów oparte jest słynne twierdzenie Banacha–Tarskiego o paradoksalnym rozkładzie kuli, które przewiduje możliwość rozkładu kuli o danym promieniu na pewną skończoną liczbę części w taki sposób, że da się z nich następnie złożyć dwie kule o identycznym promieniu jak kula pierwotna; kulę rozbija się właśnie na zbiory niemierzalne (a nie na „zwykłe kawałki”), których istnienie gwarantuje aksjomat wyboru[17].

Zanim przejdziemy do omówienia aksjomatu determinacji, który miał zastąpić problematyczny aksjomat wyboru, przedstawimy dalszy ciąg zmagań matematyków z hipotezą continuum, tworzącą tło i niezbędny kontekst dla naszych rozważań poświęconych dwóm aksjomatom teorii zbiorów.

O dalszych losach hipotezy continuum

Dalsze badania wykazały, że w ramach aksjomatyki ZFC nie da się ani udowodnić ani obalić hipotezy continuum – jest zatem zdaniem nierozstrzygalnym[18], tj. takim, o którym – na podstawie przyjętego systemu aksjomatów – nie możemy powiedzieć, czy jest prawdziwe, czy fałszywe. Przedstawmy w zarysie przebieg tych badań.

---

[17]Warto również dodać, że zbiory *niemierzalne*sprawiają szczególne kłopoty np. przy rozwiązywaniu zadań z rachunku całkowego.

[18]Jest to zatem jeden z argumentów przeciw programowi Hilberta, zgodnie z którym w matematyce nie może być żadnego *ignorabimus*.

Otóż najpierw Gödel dowiódł, że założenie o prawdziwości hipotezy continuum i aksjomatu wyboru nie jest sprzeczne z pozostałymi aksjomatami teorii mnogości[19], nie może więc być obalone; okazało się zatem, że hipoteza continuum i aksjomat wyboru mogą być dołączone do systemu aksjomatów teorii mnogości. Oczywiście dowód Gödla nie rozstrzygał o prawdziwości hipotezy Cantora – jak pisze Aczel: *wynik Gödla był połową dowodu, że hipoteza continuum i aksjomat wyboru są niezależne od reszty matematyki*[20]; „drugą część" dowodu przeprowadził Cohen, który, posługując się metodą tzw. *forcingu*[21], wykazał, że aksjomat wyboru i hipoteza continuum nie wynikają z pozostałych aksjomatów, są więc od nich niezależne[22] (zatem ani dołączenie hipotezy continuum do systemu ZF, ani dołączenie jej negacji nie rodzi w nim sprzeczności)[23].

Widzimy zatem, że hipoteza continuum jest jednym ze zdań nierozstrzygalnych (których dotyczy słynne twierdzenie Gödla o niezupełności). Oczywiście twierdzenie Gödla nie wyklucza tego, że w ramach bogatszego systemu aksjomatów da się dowieść, że bądź hipoteza continuum bądź jej negacja jest prawdziwa. War-

[19] W dzienniku Gödla, który po sformułowaniu twierdzenia o niezupełności zajął się problemem continuum, odnajdujemy taki zapis: *Kont. Hyp. im wesentlichen gefunden in der Nacht zum 14 und 15 Juni 1937* – por. Aczel 2002 oraz Gödel 1947.

[20] Aczel 2002, s. 167.

[21] Oto jak (bardzo szkicowo) charakteryzuje te metodę Aczel (2000, s. 176): *Forcing to wymuszanie na zbiorze postulatów przyjmowania jednej z dwóch wartości; następnie stopniowo przechodzi się z rodzinami zbiorów i prawami logicznymi, które ich dotyczą, do coraz większych zbiorów, w których prawa te nadal obowiązują. Manipulowanie postulatami w ramach większego systemu logicznego pozwala dowieść, że hipoteza continuum jest niezależna od aksjomatów teorii mnogości.*

[22] Ujmując rzecz ściślej: aksjomat wyboru jest niezależny od aksjomatów teorii mnogości, zaś hipoteza continuum jest niezależna od aksjomatów teoriomnogościowych także z włączonym aksjomatem wyboru.

[23] Warto dodać, że już Gödel – kilkanaście lat po udowodnieniu niesprzeczności hipotezy continuum – wyraził przypuszczenie, że jest ona także niezależna; przypuszczenie to, jak wiemy, zostało potwierdzone, przez dowód Cohena — por. Gödel 1947.

to zauważyć, że sam Gödel, jak wiadomo zwolennik platońskiego realizmu, był przekonany o sensowności poszukiwań aksjomatów, które pozwoliłyby pełniej opisać, jego zdaniem istniejący obiektywnie, świat struktur matematycznych i tym samym rozwiązać różne „otwarte” problemy matematyczne, m.in. właśnie problem hipotezy continuum. W swojej przełomowej pracy[24] z 1938 roku Gödel wyraził pogląd, że naturalnym uzupełnieniem aksjomatów teorii mnogości może być aksjomat konstruowalności[25], który w połączeniu z systemem ZF pozwala dowieść aksjomatu wyboru i uogólnionej hipotezy continuum. Jak pisze jednak Cohen, *jest mało nadziei na to, że aksjomat taki zostanie zaakceptowany jako intuicyjnie oczywisty; bardziej prawdopodobne wydaje się raczej to, że jako aksjomat zostanie zaakceptowana jego negacja*[26]; dodać zresztą należy, że już w artykule z 1947[27] roku Gödel zmienił zdanie, twierdząc, że aksjomat konstruowalności nie doprecyzowuje pojęcia zbioru nieskończonego w odpowiedni sposób.

Podsumowując tę krótką dygresję na temat hipotezy continuum, trzeba podkreślić, że – w odróżnieniu od Cantora – zarówno Cohen, jak i Gödel (mimo pewnych wahań związanych z przejściową akceptacją aksjomatu konstruowalności) nie wierzyli w jej prawdziwość. Cohen uważał na przykład, że continuum, skonstruowane przy pomocy aksjomatu zbioru potęgowego, jest nieosiągalne drogą konstrukcji opartej na aksjomacie zastępowania[28], jest zatem zbiorem na tyle bogatym, że należy go traktować jako zbiór większy niż $\aleph_1$, $\aleph_n$, $\aleph_\omega$ itd.[29]; natomiast Gödel wskazywał na nie-

[24] Gödel 1938.

[25] Głosi on, że każdy zbiór jest konstruowalny (czyli, że $V = L$, gdzie V oznacza uniwersum wszystkich zbiorów, zaś L — uniwersum zbiorów konstruowalnych).

[26] Cohen 1971, (w przekładzie polskim), s. 131.

[27] Gödel 1947.

[28] Oto jego treść: jeżeli A jest zbiorem i każdemu elementowi zbioru A przyporządkowano jakiś element (należący do A lub nie), to wszystkie przyporządkowane elementy też tworzą zbiór – por. Kuratowski 1966.

[29] Cohen dodawał jednak, że takie rozważania są „czystą spekulacją” – por. Cohen 1971.

intuicyjny charakter niektórych konsekwencji tej hipotezy np. na fakt, iż wynika z niej istnienie „małych" zbiorów mocy continuum oraz podkreślał, iż żadne wiarygodne zdanie nie implikuje tej hipotezy[30]. Jednak, jak zaznacza Wójtowicz, *argumenty te nie są powszechnie uważane za rozstrzygające dyskusję*[31].

Aksjomat determinacji zamiast aksjomatu wyboru?

Problemy, jakie niesie z sobą przyjęcie aksjomatu wyboru, skłoniły wielu matematyków do poszukiwania alternatywnych aksjomatów, które mogłyby zostać dołączone do systemu Zermelo-Fraenkla. Jedną z najbardziej interesujących propozycji jest tzw. aksjomat determinacji[32], oparty na pewnej grze wymyolonej przez Stefana Banacha. Oto zasady tej gry[33]: dwóch graczy wybiera na przemian jedną z cyfr od 0 do 9, tworząc w ten sposób pewien ich nieskończony ciąg np. $8, 5, 3, 4, \ldots$, któremu odpowiada liczba z przedziału $[0, 1]$ o rozwinięciu dziesiętnym danym przez ów ciąg, np. $0,8534\ldots$. Przed rozpoczęciem gry *gracz I* wybiera pewien podzbiór A odcinka $[0, 1]$ i usiłuje doprowadzić do tego, aby wygenerowana wspólnie z *graczemII* liczba znalazła się w tym zbiorze; natomiast *gracz II* dąży do tego, aby wyprodukowana liczba nie znalazła się w tym zbiorze A. Gra Banacha – oznaczana dalej jako Γ_A – stanowi przykład gry nieskończonej w postaci ekstensywnej[34]. Czy którykolwiek z graczy ma w tej grze stra-

[30] Przegląd argumentów za i przeciw prawdziwości hipotezy continuum można znaleźć w Wójtowicz 2002, s. 128–137.

[31] Wójtowicz 2002, s. 125.

[32] O tym aksjomacie, sformułowanym notabene przez polskich matematyków Mycielskiego i Świerczkowskiego, napisano m. in. *[it]is the most interesting alternative to the axiom of choice* – Jech 1977, s. 365.

[33] Por. Malawski, Wieczorek, Sosnowska 1997, s.183 oraz Jech 1977, s. 369.

[34] Postać ekstensywna gry to po prostu rozbudowany graf lub rozgałęzione drzewo ilustrujące wszystkie możliwe przebiegi danej gry wieloetapowej. Takie drzewo lub graf konstruuje się przez wskazanie punktu początkowego gry, określenie możliwych posunięć graczy w kolejności: *gracz*1 – *gracz*2 – ewentualnie *gracz n* – znów *gracz*1 (każdemu wierzchołkowi oprócz wierzchołka końcowego

tegię wygrywającą? Odpowiedź na to pytanie zależy od rodzaju zbioru A: jeśli zbiór A będzie np. zbiorem liczb mających cyfrę 2 na drugim miejscu po przecinku, to zwycięzcą będzie oczywiście *gracz* II[35], jeśli zaś będzie to np. zbiór liczb mających cyfrę 8 na siódmym miejscu po przecinku, to zwycięży *gracz* I. **Gra Γ_A jest zdeterminowana, jeśli jeden z graczy ma w niej strategię wygrywającą**[36].

Aksjomat determinacji[37]**:**

dla każdego zbioru A, gra Γ_A jest zdeterminowana.

Aksjomat determinacji jest bardzo intuicyjny; nie daje się jednak pogodzić z równie intuicyjnym aksjomatem wyboru, gdyż, jak pisze Jech, *posługując się dobrym porządkiem zbioru wszystkich ciągów liczb całkowitych, można skonstruować grę, która nie jest zdeterminowana*[38]. Należy zatem dokonać wyboru między oboma aksjomatami, gdyż ich równoczesne przyjęcie rodzi sprzeczność.

---

przypisany jest dokładnie jeden gracz) aż do osiągnięcia jednego z punktów końcowych, przy których znajduje się opis wygranych poszczególnych graczy; por. np. Berninghaus, Erhhart, Güth 2002, ss. 89–113.

[35] W przypadającym na niego ruchu wybierze np. cyfrę 9.

[36] Strategia jest wyczerpującym opisem postępowania gracza w każdej sytuacji, która może zaistnieć w trakcie gry. Strategią wygrywającą natomiast jest taka strategia, która prowadzi do wygranej niezależnie od tego, jakie ruchy wykona przeciwnik. Warto podkreślić, że teoria gier nie gwarantuje, że *dla każdej* gry istnieje strategia wygrywająca (teza o istnieniu takiej strategii dla każdej gry jest w istocie teoriogrowym odpowiednikiem prawa wyłączonego środka); Zermelo wprawdzie dowiódł, że wszystkie gry dwuosobowe o sumie zerowej o skończonej głębokości, tj. w których każdy z graczy ma skończoną liczbę strategii, są zdeterminowane; pozostają jednak inne typy gier, np. gry nieskończone, dla których istnienie strategii wygrywającej można co najwyżej postulować, wprowadzając aksjomat determinacji; por. np. Fudenberg, Tirole 1993, s. 13.

[38] *Using a well–ordering of the set of all sequences of integers, one can construct a game that is not determined.* – Jech 1977, s. 365.

***

Omówiliśmy wyżej szereg zarzutów, jakie wysuwa się zwykle przeciw aksjomatowi wyboru; pojawia się jednak pytanie, czy aksjomat ten można całkowicie wyeliminować z teorii zbiorów. Większość matematyków uważa, że nie jest to możliwe, gdyż pełni on zbyt doniosłą rolę m.in. w logice matematycznej, czy takich działach matematyki, jak algebra abstrakcyjna, analiza funkcjonalna, teoria miary[39] (jest to tzw. *argument zewnętrzny* za aksjomatem wyboru, tj. wskazujący na to, iż jest on konieczny dla nauki; argumentem wewnętrznym jest wspomniana już wcześniej intuicyjna oczywistość tego aksjomatu[40]). Można jednak osłabić aksjomat wyboru, ograniczając możliwość wyboru tylko do niektórych sytuacji[41].

„Osłabiony” aksjomat wyboru powstaje np. wtedy, gdy rodziny zbiorów zostają zawężone do takich, które są przeliczalne, a więc równoliczne ze zbiorem liczb naturalnych; innym przykładem jest aksjomat zależnego wyboru (*axiom of dependent choice*), który mówi, że jeśli pewnym elementom x jakiegoś zbioru X przyporządkujemy niepuste zbiory $F(x)$ i również każdemu elementowi y każdego zbioru postaci $F(x)$ przyporządkujemy pewien niepusty zbiór $F(y)$, to wówczas można znaleźć taki ciąg $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, że x_1 należy do zbioru $F(x_0)$, x_2 należy do $F(x_1)$, itd. Nazwa aksjomatu pochodzi stąd, że wybór każdego elementu x_i tego ciągu zależy od wyboru poprzedniego elementu x_{i-1}.

Niekontrowersyjne aksjomaty teorii mnogości[42] w połączeniu z osłabionym aksjomatem wyboru albo aksjomatem determinacji

---

[39] Aksjomat wyboru jest używany np. w definicji ciągłości funkcji Cauchy'ego, w dowodzie twierdzenia Hahna–Banacha; więcej przykładów jego zastosowania można znaleźć w Murawski 2001.

[40] Rozróżnienie to pochodzi od Maddy 1988.

[41] Malawski, Wieczorek, Sosnowska 1997, s. 189.

[42] Np. aksjomat ekstensjonalności sumy, zastępowania, nieskończoności itd. Słowo „niekontrowersyjne” być może nie jest w pełni trafne, gdyż niektóre z nich np. aksjomat wyróżniania również wzbudzają rożnego rodzaju wątpliwości; jednak żaden z tych aksjomatów nie był nigdy kwestionowany z równie poważnych powodów jak aksjomat wyboru.

tworzą układ pozwalający udowodnić wiele znanych twierdzeń matematycznych[43] i wyeliminować niepożądane konsekwencje pierwotnego aksjomatu wyboru (taka konfiguracja aksjomatów nie pozwala już np. na przeprowadzenie paradoksalnego rozkładu kuli, pozostają zatem wyłącznie zbiory i funkcje mierzalne). Jak pisze jednak A. Wieczorek: *mimo iż takim zmodyfikowanym układem aksjomatów można udowodnić prawie wszystkie znane twierdzenia matematyczne, które znajdują zastosowanie w codziennej praktyce (...) siła naszego przyzwyczajenia i tradycji jest jednak wielka i chyba nadal, mimo zalet zmodyfikowanej aksjomatyki, będziemy posługiwać się starym wysłużonym zestawem aksjomatów Zermelo–Fraenkla*[44]. Opinię Wieczorka należy jednak skonfrontować z komentarzem Jecha, który zaznacza, że mimo zalet, jakie posiada aksjomat determinacji, zwłaszcza w kontekście deskryptywnej teorii zbiorów, jest on z pewnych względów problematyczny, np. implikuje on osobliwą prawidłowość – mianowicie, iż $\aleph_1$ i $\aleph_2$ to mierzalne liczby kardynalne, $\aleph_3$, $\aleph_4$ nie są mierzalne, zaś $\aleph_{\omega+1}$, $\aleph_{\omega+2}$ znów są mierzalne; co gorsza, nie jest rzeczą pewną, że wszystkie jego konsekwencje są niesprzeczne.

Np. nie wiadomo, czy niesprzeczne jest twierdzenie: *każdy podzbiór $\aleph_1$ albo zawiera zamknięty nieograniczony zbiór albo jest z nim rozłączny*[45]. Jech podkreśla, że to zdanie implikuje tezę, że $\aleph_1$ jest mierzalną liczbą kardynalną (*measurable cardinal*); teza ta jest wprawdzie niesprzeczna, Jech dodaje jednak, że implikacje zdania „każdy podzbiór $\aleph_1$ albo zawiera zamknięty nieograniczony zbiór albo jest z nim rozłączny" zdają się być dużo silniejsze (*appear to be much stronger*), gdyż implikują istnienie modeli teoriomnogościowych z wieloma mierzalnymi liczbami kardynalnymi.

[43]Np. Jech pisze: *The axiom of determinacy is particularly appreciated by the descriptive set theorists; it implies the countable axiom of choice, and so the basic theorems on real numbers are not affected by the absence of the axiom of choice (...) Moreover, the axiom of determinacy settles various problems on projective sets, like uniformization and reduction theorems* – Jech 1977, s. 366.

[44]Malawski. Wieczorek, Sosnowska 1997, s. 189.

[45]*Every subset of $\aleph_1$ either contains or is disjoint from a closed unbounded set*" Jech 1977, s. 366.

Ważną konkluzją rozważań Jecha jest konstatacja, że udowodnienie niesprzeczności wspomnianego twierdzenia lub twierdzeń podobnych byłoby pierwszym krokiem w kierunku wykazania niesprzeczności samego aksjomatu determinacji.

Uwagi końcowe

Współczesna teoria mnogości jest najczęściej interpretowana w duchu filozoficznego realizmu[46]. Inaczej mówiąc: fakt, iż w wielu przypadkach nie można zdefiniować funkcji pozwalającej dokonać wyboru reprezentantów z danej rodziny zbiorów, jest uznawany przez większość matematyków za nieistotny dla kwestii istnienia selektora – zbiór ów uchodzi za *istniejący*niezależnie od tego, czy da się go skonstruować. Przyjęcie realistycznego stanowiska w kwestii istnienia obiektów matematycznych, które z wielu względów wydaje się bardziej przekonujące niż stanowisko intuicjonistyczne[47], znacznie osłabia pozycję krytyków aksjomatu wyboru (już zachwianą przez fakt, iż aksjomat wyboru, jak wspominaliśmy, jest konieczny dla udowodnienia wielu twierdzeń); pamiętając jednak o wspomnianych wyżej „paradoksalnych” konsekwencjach tego aksjomatu, za przesadną należy uznać opinię, iż *gdy abstrahować od rozróżnień dotyczących opozycji między istnieniem i konstrukcją, aksjomat wyboru staje się jednym z najmniej problematycznych aksjomatów teorii mnogości*[48]. Niemniej jednak wypada zgodzić się z tezą, że aksjomat determinacji nie jest autentyczną alternatywą dla aksjomatu wyboru w ramach systemu Zermelo-Fraenkla.

[46]Por. Maddy 1988.

[47]Interesującą argumentację na rzecz realizmu prezentuje np. Roger Penrose w swej słynnej książce *Nowy umysł cesarza. O komputerach, umyśle i prawach fizyki*, PWN, Warszawa 2000.

[48]D. A. Martin, *Sets versus classes*, cytat za: Maddy 1988, s.172 (w przekładzie polskim).

Literatura cytowana:

S. K. Berninghaus, K.–M. Erhhart, W. Güth (2002), *Strategische Spiele. Eine Einführung in die Spieltheorie*, Springer, Berlin.

P. J Cohen (1971), *Comments on the foundations of set theory*, w: *Axiomatic Set Theory*, D. Scott (red.), „Proceedings of Symposia in pure mathematics", t. 13, cz. 1, Providence, Rhode Island 1971, ss. 9–16. Przekład polski: *O podstawach teorii mnogości*, w: *Współczesna filozofia matematyki* (wybór i przekład R. Murawskiego) (2001), PWN, Warszawa.

D. Fudenberg, J. Tirole (1993), *Game Theory*, MIT Press, Cambridge Massachusetts.

K. Gödel (1938), *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*, „Annals of Mathematical Studies", vol. 3, Princeton University Press, Princeton.

K. Gödel (1947), *What is Cantor's problem continuum*?, „The American Mathematical Monthly" 54, ss. 515–525. Przekład polski: *Co to jest Cantora problem continuum*? w: *Współczesna filozofia matematyki* (wybór i przekład R. Murawskiego) (2001), PWN, Warszawa, ss. 103–123.

T. J. Jech (1977), *About the Axiom of Choice*, w: *Handbook of Mathematical Logic* (red. J. Barwise), North Holland Publishing Company, ss. 346–369.

K. Kuratowski (1966), *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, PWN, Warszawa.

P. Maddy (1988), *Believing the axioms I, II*, „Journal of Symbolic Logic" 53, ss. 481–511 oraz 736–764. Przekład polski:

Wierząc w aksjomaty, w: *Współczesna filozofia matematyki* (wybór i przekład R. Murawskiego) (2001), PWN, Warszawa, ss. 171–173.

M. Malawski, A. Wieczorek, H. Sosnowska (1997), *Konkurencja i kooperacja. Teoria gier w ekonomii i naukach społecznych*, PWN, Warszawa.

W. Marciszewski (red.) (1988), *Mała encyklopedia logiki*, Ossolineum, Wrocław.

R. Murawski (2001), *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, PWN, Warszawa.

K. Wójtowicz (2002), *Platonizm matematyczny. Studium z filozofii matematyki Kurta Gödla*, Biblos — Tarnów, OBI — Kraków.

Semina ☐ Nr 3
Scientiarum 2004

Maria Piesko

Twierdzenie Gödla i marzenie Leibniza[1]

Podczas jednego z seminariów z kognitywistyki prowadzący je prof. J. Perzanowski wypowiedział sąd, który pozostał dla mnie przez jakiś czas zagadkowy, mimo iż nie zupełnie obca była mi filozofia Leibniza i sławny artykuł Gödla „Über formal unentscheidbare Sätze…”[2]. Profesor stwierdził mianowicie, że niesłuszne jest mniemanie, jakoby twierdzenie Gödla o niezupełności matematyki obaliło projekt Leibniza znalezienia *scientia universalis* — uniwersalnej nauki posługującej się *lingua characteristica* — idealnym językiem opisującym całość rzeczywistości w tak doskonały sposób, że wszelkie rozumowania (w szczególności filozoficzne) można by sprowadzić do odpowiednich obliczeń przeprowadzanych w specjalnym rachunku (*calculus ratiocinator*). „Gödel odkrył po prostu zdanie przypadkowe *a priori*”. Odkrył zatem, jak tłumaczył profesor Perzanowski, że nie wszystkie prawdy matematyczne są konieczne. Cóż to znaczy? Pytanie okazało się tym bardziej niepokojące, że konkluzję, iż twierdzenia Gödla (a dokładniej późniejszy dowód Churcha nierozstrzygalności rachunku predykatów, którego konsekwencją jest niezupełność tego rachunku) pokazały

[1] Za przejrzenie tego artykułu i cenne uwagi pragnę podziękować Panu Profesorowi Jerzemu Perzanowskiemu, Księdzu Doktorowi Adamowi Olszewskiemu i Panu Doktorowi Bartoszowi Brożkowi. Nie ponoszą oni oczywiście odpowiedzialności za treść tego tekstu (niestety nie udało mi się zgodzić ze wszystkimi ich twierdzeniami).

[2] K. Gödel, „Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I”, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38 (1931), ss. 173–198; angielski przekład: „On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems I”, *The Undecidable. Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions*, M. Davies (ed.), Raven Press, New York, 1965, ss. 5–38.

nierealizowalność marzenia Leibniza, znalazłam w tak znakomitej książce, jaką jest *Classical Recursion Theory* P. Odifreddiego[3].

Wydaje się, że wynik Gödla godzi w Leibnizjański plan stworzenia *lingua characteristica* — możliwości systemów formalnych okazały się ograniczone. Nadzieję na *calculus ratiocinator* zdają się ostatecznie przekreślać twierdzenia o nierozstrzygalności i teza Churcha–Turinga. W poniższym tekście zamierzam rozważyć, czy tak jest rzeczywiście.

Przyjrzyjmy się najpierw twierdzeniu Gödla. Głosi ono, iż jeśli teoria T jest niesprzeczna, „zawiera" elementarną arytmetykę (tzw. „słabą arytmetykę") i jest oparta o rozstrzygalny zbiór aksjomatów, to jest ona niezupełna. Zatem w języku teorii T można utworzyć zgodnie z regułami formacji zdanie G takie, że ani zadanie G ani jego zaprzeczenie $\neg G$ nie są twierdzeniami teorii T (nie istnieje dla nich dowód w T).

Na pierwszy rzut oka można więc stwierdzić, że rzeczywiście wynik ten zdaje się zagrażać planom Leibniza, jego sławnemu postulatowi *Calculemus!* Jeśli filozofowie pokłóciliby się o prawdziwość zdania G, ich sporu nie można by rozstrzygnąć przez proste odwołanie się do rachunków.

Jak wiadomo, nie zawsze to, co wydaje się oczywiste na pierwszy rzut oka, jest prawdziwe. Przyjrzyjmy się zatem twierdzeniu uważniej. Do rozpatrzenia pozostają:

- założenia,
- wniosek,
- dowód.

[3] P. Odifreddi, *Classical Recursion Theory. The Theory of Function and Sets of Natural Numbers*, Elsevier, Amsterdam – New York – Tokyo, s. 164.

Dowód

Dowód w różnych, bardziej i mniej technicznych wersjach, został przytoczony w tym numerze czasopisma. Nadto, żeby wskazać na wagę założeń, które pragnę podkreślić, należałoby prześledzić dość żmudne, techniczne szczegóły, które stosunkowo łatwo znaleźć w książkach dotyczących teorii rekursji. Pozwolę sobie zatem pominąć dowód, odsyłając Czytelnika do literatury przedmiotu[4] i prosząc, by zechciał uwierzyć (lub sprawdzić), że założenia, które poniżej rozważam, są w dowodzie twierdzeń Gödla rzeczywiście konieczne.

Założenia

Najmniej interesujące z naszego punktu widzenia jest założenie, by teoria T „zawierała” arytmetykę, choć jest to ważne i ciekawe wymaganie. Wyrażalność arytmetyki w teorii T umożliwia arytmetyzację języka i metajęzyka tej teorii i dalej pozwala na diagonalizację, która jest jednym z podstawowych narzędzi teorii rekursji wykorzystywanym w dowodach nierozwiązywalności różnych problemów. Niemniej, skoro według Leibniza rozwiązywanie problemów miałoby się dokonywać w oparciu o obliczenia, niecelowe wydaje się zubażanie poszukiwanego rachunku o tak podstawowe narzędzie jak arytmetyka i to nawet w znacznie okrojonej wersji (można w przybliżeniu powiedzieć, że tzw. „słaba arytmetyka” jest jedynie nieskończoną tabliczką dodawania i mnożenia).

Niezbyt rozsądne wydaje się również podważenie podstawowej zasady rozumowania (także u Leibniza) — zasady niesprzecz-

[4]Por. np. cytowaną wyżej pracę Odifreddiego albo w języku polskim: R. Murawski, *Funkcje rekurencyjne i elementy matematyki*, Wyd. UAM, Poznań 2000.

ności[5]. Wprawdzie sprzeczna teoria jest zupełna[6], ale też, skoro wszystkiego da się w niej dowieść, to i wszystkie dowody wydają się bezwartościowe. Nie pozwalają na odróżnienie tego, co uzasadnione od tego, co bezpodstawne. Nadto rachunek Leibniza miał za zadanie opisywać rzeczywistość, a ta zdaniem autora *Monadologii*, jest niesprzeczna.

---

[5] Tu warto by dodać, że we współczesnej logice rozwijane są badania rachunków z różnymi „rodzajami sprzeczności" (por. B. Brożek, „Nauka w poszukiwaniu logiki", *Semina Scientiarum* 1, 2002, ss. 2–14). Często jednak w dyskusjach na temat różnych logik nieklasycznych, także niemonotonicznych, podkreśla się, że logika klasyczna (z zasadą niesprzeczności) wydaje się pełnić wobec nich wyróżnioną rolę — to w niej na przykład przeprowadza się analizę rachunków niestandardowych. Przywodzi to na myśl (dość luźne) skojarzenia ze zwykłym sposobem rozumowania ludzi, którzy niejednokrotnie uznają sprzeczne tezy, ale kiedy tylko zdają sobie z tego sprawę, starają się tę sprzeczność usunąć. Oczywiście, że powyższe zestawienie jest dość powierzchowne, sądzę jednak, że za wskazaną odległą analogią może się ukrywać głębsza prawidłowość — trudno rozstrzygnąć czy ontologiczna czy psychologiczna. To ciekawe zagadnienie w oczywisty sposób wykracza jednak poza przedmiot tego artykułu. Zrezygnowanie z założenia niesprzeczności wydaje się być sprzeczne (!) z filozofią Leibniza.

[6] Warto w tym punkcie zauważyć rzecz nieco zaskakującą na terenie logiki, że pojęcie „zupełności" jest wieloznaczne. Na szczęście każde spośród jego różnych znaczeń jest ściśle określone. W *Małej Encyklopedii Logiki* W. Marciszewski wśród różnych możliwych znaczeń „zupełności systemu" wyróżnia trzy:

1) System S jest zupełnym zbiorem zdań zawierającym terminy stałe $P_1, \dots P_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zdania A zawierającego jako symbole stałe jedynie wyrażenia spośród $P_1, \dots P_n$ prawdą jest, że $A \in S$ lub $\neg A \in S$.
2) System jest zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy każda poprawnie zbudowana formuła bądź jest twierdzeniem systemu, bądź po dołączeniu do jego aksjomatów wprowadzi doń sprzeczność (tzw. zupełność w sensie Posta).
3) Trzecie pojęcie zupełności wyraża się w polskim piśmiennictwie raczej słowem pełność (definicję pełności podaję poniżej).

Por. *Mała encyklopedia logiki*, red. W. Marciszewski, Ossolineum, Wrocław–Warszawa–Kraków, 1970.
System sprzeczny jest zupełny w sensie (1).

Pozostaje do rozważenia trzecie założenie — o rozstrzygalności zbioru aksjomatów. Wydaje się ono bardzo dobrze uzasadnione: jeśli nie umielibyśmy rozstrzygnąć, co jest a co nie jest aksjomatem, tym bardziej trudno oczekiwać, byśmy potrafili stwierdzić, co jest twierdzeniem teorii (które przecież jest z definicji zdaniem, dla którego istnieje dowód, czyli skończony ciąg zdań, które albo są aksjomatami, albo też są zdaniami uzyskanymi za pomocą reguł dowodzenia z aksjomatów lub podobnie uzyskanych zdań występujących uprzednio w dowodzie).

To wskazuje na jeszcze jedno założenie — nie wyrażone *explicite*, gdyż przyjmowane jako oczywiste i powszechnie akceptowane, czyli wypracowaną w szkole Hilberta technikę uzasadniania zdań matematyki — technikę formalnych dowodów. Zwróćmy przede wszystkim uwagę na podstawowe wymaganie wobec dowodu: ma być on skończony. Fakt ten jest ważny i wykorzystywany w dowodzie twierdzenia Gödla.

Na związek tego poniekąd ukrytego założenia z rozumowaniem Leibniza zwrócił uwagę prof. Perzanowski na kolejnym seminarium, przypominając, klasyczny podział sądów przeprowadzony przez Leibniza:

- sądy konieczne (oparte o zasadę niesprzeczności),
- sądy przypadkowe (oparte o zasadę racji dostatecznej).

Można pokazać (i jest to czasem przyczyną rozczarowania studentów filozofii zapoznających się z dziełami Leibniza), że wnioskowanie w oparciu o zasadę racji dostatecznej sprowadza się *de facto* do odwołania do zasady niesprzeczności. Chciałoby się powiedzieć: „Cóż to za podział”, skoro jedna z proponowanych kategorii zawiera się całkowicie w drugiej? A jednak wskazane przez Leibniza kryterium rozróżniania tych dwóch rodzajów sądów jest istotne. Według Leibniza bowiem do sądów koniecznych można dojść, wychodząc od zasady niesprzeczności za pomocą skończonej liczby kroków wnioskowania, sądy przypadkowe zaś można wprawdzie otrzymać na mocy samej tylko zasady niesprzeczności, ale przeprowadzając dowody o nieskończonej liczbie kroków. Twierdzenie Gödla pokazuje, jak ważne (na pociechę studentom filozofii) jest to rozróżnienie — za pomocą dowodów o skończonej długości, wychodząc od rozstrzygalnego zbioru aksjomatów, nie możemy pewnych twierdzeń dowieść. Jakiego rodzaju są to twierdzenia?

Wniosek

Przyjrzyjmy się krótko wnioskowi twierdzenia Gödla. Żeby go lepiej zrozumieć zestawmy go z innym twierdzeniem genialnego logika — o pełności rachunku predykatów pierwszego rzędu. System dedukcyjny jest pełny wtedy i tylko wtedy, gdy z jego aksjomatów dadzą się wywieść wszystkie zdania będące zdaniami prawdziwymi w każdym modelu. Rachunek predykatów jest zatem takim systemem, który jest pełny (każde zdanie prawdziwe w każdym modelu jest w nim dowiedlne), ale nie jest zupełny (można w nim wyrazić zdania, które ani nie są dowiedlne, ani nie są dowiedlne ich zaprzeczenia). Jak to możliwe? Otóż zdania niedowiedlne w rachunku predykatów, to takie zdania, które ani nie są prawdziwe we wszystkich modelach, ani też nie są we wszystkich modelach fałszywe (wówczas ich zaprzeczenie byłoby prawdziwe we wszystkich modelach, a więc dowiedlne). Są to zatem zdania przypadkowe. W szczególności zdanie Gödla jest takim zdaniem przypadkowym (bo niekoniecznym; nie jest prawdziwe we wszystkich możliwych światach — modelach). Jest ono mimo to zdaniem *a priori*, gdyż o tej jego przypadkowości nie wnioskujemy na podstawie doświadczenia, możemy ją wykazać teoretycznie przytaczając dowód Gödla.

***

Można spekulować, że jeśli potrafilibyśmy podać system (*lingua characteristica*?), który adekwatnie opisywałby zamierzony model (rzeczywistość) do ostatniego szczegółu, w taki sposób, że jednoznacznie wyróżniałby (z dokładnością do izomorfizmu) jeden jedyny model, dla którego byłby prawdziwy i pełny, to wówczas byłby on także zupełny. Kolejne twierdzenia limitacyjne mówią, że opis taki przekracza możliwości języków elementarnych[7].

Mimo tego, zgodnie z twierdzeniem Lindenbauma, każdą niesprzeczną teorię można w prosty sposób rozszerzyć do teorii niesprzecznej oraz zupełnej. Nie podważa to bynajmniej wyniku Gödla, gdyż teoria uzyskana „sposobem Lindenbauma” nie spełnia po prostu jednego z założeń jego twierdzenia — założenia o rozstrzygalności zbioru aksjomatów.

Zagadnieniu rozstrzygalności warto przyjrzeć się uważniej. Wiadomo, że wynik Gödla można otrzymać z dowiedzionego 6 lat później przez Churcha i niezależnie przez Turinga twierdzenia o nierozstrzygalności rachunku predykatów. Jeśli bowiem teoria (o rozstrzygalnym zbiorze aksjomatów) byłaby zupełna, to dla każdej formuły istniałby albo jej dowód, albo dowód jej zaprzeczenia. Wówczas o każdym zdaniu moglibyśmy za pomocą dowodów rozstrzygać[8], czy przynależy ono do teorii czy też nie. Zatem skoro teoria jest nierozstrzygalna, to jest także niezupełna. I znowu przyjrzyjmy się technicznemu pojęciu zaangażowanemu w dowód a nawet w wysłowienie twierdzenia Churcha: „rozstrzygalności”. Otóż z definicji „teoria jest rozstrzygalna, jeśli istnieje metoda pozwalająca o każdym wyrażeniu tej teorii rozstrzygnąć za pomocą skończonej liczby prób czy jest ono twierdzeniem danej teorii. Tego typu metody nazywa się efektywnymi”[9].

Po raz kolejny okazuje się, że twierdzenie o nierozstrzygalności teorii wydaje się zrelatywizowane do techniki — tym razem sposobu rozstrzygania, czy coś przynależy do danego zbioru (aksjoma-

[7] Por. twierdzenie Löwenheima — Skolema — Tarskiego.

[8] Algorytm rozstrzygania, czy dana formuła F jest tezą systemu, polegałby na przeprowadzaniu w ustalonej kolejności dowodów, tak długo, aż natrafimy na dowód F albo $\neg F$. Ponieważ założyliśmy, że system jest zupełny, więc na pewno istnieje dowód formuły F lub jej zaprzeczenia.

[9] *Mała encyklopedia logiki*, dz. cyt.

tów lub twierdzeń teorii). Podobnie jak metody dowodzenia, tak i metody efektywne doczekały się precyzyjnego opracowania teoretycznego. Zaproponowano kilka formalizmów, takich jak funkcje rekurencyjne, maszyny Turinga, reprezentowalność w teorii, skończona definiowalność, itd., które okazały się równoważne. Wyróżniają one tę samą klasę funkcji (np. każda funkcja obliczalna za pomocą maszyn Turinga jest rekurencyjna i na odwrót) i za ich pomocą rozstrzygalne są te same problemy. To, co jest nierozstrzygalne za pomocą jednej spośród tych metod, nierozstrzygalne jest też za pomocą jakiejkolwiek innej.

W odróżnieniu jednak od powszechnie uznawanej teorii dowodu, teza, że wszystkie metody efektywne sprowadzają się do jednej spośród metod ujętych w któryś z tych formalizmów, jest wciąż przedmiotem dyskusji. Dopiero zaś ta teza (zwana tezą Churcha) pozwala na stwierdzenie **absolutnej**[10] nierozstrzygalności danej teorii (np. rachunku predykatów).

Warto podkreślić również, że po raz kolejny rzecz wiąże się z zagadnieniem nieskończoności. W każdym ze wspomnianych wyżej formalizmów zawarte są pewne ograniczenia, wymagania skończoności pewnych parametrów. Dla przykładu przywołajmy jeden z formalizmów — maszynę Turinga.

Najprościej rzecz ujmując, maszyna Turinga to pewien abstrakcyjny byt złożony z podzielonej na pola nieskończonej taśmy i głowicy czytająco–piszącej, wyposażony w odpowiedni zbiór instrukcji. Maszyna może znajdować się w jednym ze skończonej listy stanów wewnętrznych, może zapisywać lub wymazywać w polach

[10] „Absolutna nierozstrzygalność” oznacza, że wynik ten nie jest zrelatywizowany do jakiejś wybranej metody rozstrzygania. Zilustrujmy to przykładem: Turing udowodnił, że rachunek predykatów jest nierozstrzygalny, gdyż w przeciwnym przypadku rozstrzygalny byłby tzw. problem stopu. Wcześniej zaś pokazał, że problemu stopu nie da się rozwiązać za pomocą maszyn Turinga. Żeby wysnuć stąd wniosek, że problem stopu (a co za tym idzie problem bycia tezą rachunku predykatów) nie jest rozstrzygalny za pomocą żadnej efektywnej metody, trzeba przyjąć tezę Churcha; por. G. Boolos, R. Jeffrey, *Computability and Logic*, Cambridge University Press, 1974, s. 49 lub Odifreddi, dz. cyt., s. 103.

taśmy po jednym ze skończonej listy symboli taśmowych. Instrukcje, zgodnie z którymi postępuje, mogą mieć jedną z następujących trzech postaci:

- $q_a\ S_b\ S_c\ q_d$: maszyna w stanie q_a, czytająca symbol S_b wymazuje go i wpisuje w jego miejsce symbol S_c, po czym zmienia stan na q_d,

- $q_a\ S_b\ R\ q_d$: maszyna w stanie q_a, czytająca symbol S_b przesuwa się o jedno pole w prawo, po czym zmienia stan na q_d,

- $q_a\ S_b\ L\ q_d$: maszyna w stanie q_a, czytająca symbol S_b przesuwa się o jedno pole w lewo, po czym zmienia stan na q_d,

Zbiór instrukcji powinien być skończony i niesprzeczny. Niesprzeczność oznacza, że nie ma takich instrukcji, które miałyby takie same przesłanki $q_a\ S_b$, a żądałyby wykonania różnych działań.

Jak widać, można wyliczyć wiele wymagań co do skończoności różnych parametrów maszyny Turinga: skończona liczba stanów wewnętrznych, symboli taśmowych, instrukcji, głowic, taśm i obserwowanych w jednym kroku pól. Wśród nich szczególnie jedno przywołuje skojarzenie z filozofią Leibniza — założenie o skończonej liczbie stanów wewnętrznych.

Uzasadniając adekwatność swojej teorii jako formalnego ujęcia obliczalności, Turing analizuje działanie rachmistrza przeprowadzającego obliczenia. Uzasadnia między innymi, że sensowne jest założenie, iż głowica maszyny „obserwuje" jedynie skończoną liczbę pól taśmy [11], bo także człowiek jest w stanie objąć wzrokiem zaledwie skończony zapis. Turing przekonuje, że możemy posługiwać się jedynie skończoną liczbą symboli taśmowych, bo gdy-

[11] Łatwo pokazać, że maszyna obserwująca jedynie jedno pole taśmy jest równoważna takiej, która obserwuje tych pól dowolną skończoną liczbę.

by było ich więcej, to nie umielibyśmy ich w końcu rozróżniać[12]. Wreszcie twierdzi, że na podobnej zasadzie niemożliwa jest nieskończona liczba dopuszczalnych stanów wewnętrznych — odpowiednika stanów umysłu rachmistrza — bo wówczas, podobnie jak w przypadku symboli taśmowych, różniłyby się one nieskończenie mało od siebie, a więc byłyby praktycznie nierozróżnialne. Sądzę, że to ostatnie wnioskowanie jest nadużyciem. Cóż bowiem szkodzi nasza niewiedza, nasza nieumiejętność rozróżniania stanów umysłu ich faktycznie infinityzemalnie małym różnicom?[13] Jako przykład metafizyki, w której twierdzenie o swego rodzaju „dyskretyzacji" stanów umysłu jest nieprawdziwe, można podać chociażby sławną monadologię — zgodnie z nią wszak w monadzie odbija się Wszechświat, który jest nieskończony[14] i w którym zmiany przebiegają w sposób ciągły.

Czy możliwe jest stworzenie rachunku (*calculus ratiocinator*?), który „radziłby sobie" z opisem relacji w takim świecie? Nie wiadomo. Jeśli teza Churcha jest prawdziwa, nie jest to możliwe. O to, czy jest prawdziwa, wciąż toczą się spory.

Jak sądzę, z powyższych rozważań można wysnuć następujące wnioski:

- Samo twierdzenie Gödla nie obaliło programu Leibniza, dzięki niemu jedynie wskazane zostały ograniczenia systemów formalnych spełniających ściśle określone warunki. (Nie widać dlaczego *lingua characteristica* nie miałaby istnieć).

- Choć możliwe jest budowanie systemów opisujących rzeczywistość lepiej niż rachunek predykatów pierwszego rzędu i ję-

[12]Por. A. Turing, „On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem", *Proceedings of the London Mathematical Society*, ser. 2, vol. 42 (1936–7), s. 249.

[13]Trzeba przyznać, że Turing rozważa także sposób wyeliminowania słabo określonych „stanów umysłu" z analizy obliczalności, ale moim zdaniem nie udaje mu się to do końca.

[14]Por. założenie o skończonej liczbie obserwowanych pól — twierdzenie to można przyjąć w odniesieniu do potocznego rozumienia, świadomej „obserwacji", ale nie do „działania" i „doznawania" na poziomie monad.

zyki elementarne, to na razie nie dysponujemy odpowiednim dla nich narzędziem wnioskowania. Ani wypracowana w szkole Hilberta metoda dowodu, ani inne „obliczalne środki" nie są wystarczające.

- Jeśli teza Churcha–Turinga jest prawdziwa, to nie istnieje efektywna metoda pozwalająca na rozstrzyganie wszystkich problemów[15].
- Program Leibniza poszukiwania *calculi ratiocinatoris* pozostaje wciąż aktualny.
- Wydaje się, że jego realizacja wymagałaby wynalezienia skutecznego sposobu „okiełznania nieskończoności", co zresztą genialny filozof przewidział.

Leibniz przewidywał również, że odkrycie tego rachunku jest w zasięgu ludzkich możliwości. Czy miał rację? Gödel wierzył, że (przynajmniej na terenie matematyki) tak.

[15]Teza Churcha–Turinga nie została dotąd udowodniona i nie wydaje się, by mogła zostać udowodniona za pomocą znanych obecnie technik. Zagadnienie to, szeroko dyskutowane, świadomie pominęłam; najczęściej wskazuje się, że w tezie Churcha porównuje się ściśle określone pojęcie funkcji obliczalnej za pomocą maszyn Turinga (lub funkcji rekurencyjnej, λ–definiowalnej, itd. — znaleziono wiele równoważnych, jak się później okazało, rachunków, co samo w sobie wydaje się przemawiać na korzyść tezy Churcha) z **intuicyjnym** pojęciem funkcji efektywnie obliczalnej. To ostatnie zaś niemal z założenia nie może zostać opisane formalnie (taką formalizację proponuje się właśnie w tezie Churcha, rzecz polega na tym, czy propozycja ta jest uzasadniona), więc i formalny dowód nie jest możliwy.

Semina □ Scientiarum Nr 3 2004

Ryszard Philipps

Twierdzenia Gödla a niemechaniczność umysłu (cz. I)

Twierdzenia Gödla, jak również inne twierdzenia z grupy tzw. twierdzeń limitacyjnych, stwarzają możliwość formalizacji sporu o naturę umysłu. Stanowią one mianowicie pewnego rodzaju test, który powinny przejść teorie mechanistyczne[1]. Schemat argumentacji antymechanistycznej z wykorzystaniem twierdzeń limitacyjnych sprowadza się zazwyczaj do następującego rozumowania. Punktem wyjścia jest odnotowanie pewnych, stosunkowo precyzyjnie ustalonych faktów, związanych z działalnością umysłu, mianowicie wytworów umysłu w dziedzinie matematyki. Gdyby umysł był maszyną, maszyna taka powinna być równoważna umysłowi co najmniej pod względem tych wytworów. Antymechanicyści próbują więc wykazać, że maszyny, zgodnie z twierdzeniami limitacyjnymi, podlegają ograniczeniom, podczas gdy umysł takim ograniczeniom nie podlega, o czym świadczą właśnie faktyczne wytwory umysłu. W związku z tym maszyna nie jest w stanie wytworzyć tego, co potrafi wytworzyć umysł i w konsekwencji umysł nie może być maszyną[2]. W omawianym w dalszej części tekstu tzw. argumencie Lucasa, autor argumentu próbuje wykazać, że zgodnie

[1] Por. J. Woleński, „Metamatematyka a filozofia”, *Zagadnienia Filozoficzne w Nauce*, 6 (1984), 10; J. Życiński, „Metafilozoficzne następstwa twierdzeń limitacyjnych”, *Studia Philosophiae Christianae*, 24 (1988), 1.

[2] Warto zauważyć, że wnioskowanie odwrotne nie jest oczywiste, jak sądzą być może zwolennicy tzw. *testu Turinga*. To, że maszyna byłaby równoważna umysłowi pod względem pewnych lub nawet wszystkich wytworów, nie musi oznaczać, że umysł jest maszyną. Wytworom umysłu mogłyby przykładowo towarzyszyć pewne subiektywne przeżycia (tzw. *qualia*), które nie towarzyszyłyby wytworom maszyny.

z twierdzeniami Gödla jest niemożliwe, aby jakakolwiek maszyna Turinga zweryfikowała wszystkie te twierdzenia arytmetyczne, które umysł ludzki jest w stanie uznać za prawdziwe, co ma właśnie obalić mechanistyczną koncepcję umysłu.

Tradycyjne stanowisko antymechanistyczne w kwestii umysłu wyraża się tym, że uważa się umysł, *resp.* duszę, za byt ontologicznie odrębny od świata zmysłowego. Takie stanowisko wyklucza mechaniczność umysłu *per definitionem*, ponieważ znaczenie terminu mechanizm czy automat sugeruje, że jest to obiekt deterministyczny, należący do świata fizykalnego, podczas gdy duszę uważa się za niematerialną i wolną.

Stanowisko takie określa się tradycyjnie mianem dualizmu. Klasycznymi jego przedstawicielami są Kartezjusz oraz Platon. Stanowisko Platona jest o tyle szczególne, że wielu współczesnych matematyków skłania się w kwestii istnienia obiektów matematycznych do pewnej wersji platonizmu. Platonizm matematyczny przypisuje obiektom matematycznym byt w sensie idei platońskich, z którymi umysł ludzki może mieć bezpośredni (intuicyjny) kontakt. W takim świecie każda formuła matematyczna jest albo prawdziwa albo fałszywa.

Dualizm kartezjański stał się ostatnio etykietą dla wszystkich stanowisk antymechanistycznych, choć jest to nieco nieżyczliwa interpretacja stanowiska Kartezjusza[3]. Kartezjusz zapoczątkował w nowożytnej filozofii tendencję radykalnego odróżniania umysłu i faktów mentalnych od ciała i świata zmysłowego. Jeżeli ktoś, jak to czynili oświeceniowi materialiści, zaprzeczał dualizmowi Kartezjusza, przejmował na siebie obowiązek dowodu obalającego. Współcześnie większość filozofów opowiada się przeciwko dualizmowi w sensie kartezjańskim. Przyjmuje się, niecałkiem słusznie, że ciężar dowodu spoczywa na tych, którzy próbują utrzymać nieredukowalność umysłu do materii. Wymaga tego, by tak rzec, „polityczna poprawność". Jest to o tyle nie *fair*, że zarówno zwo-

[3]Por. J. R. Searle, *Umysł na nowo odkryty*, PIW, Warszawa 1999.

lennicy jak i przeciwnicy mechanicyzmu posługują się w zasadzie argumentami preferencyjnymi o, mniej więcej, podobnej sile.

Spór o umysł wydaje się bardziej interesujący na gruncie naturalizmu, niż w paradygmacie klasycznego dualizmu. Zjawiska mentalne uważa się wtedy za pochodne względem zjawisk fizycznych, choć dopuszcza się niekiedy istnienie subiektywnej, nieredukowalnej do obiektywnego poziomu fizykalnego, sfery psychicznej. Stanowisko takie jest określane mianem emergentyzmu. Koncepcja sztucznej inteligencji (zwana czasem silną AI) jawi się w tym kontekście, jako stanowisko skrajnie mechanistyczne i optymistyczne ze względu na wiarę w możliwości nauki[4]. Bardziej umiarkowani naturaliści, na przykład Searle, zgadzają się z tym, że umysł jest quasi–fizykalnym systemem przejawiającym funkcje komputacyjne, niemniej twierdzą, że globalne możliwości umysłu przekraczają możliwości komputerów w sensie von Neumanna. Co więcej, uważa się również, że żaden komputer, rozumiany jako **skończony automat** (ang. *Finite State Machine*), nie osiągnie poziomu istotnie inteligentnych zachowań nawet w przyszłości, bez względu na intensyfikację parametrów, takich jak rozmiar pamięci, częstotliwość taktowania, etc. Dotyczy to również tzw. sztucznych sieci neuronowych, jeżeli przyjmiemy, że także w przyszłości będą działać w sposób deterministyczny, przy czym ich determinizm można wyrazić formułą „*output* równa się *input*” – tyle dostaniemy na wyjściu, ile sami włożymy do systemu na wejściu.

***

Mniej więcej czterdzieści lat po sformułowaniu przez Gödla jego twierdzeń o niezupełności pojawiła się argumentacja J. R. Lucasa[5]. Uzasadnia on tezę, że umysł przewyższa maszynę, czyli,

---

[4]Zwolennicy *silnej AI* głoszą, że umysł jest automatem, który w zasadzie równoważny jest zwykłym komputerom.

[5]J. R. Lucas, „Minds, Machines and Gödel”, *Philosophy* 36, 112–127. Por. również J. R. Lucas, *The Freedom of the Will*, Oxford Univ. Press, Oxford 1970.

wbrew zwolennikom sztucznej inteligencji (AI), nie jest komputerem. Argumentację tę można streścić następująco: twierdzenie Gödla mówi, że w każdej, odpowiednio bogatej (zawierającej arytmetykę liczb naturalnych) i niesprzecznej teorii, istnieje zdanie o liczbach naturalnych, które nie jest w tej teorii dowiedlne, niemniej (w metateorii) można pokazać, że zdanie to jest prawdziwe. Efektywnie dana teoria, tzn. oparta o rozstrzygalny zbiór aksjomatów, a więc również maszyna w sensie Turinga, nie jest w stanie dowieść zdania Gödla, o ile ma pozostać niesprzeczna. Umysł natomiast umie pokazać prawdziwość tego zdania w modelu danej teorii, przy czym zakłada się, jako oczywiste – przynajmniej w intuicyjnym sensie, że umysł jest niesprzeczny. Umysł potrafi więc zweryfikować zdanie Gödla, podczas gdy maszyna tego nie potrafi, co świadczy o tym, że umysł nie może być maszyną. Gdy dopuścimy sprzeczność maszyny, to może ona, zgodnie z prawami logiki, dowieść dowolnego zdania, wtedy jednak nie chcemy uważać jej za równoważną umysłowi[6].

Formalna krytyka argumentów Lucasa oraz innych, podobnie myślących autorów[7], opiera się na dwojakiej strategii. Pierwsza grupa argumentów zmierza do wykazania, że na podstawie samych tylko twierdzeń Gödla nie da się wykluczyć tego, iż możemy być maszynami (niesprzecznymi). Wśród zwolenników tego typu argumentacji wymienić można m. in. samego Gödla, Wanga oraz Benacerrafa. Druga grupa autorów, na przykład Putnam, uważa z kolei, że nie da się wykluczyć sytuacji, iż możemy być maszynami, aczkolwiek sprzecznymi, ponieważ to, iż umysł umie zweryfikować zdanie Gödla, może wynikać właśnie z tego, że jest sprzeczny.

Aby rozważyć argumenty metalogiczne przeciwko stanowisku Lucasa, niezbędna jest dokładniejsza analiza założeń jego rozumowania. Przede wszystkim należy sprecyzować, co będziemy uważać

[6]Nie bierze się tutaj pod uwagę zarzutu, że to, iż umysł umie zweryfikować zdanie Gödla, może wynikać właśnie z tego, iż jest sprzeczny.

[7]Por. R. Penrose, *Nowy umysł cesarza*, PWN, Warszawa 1995 oraz R. Penrose, *Cienie umysłu*, Zysk i S–ka, Poznań 2000.

za maszynę. Intuicyjnie, maszyną jest skończony automat działający w sposób algorytmiczny. Zakłada się więc, że maszyna musi mieć skończoną liczbę możliwych stanów, a jej program musi dać się wyrazić skończonym tekstem. Pomimo tych, zdawałoby się silnych założeń, wgląd w możliwości maszyny nie jest trywialny. Nawet odpowiedź na pozornie proste pytanie, czy maszyna zakończy pracę w skończonym czasie, przerasta możliwości każdej maszyny. Innymi słowy, nie istnieje efektywna procedura rozstrzygająca to pytanie dla dowolnej maszyny Turinga.

Ważną cechą maszyn jest determinizm, tzn. działanie maszyny jest w pełni opisane przez jej program, dane wejściowe oraz stan w jakim się znajduje. Można więc przyjąć, że maszyna puszczona w ruch w tej samej konfiguracji, będzie zawsze działać identycznie. Z punktu widzenia obserwatora zewnętrznego czas maszyny jest dyskretny, maszyna „wie" jedynie, że zawsze znajduje się w jakimś stanie wewnętrznym. Pytanie o to, jak długo trwa przejście od jednego stanu drugiego, jest z punktu widzenia maszyny bezsensowne. Na koniec wypada zgodzić się co do tego, że jeśli umysł jest w stanie wykonać pewne operacje w skończonym czasie, to maszyna, o ile ma być równoważna umysłowi, musi wykonać te same operacje, względnie osiągnąć te same wyniki, również w skończonym czasie, aczkolwiek dowolnie długim.

Matematyczną formalizacją opisanego powyżej automatu jest tzw. maszyna Turinga, która jest idealizacją „zwykłego" komputera i jest mu równoważna pod względem efektów działania[8]. Takie rozumienie automatu pokrywa się z intuicyjnym pojęciem algorytmu. Zgodnie z tzw. *tezą Churcha*, intuicyjne pojęcie algorytmu nie jest szersze od matematycznego pojęcia maszyny Turinga. Z kolei klasa obliczanych przez nią funkcji równoważna jest tzw.

[8]Dotyczy to również *sztucznych sieci neuronowych*. Zachowanie takiej sieci można symulować na zwykłym komputerze. Nie jest jednak oczywiste, czy sieci takie nie „wymkną się" z ograniczeń determinizmu, gdy zaczną wykorzystywać ewentualne niedeterministyczne efekty, które, jak uważają niektórzy, są możliwe na gruncie współczesnych lub przyszłych teorii fizycznych (por. R. Penrose, *Nowy umysł cesarza*, op. cit.).

klasie funkcji rekurencyjnych[9]. Inaczej mówiąc, wszystko to, co według naszych intuicji można osiągnąć w sposób automatyczny, można również osiągnąć używając odpowiednio zaprogramowanej maszyny Turinga. Turing pokazał, że nawet wprowadzenie elementu quasi–indeterministycznego, np. w postaci losowania zachowania maszyny w następnym kroku ze skończonej liczby możliwości, nie wyprowadza poza zwykłe, deterministyczne maszyny.

Maszyna Turinga jest równoważna pewnemu systemowi formalnemu, wyrażonemu w języku I rzędu. System taki jest dany przez zbiór aksjomatów i reguł dowodzenia, co do którego zakładamy, że jest rozstrzygalny[10], tzn. istnieje efektywna procedura, pozwalająca odróżnić aksjomaty od pozostałych wyrażeń języka. W tak zdefiniowanym języku zbiór wszystkich formuł, które można udowodnić w oparciu o aksjomaty i reguły tego systemu, jest efektywnie przeliczalny[11], tzn. istnieje algorytm, który umie rozpoznać dowody formalne wśród wszystkich (skończonych) tekstów tego języka. Nie jest natomiast efektywnie przeliczalny zbiór formuł nie będących twierdzeniami systemu. Inaczej mówiąc, jeżeli dowolna formuła jest twierdzeniem systemu, to maszyna potrafi znaleźć dowód tej formuły w skończonym czasie. Maszyna nie potrafi natomiast orzec w skończonym czasie o dowolnej formule, że nie posiada ona dowodu w tym systemie. W dalszych rozważaniach maszyna będzie *per definitionem* uważana za niesprzeczną, gdy odpowiadająca jej teoria elementarna jest niesprzeczna.

Gödel pokazał, że dowolny tekst (wyrażenie sensowne), utworzony w języku zbudowanym w oparciu o logikę elementarną (I rzę-

[9]Istnieją jeszcze inne równoważne matematyczne definicje pojęcia obliczalności, np. λ–rachunek Churcha. Fakt istnienia wielu, powstałych niezależnie od siebie, równoważnych definicji obliczalności uważany jest za dobre uzasadnienie *tezy Churcha*.

[10]Zgodnie z twierdzeniem Craiga założenie to można osłabić. Wystarczy, aby zbiór aksjomatów był efektywnie przeliczalny.

[11]Dowód jest to na mocy definicji skończony ciąg formuł, z których każda jest albo aksjomatem, albo przesłanką, albo powstaje z poprzednich na mocy reguł dedukcji oraz kończący się formułą, która ma być dowiedziona.

du), ze skończonym zbiorem symboli pozalogicznych[12], można w efektywny sposób zakodować, w sposób jedno–jednoznaczny, liczbą naturalną. Tak więc wszystkich tekstów, utworzonych z wyrażeń tego języka nie może być więcej niż liczb naturalnych. Efektywna procedura odwrotna pozwala odtworzyć teksty na podstawie ich kodów, przy czym zbiór wszystkich kodów tekstów danego języka jest rozstrzygalny (procedura „umie" stwierdzić czy dana liczba naturalna jest kodem jakiegoś tekstu, czy nie). Ponieważ dowolna dedukcja, będąca na mocy definicji skończonym ciągiem wyrażeń języka, jest również tekstem, zatem liczba naturalna przyporządkowana tej dedukcji, zwana numerem Gödla, musi znaleźć się na liście wszystkich liczb naturalnych. Można ponadto w sposób efektywny stwierdzić czy dany tekst jest poprawnym dowodem, czyli wszystkie dowody formalne można efektywnie ustawić w ciąg. Możemy zatem rozważania o systemach formalnych sprowadzić do rozważań o liczbach naturalnych – zamiast o formułach wystarczy mówić o liczbach. Ponadto pewne interesujące własności metasystemowe, jak np. dowodliwość, dają się wyrazić poprzez relacje zachodzące między liczbami naturalnymi. W szczególności ograniczenia formalne arytmetyki będą „przenosiły się" na wyrażony w niej system[13].

---

[12]Założenie to również można osłabić, zbiór symboli pozalogicznych może być nieskończony, wystarczy, by był rozstrzygalny, por. R. Murawski, op. cit., ss. 84 nn.

[13]Warto zwrócić w tym miejscu uwagę na pewien interesujący fakt. Otóż jeżeli zgodzimy się, że każdy algorytm musi dać się wyrazić przy pomocy skończonego tekstu, to wynika z tego, iż wszystkich algorytmów nie może być więcej niż liczb naturalnych, czyli przeliczalnie wiele. Również wszystkich maszyn Turinga jest nie więcej niż przeliczalnie wiele. Każdy algorytm jest formalnie równoważny pewnej funkcji naturalnej ($\mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$), wiadomo jednak, że wszystkich funkcji naturalnych jest, zgodnie z twierdzeniem Cantora, nieprzeliczalne wiele, czyli istotnie więcej. Wynika stąd, że pewne funkcje naturalne nie dają się obliczyć w sposób algorytmiczny. Pewne procesy myślowe (prowadzące od pewnych tekstów do innych tekstów, a zatem dające się pomyśleć jako funkcje naturalne) nie mogą być więc przeprowadzone w sposób algorytmiczny.

Maszyna Turinga, aby być modelem umysłu, musi być dostatecznie „bogata”. Żądamy co najmniej tyle, by zawierała ona arytmetykę, czyli była równoważna umysłowi pod względem zdolności arytmetycznych. Maszyna taka powinna dla przykładu umieć odpowiadać na pytanie, czy konkretna formuła arytmetyczna jest dla niej twierdzeniem, czy nie. Moglibyśmy umówić się, że formuła jest dowiedziona przez maszynę wtedy, gdy po wprowadzeniu danej formuły „na wejście” formule tej będzie towarzyszyć jakiś ustalony znak „na wyjściu”, np. zapalenie się zielonej lampki. Wszystkie (i tylko te) formuły, które pojawią się na wyjściu systemu w obecności zielonego światła, mogą być uznane za twierdzenia maszyny.

***

Traktując tezę o mechaniczności umysłu poważnie, można próbować uważać umysł za efekt ewolucji prostszych systemów qusi–inteligentnych. Mechanizm nie obdarzony świadomością może „stwierdzić” jedynie proste fakty, przy czym nie jest w stanie dokonać aksjologicznej oceny owych faktów. Powtarzające się, długie czasy poszukiwania rozwiązań, mierzalne „zegarem biologicznym” systemu, mogły spowodować pojawienie się dodatkowych reguł działania, początkowo nieświadomych, pozwalających reagować w sytuacjach przedłużających się poszukiwań. Jednym z takich mechanizmów mógł być mechanizm pozwalający oszacować czas poszukiwań, aby zareagować w sytuacji niekorzystnej z punktu widzenia egzystencji systemu. Jest to całkiem rozsądna hipoteza – systemy biologiczne w przyrodzie podlegają obiektywnej presji co do skuteczności swoich działań w sytuacjach decyzyjnych. Mechanizmy podejmowania decyzji w przypadkach nierozwiązywalnych, a taką byłoby właśnie dla systemu formalnego zdanie niezależne, są niezbędne dla przetrwania systemu. Jednym z istotnych mechanizmów, być może jednym z kamieni milowych na drodze do uzyskania samoświadomości, mogłaby być umiejętność oceniania możliwych rozwiązań z punktu widzenia dobra systemu przeciwstawionego otaczającej go rzeczywistości. Oceniając pewną sytuację jako krytyczną (ze względu na czas poszukiwania decyzji), system przechodziłby do rozważań metajęzykowych nad samą tą sytuacją. W naszym przypadku taką sytuacją krytyczną dla systemu są właśnie zdania Gödla (G_T). Mechanicysta będzie argumentował, że metajęzykowe rozwiązanie problemu dowodliwości zdań G_T nie wymaga pozamechanicznych zdolności, lecz powstało w wyniku przystosowania się organizmów (algorytmów) do rzeczywistości.

Jednym z kluczowych punktów w sporze o konsekwencje twierdzeń Gödla dla filozofii umysłu jest problem niesprzeczności, zarówno umysłu jak i maszyny. Maszyna, twierdzi się, aby dorównywać umysłowi musi być niesprzeczna, ponieważ umysł jest niesprzeczny, choć argumenty za niesprzecznością umysłu mogą być tylko nieformalne[14]. Z drugiej strony, każdy system, w którym istnieje zdanie niedowodliwe, nie może być formalnie sprzeczny, ponieważ, przez kontrapozycję, gdyby był sprzeczny, to nie istniałoby zdanie formalnie niedowodliwe w tym systemie. W rozważanej argumentacji za wyższością umysłu postępujemy jednak odwrotnie. Chcemy mianowicie wykazać, że właśnie umiemy udowodnić zdanie Gödla, niedowodliwe w rozważanym systemie formalnym, reprezentowanym przez maszynę. Musimy zatem niezależnie założyć naszą niesprzeczność. Aby argumentacja była konkluzywna, trzeba nie tylko wykazać, że umysł potrafi dowieść zdania Gödla, lecz dodatkowo tego, że jest niesprzeczny. Jak wynika z drugiego twierdzenia Gödla, żadna maszyna nie jest w stanie dowieść własnej niesprzeczności, ponieważ nie jest możliwe dowiedzenie niesprzeczności systemu formalnego w tym samym systemie. Ponieważ umysł również nie potrafi formalnie dowieść własnej niesprzeczności, nie możemy w punkcie wyjścia rozważań wykluczyć, że jest sprzeczną maszyną. Brak formalnego dowodu na niesprzeczność umysłu ogranicza więc rolę twierdzeń Gödla w rozważanym sporze.

---

[14] Możliwy jest jedynie formalny dowód niesprzeczności pewnego fragmentu umysłu w oparciu o środki „wykraczające” poza ten fragment.

Intuicyjnie nasza niesprzeczność wydaje nam się oczywista – nie uznajemy przecież dowolnego stwierdzenia wierząc, że przynajmniej niektóre z nich są nieprawomocne, nieprawdziwe, czy w jakikolwiek inny sposób zdyskwalifikowane. Z drugiej strony, często zdarzają się przypadki, i to nie tylko w codziennym użyciu umysłu lecz również w praktyce matematycznej, że niedozwolone wnioskowania nie od razu są rozpoznawane[15]. Niemniej jednak postulat niesprzeczności jest „ideą regulatywną”. Wydaje się, że umysł może być sprzeczny najwyżej potencjalnie – nigdy aktualnie, w sposób jawny, przynajmniej w matematyce. Matematycy deklarują, że będą zwalczać sprzeczność zarówno w swoich poglądach, jak i w poglądach innych, co więcej, jak nikt inny się do tego stosują. Być może sama ta deklaracja wystarczyłaby już jako nieformalny dowód niesprzeczności umysłu gdyby nie to, że nie można wykluczyć sytuacji, w której rozpoznanie sprzeczności okaże się niewykonalne z powodu komplikacji teorii[16]. Wiele osób głosi, świadomie lub nie, sprzeczne poglądy, nic sobie z tego nie robiąc. Matematyk głoszący sprzeczne poglądy zostałby zdyskwalifikowany przez społeczność matematyków. Matematycy przyjmują za oczywistą tezę, iż sprzeczność umysłu powinna oznaczać eksterminację również w każdej innej dziedzinie. Przejawia się tutaj *implicite* religijne wręcz przekonanie, iż „świat preferuje niesprzeczne umysły”. Teza taka może być jednak potwierdzona najwyżej w sposób empiryczny, tzn. ewentualnie przez fakt, że interakcja umysłów z rzeczywistością fizykalną odbywa się w sposób niesprzeczny[17].

Choć wielu autorów sądzi inaczej, nie można wykluczyć, że obowiązuje nas pewnego rodzaju psychologiczna zasada nie-

[15]Wystarczy wspomnieć choćby historię dowodu tzw. wielkiego twierdzenia Fermata, zob. A. D. Aczel, *Wielkie twierdzenie Fermata. Rozwiązanie zagadki starego matematycznego problemu*, Prószyński i S–ka, Warszawa 1998.

[16]Por. Krajewski, op. cit., s. 111.

[17]W sferze ogólnie pojętej kultury rzeczywistość weryfikuje raczej, jak się wydaje, umiarkowaną zdolność do sprzeczności w przekonaniach jako korzystniejszą z punktu widzenia sukcesu ewolucyjnego. Zdolność tę próbuje się ostatnio określać mianem inteligencji emocjonalnej.

sprzeczności[18]. Teza taka może mieć oczywiście charakter jedynie empiryczny. Niemożliwość istnienia dwóch sprzecznych przekonań w tym samym czasie, w jednym umyśle, może mieć więc przyczyny poza(onto)logiczne. Niektórzy uważają[19], że mogą równocześnie mieć dwa sprzeczne przekonania w swoim umyśle, choć dla innych wydaje się to niemożliwe. Niełatwo jest zweryfikować stan posiadania takich dwóch sprzecznych przekonań, ponieważ nie jest to fakt intersubiektywnie komunikowalny. Należy podkreślić, że czym innym jest mieć dwa bezpośrednio sprzeczne przekonania, a czym innym jest rozważanie dwóch sprzecznych przekonań[20]. Ponadto sprzeczność może być mniej lub bardziej bezpośrednia. Niewiele osób jest prawdopodobnie skłonnych przyjąć, że dwa razy dwa równa się cztery i równocześnie, że dwa razy dwa nie równa się cztery, lecz wielu ludzi przyjmuje za słuszne tezy, których uzasadnienie opiera się na błędnym wnioskowaniu, przez co wspomniane tezy mogą pozostawać w sprzeczności z innymi wcześniej uzyskanymi twierdzeniami. W tym drugim przypadku sprzeczność jest, można powiedzieć, „zapośredniczona" i w pewnym sensie nieświadoma. Obiektami dobrze nadającymi się do testowania umiejętności posiadania sprzecznych przekonań mogą być antynomie, na przykład jakieś szczególnie drastyczne sformułowanie antynomii kłamcy lub któraś z kantowskich antynomii czystego rozumu[21]. Nie jest wykluczone, że zdolność posiadania niesprzecznych przekonań jest stopniowalna (może przejawiać się w różnym stopniu u róż-

---

[18] Rozróżnienie na ontologiczną, logiczną i psychologiczną zasadę niesprzeczności pochodzi od Łukasiewicza, por. J. Łukasiewicz, *O zasadzie sprzeczności u Arystotelesa*, PWN, Warszawa 1987.

[19] Przykładowo Łukasiewicz, por. op. cit.

[20] Tak, jak czym innym jest logika parakonsystentna a czym innym metajęzyk, w którym o niej mówimy.

[21] Antynomie czystego rozumu Kanta dotyczą kwestii kosmologicznych. Dla przykładu pierwszą antynomię tworzy następująca para twierdzeń: „świat posiada początek w czasie, a przestrzennie jest również ograniczony" oraz „świat nie ma początku i nie ma granic w przestrzeni, lecz jest nieskończony zarówno co do czasu, jak i przestrzeni", I. Kant, „Antynomia czystego rozumu" w: *Krytyka czystego rozumu*, przekład R. Ingarden, Antyk, Kęty 2001.

nych ludzi) i uwarunkowana neurofizjologiczną strukturą mózgu. Jeśli zgodzimy się, że przynajmniej w interakcji z rzeczywistością fizykalną, posiadanie niesprzecznej reprezentacji tej rzeczywistości sprzyja sukcesowi ewolucyjnemu jednostki, można oczekiwać, iż w mózgach zarówno człowieka jak i zwierząt wykształciły się odpowiednie struktury sprzyjające niesprzecznemu myśleniu.

Współczesne badania nad mózgiem potwierdzają tezę, iż praca mózgu wiąże się ze zmianą rozkładu pewnej mierzalnej wielkości fizycznej. Gdyby przyjąć, że myślenie jest uwarunkowane stanami mózgu, procesy myślowe mogłyby być zdefiniowane przez zmiany tej wielkości, na przykład przez funkcję potencjału, analogicznie do opisu rozkładu potencjału elektrycznego w pewnej przestrzeni (określony obszar mózgu mógłby być rozpatrywany jako wirtualne źródło potencjału). Jest prawdopodobne, że dwóm sprzecznym przekonaniom odpowiadałyby antysymetryczne rozkłady potencjałów. Posiadanie dwóch sprzecznych przekonań byłoby więc z energetycznego punktu widzenia stanem wysoce niestabilnym. Nie jest wykluczone, że mózgi mogą różnić się pewnymi parametrami, analogicznie jak dwa elektryczne źródła napięcia różnią się oporem wewnętrznym. Mózgi charakteryzujące się wysokim „oporem wewnętrznym" byłyby bardziej stabilne, bardziej odporne na krytyczne połączenia, w tym wypadku również na sprzeczność. Duża odporność na sprzeczność mogłaby powodować jednak silne osłabienie „sygnału", a w związku z tym utrudniać przeprowadzanie długich wnioskowań. Różnice indywidualne, związane ze zdolnościami przeprowadzania rozumowań matematycznych, są oczywistym faktem empirycznym. Każdy chyba, kto zajmował się matematyką, a w szczególności analizował dowody matematyczne, wie dobrze, że rozumienie poszczególnych kroków dowodu to nie to samo, co rozumienie dowodu jako całości. W oparciu o powyższy model działania mózgu można zaryzykować hipotezę, że *rozumienie* pewnego wnioskowania wymaga *jednoczesnego* i *stabilnego* uaktywnienia odpowiednich obszarów mózgu, odpowiadających poszczególnym krokom dowodowym. Zdolność powtórnego przeprowadzenia dowodu wymagałaby odtworzenia odpowiedniej struktury połączeń. Sprzeczność we wnioskowaniu powodowałaby niestabilność rozumowania. Mózgi cechujące się większą odpornością na sprzeczność nie byłyby zdolne do przeprowadzania długich wnioskowań, ponieważ sygnał mógłby być silniej tłumiony podczas przejścia przez kolejne obszary i dla długich wnioskowań brakowałoby energii. Warto zauważyć, że *myślenie* o dwóch sprzecznych przekonaniach, w przeciwieństwie do *posiadania* dwóch sprzecznych przekonań, nie musi w powyższym modelu prowadzić do niestabilności. Na zakończenie tych rozważań należy podkreślić, że są to jedynie dość ostrożne spekulacje, niemniej dzisiejsze metody badania mózgu[22] stwarzają warunki, by taką hipotezę uczynić przedmiotem sensownego programu badawczego.

***

Zakładając, że badany system formalny jest niesprzeczny, można, na mocy twierdzenia Gödla, wskazać formułę G_T, która nie jest dowiedlna w tym systemie. Wykluczona jest zatem sytuacja, że maszyna zweryfikuje zdanie G_T, pojawiające się na jej wyjściu[23]. Nie wypowiadamy żadnych uwag na temat tego, czy maszyna rozumie zdanie G_T, czy nie, jak również nie wymagamy od niej deklaracji co do prawdziwości zdań. Jest to o tyle istotne, że zdanie G_T jest tak skonstruowane, że mówi o sobie, iż nie jest dowiedlne w rozważanym systemie formalnym, czyli fakt jego niedowodliwości świadczy o jego prawdziwości. Umysł uznaje to za oczywiste, w oparciu o rozumienie znaczenia tego zdania[24]. Ponieważ maszyna tego nie potrafi, ma to świadczyć o jej podrzędności w stosunku

---

[22]Na przykład metoda rezonansu magnetycznego.

[23]Twierdzenie Gödla mówi nawet więcej. Przy pewnych dodatkowych założeniach (które nie są konieczne, co wykazał Rosser, J. Rosser „Extensions of Some Theorems of Gödel and Church", *Journal of Symbolic Logic*, 1 (1936), 87–91, por. również R. Murawski, op. cit., s. 94), maszyna nie zweryfikuje również zdania $\neg G_T$.

[24]Prawdziwość zdania Gödla można uzasadnić bardziej formalnie. Jeżeli badany system formalny jest niesprzeczny, to na mocy twierdzenia o pełności, ma model, w którym każde zdanie, należące do języka tego systemu, jest bądź

do umysłu – umiejętność wykraczania poza system ma świadczyć o niemechaniczności umysłu. Należy tutaj zwrócić uwagę na pewną istotną rzecz. Jeżeli rzeczywiście zawieszamy tezę o niemechaniczności umysłu na potrzeby argumentacji, to samo przypisywanie umysłowi wglądu w prawdziwość zdania Gödla należy traktować ostrożnie. Przede wszystkim zdolność orzekania prawdziwości może być spowodowana faktem, iż umysł jest sprzeczny. Jeżeli umysł nie jest sprzeczny, to prawdziwość zdania Gödla wynika rzeczywiście ze spojrzenia na zdanie Gödla z poziomu metajęzyka i odwołania się do semantyki. Prawdziwość zdania Gödla nie może być jednak rozumiana absolutnie, ponieważ nie we wszystkich modelach, w których prawdziwe są wszystkie inne twierdzenia produkowane przez maszynę, zdanie to jest prawdziwe. To, że umysł uznaje za prawdziwe zdanie G_T a nie jego zaprzeczenie, jest ściśle rzecz biorąc arbitralne – może wynikać przykładowo z powodów pozalogicznych (np. pragmatycznych, rozumianych w kontekście ewolucyjnym). Sama zdolność orzekania prawdziwości zdania G_T nie wyklucza mechaniczności umysłu, orzekanie prawdziwości może być po prostu odpowiednikiem zapalania zielonej lampki. Nie jest wykluczone, że uznawanie przez nas pewnych zdań za prawdziwe odbywa się na mocy nieznanych nam reguł, w związku z czym sam fakt *operowania* terminami semantycznymi nie musi świadczyć o niemechaniczności umysłu; nie można wykluczyć sytuacji, że umiejętność rozumienia zdań zostanie „zautomatyzowana”. Arbitralne stwierdzenie, że maszyna dowodzi *mechanicznie* a umysł dowodzi przez *zrozumienie*, prowadzi do błędnego koła, ponieważ z góry zakłada się niemechaniczność umysłu[25]. Odmawianie zdolności semantycznych maszynie należy traktować zatem jako argument preferencyjny, a nie formalny.

---

prawdziwe, bądź fałszywe. W naturalnym modelach, zdanie to będzie prawdziwe. Prawdziwość zdania G_T nie ma charakteru „absolutnego”, ponieważ istnieją modele, w których to zdanie jest fałszywe.

[25]Wydaje się, że podobny zarzut można postawić komuś, kto powołuje się na tzw. *argument chińskiego pokoju*.

Zgodnie z twierdzeniem Tarskiego o niedefiniowalności prawdy dla dostatecznie bogatych i niesprzecznych systemów formalnych, żadnej własności, dotyczącej **wszystkich** formuł pewnego języka I rzędu, nie da się reprezentować w tym systemie przy pomocy jednej (tej samej) formuły[26]. Na mocy twierdzenia o reprezentowalności wynika stąd dalej, że czynność orzekania takiej uniwersalnej własności, którą w rozważanym przypadku jest prawdziwość, nie może być „zautomatyzowana" w tym systemie. Zdolność orzekania prawdziwości o wszystkich zdaniach pewnego języka formalnego oznacza zdolność wyjścia poza system. Gdyby umysł potrafił zweryfikować dowolne zdanie odpowiednio bogatego języka elementarnego, świadczyłoby to o jego niemechaniczności. Jest jednak inaczej. Wierzymy wprawdzie, że każde zdanie pewnego języka formalnego jest albo prawdziwe, albo fałszywe w modelu odpowiednim dla tego języka, czyli zakładamy dwuwartościowość, co przejawia się w definicji spełniania dla formuły $\neg\alpha$ w modelu tego języka, niemniej istnieją sytuacje, w których orzekanie prawdziwości nie jest dla nas trywialne. Przykładem może być tzw. *hipoteza continuum*, która jest zdaniem niezależnym w teorii ZFC. Orzeczenie prawdziwości w tym przypadku nie jest tak łatwe, jak w przypadku zdania Gödla. Nasza zdolność intuicyjnego rozpoznawania prawdy wydaje się więc ograniczona. Dlatego też przekonanie o tym, że potrafimy orzec prawdziwość bądź fałszywość każdego zdania, które nie jest dowiedlne w systemie formalnym, należy traktować z dużą ostrożnością. Jeżeli nie potrafimy przypisać wartości logicznej każdemu zdaniu pewnego języka sformalizowanego (na przykład języka teorii mnogości), to nasza przewaga nad maszyną może być złudzeniem. Wiemy, że każda niesprzeczna i odpowiednio bogata teoria, wyrażona w języku elementarnym i oparta o rozstrzygalny zbiór aksjomatów, nie jest rozstrzygalna,

[26]Twierdzenie to zachodzi również dla systemów zupełnych, tzn. takich, w których dla każdej formuły ϕ, w systemie jest dowiedlna formuła ϕ lub jej zaprzeczenie.

czyli w języku teorii istnieją zdania niezależne od tej teorii[27]. Wierzymy również, że istnieje niesprzeczna i zupełna teoria pewnego modelu, do której należą wszystkie i tylko prawdziwe zdania języka, którego interpretacją jest ten model, przy czym teorii tej nie da się zaksjomatyzować w sposób rozstrzygalny[28]. Przekonanie, że umysł jest w stanie dokonać wglądu w tę teorię ma jednak charakter metafizyczny a nie formalny. Przykładem zdania, co do którego nasz wgląd zawodzi, jest wspomniana *hipoteza continuum*. Paradoksalnie, w przypadku gdy umiemy podać niekwestionowalny dowód jakiegoś twierdzenia, to, jak uważają niektórzy, staje się on efektywny, a wtedy, jak zauważa Webb, „na podstawie faktu, że procedury efektywne mogą być symulowane przez maszyny Turinga, wnioskujemy, że dowody te także może symulować maszyna”[29]. Wniosek z powyższych rozważań jest następujący: o ile nawet istnieje „dwuwartościowy” platoński świat matematyki, to umysł niekoniecznie ma do niego dostęp, a jeżeli świat ten jest mitem i matematyka jest jedynie „modelem umysłu”, interpretacją pewnego języka, to okazuje się, że ten model jest *wirtualny*, że jest jedynie ideą regulatywną, ponieważ to, co jest w stanie stworzyć umysł, nie może być kompletne. Nie można zatem wykluczyć, że nasza matematyka jest w zasięgu możliwości jakiegoś superautomatu. Ponadto, postulaty, którymi kierujemy się przy tworzeniu teorii matematycznych, na przykład niesprzeczność, mogą być uwarunkowane empirycznie, choć nie oznacza to wcale, że rzeczywistość „sama w sobie” jest niesprzeczna.

[27] Mówi o tym twierdzenie Churcha.

[28] Teoria taka istnieje na mocy twierdzenia Lindenbauma. W dowodzie wykorzystuje się nieefektywne metody teorii mnogości (należy przy tym pamiętać, że *nieefektywne* metody dowodu nie oznaczają tego samego co *nieefektywność* w teorii rekursji), choć dla języków skończonych ($| J | = \aleph_0$) twierdzenie można dowieść efektywnie.

[29] J. C. Webb, *Mechanism, Mentalism and Metamathematics*, Synthese Libr. vol. 137, Reidel, Dodrecht, 1980, cytat za: S. Krajewski, op. cit., s. 132.

Semina ☐ Nr 3
Scientiarum 2004

(Nie)zupełna teoria Gödla

Stanisław Krajewski, *Twierdzenie Gödla i jego interpretacje filozoficzne. Od mechanicyzmu do postmodernizmu*, Wydawnictwo IFiS PAN, Warszawa 2003, ss. 366.

Nie ulega wątpliwości, że twierdzenia Gödla są jednymi z najistotniejszych twierdzeń dotyczących podstaw matematyki. Twierdzenia te wskazały na niemożność realizacji programu Hilberta i postulatów logicyzmu; przede wszystkim jednak zakończyły one pewien etap dziejów ludzkiej refleksji, zdominowany przez próby ujednolicenia i systematyzacji całej dostępnej matematyki, wskazując na to, że nierealizowalność takiego przedsięwzięcia jest zasadnicza. Ten szczególny rezultat, którego ścisłość jest zagwarantowana przez zastosowany formalizm, okazał się niezwykle inspirujący filozoficznie. Jednak doceniając istotność tychże twierdzeń, nie należy zapominać o ich (meta)matematycznym charakterze. Próby bezkrytycznego zastosowania twierdzeń Gödla w innych niż matematyka dziedzinach są co najmniej dyskusyjne i zazwyczaj wątpliwe. Nie wynika z tego jednak, że nie jest możliwa żadna filozoficzna ich interpretacja. Z kolei wielość komentarzy do twierdzeń Gödla pozwala zapomnieć o tym, że jego dokonania nie wyczerpują się w tych twierdzeniach; na uwagę zasługują nie tylko jego pozostałe osiągnięcia matematyczne, ale także jego oryginalna refleksja filozoficzna.

Powyższym zagadnieniom poświęcona jest książka Stanisława Krajewskiego *Twierdzenie Gödla i jego interpretacje filozoficzne*. Według Autora ta publikacja „jest monografią twierdzeń Gödla z punktu widzenia zastosowań i konsekwencji filozoficznych" (s. 9). Jednak zawartość książki wykracza poza zakres sugerowany tą deklaracją i tytułem. Krajewski nie tylko omawia twierdzenia Gödla i próby ich zastosowań w filozofii umysłu oraz w innych filozoficznych i niefilozoficznych dziedzinach, ale również przedstawia pozostałe matematyczne osiągnięcia Gödla, jego poglądy filozoficzne i krótką biografię. Sądzę, że *Twierdzenie...* można uznać za polskojęzyczne kompendium wiedzy o życiu i dokonaniach „najgenialniejszego logika od czasów Arystotelesa" (por. s. 10). Pomimo tego, iż nie wszystkie problemy są omawiane równie szczegółowo jak zagadnienia tytułowe, jednak dodatkowe informacje odgrywają istotną rolę merytoryczną i kompozycyjną.

Treść omawianej monografii świadczy o kompetencji autora, zaś prezentacja dyskutowanych zagadnień jest adekwatna zarówno względem ich złożoności, jak również z uwagi na ich istotność. Przykładowo, prezentacja twierdzeń Gödla wykracza poza standardowe ujęcia; w części im poświęconej Krajewski umieścił również — między innymi — twierdzenia Tarskiego i Rossera, dowód drugiego twierdzenia Gödla na podstawie warunku Löba i dowód Chaitina, wskazał ich kontekst filozoficzno–historyczny oraz przedstawił uwagi dotyczące ich recepcji.

Podczas lektury książki Krajewskiego trudno nie zauważyć, iż jest ona bardzo dobrze skonstruowana; poszczególne jej części są uporządkowane merytorycznie, ponadto autor podaje *explicite* zasady ich następowania po sobie. Jednak w co najmniej dwóch przypadkach sformułowane uzasadnienia są kontrowersyjne. W zakończeniu pierwszego rozdziału znajdziemy lapidarną wzmiankę o pretensjach Finslera dotyczących tego, kto pierwszy sformułował twierdzenie o niezupełności; jak słusznie autor zauważył, praca Finslera „nie jest poważana", choć „wedle Webba to Finsler, a nie Gödel, przekonał wielu, że umysł przewyższa formalizmy" (ss. 78nn). Problem relacji umysłu do tego, co formalne pojawia się tutaj bez jakiegokolwiek uzasadnienia, Krajewski zaś potraktował go jako łącznik pomiędzy pierwszym rozdziałem, dotyczącym twierdzeń Gödla, a drugim — poświęconym ich zastosowaniu w filozofii umysłu.

Z kolei w zakończeniu bardzo interesującej części rozdziału trzeciego, w której poruszane jest zagadnienie „milczenia Gödla o Tarskim" (zob. s. 221), Krajewski przytacza opinię Hintikki, według którego poglądy Gödla na temat pojęcia prawdy były anachroniczne. Autor *Twierdzeń...*, nie zgadzając się z fińskim logikiem stwierdza, iż ujęcie Hintikki „nie jest w porządku. Gödel miał kłopoty psychiczne, ale to nie umniejsza znaczenia jego poglądów. Sprawa jest jednak na tyle intrygująca, że zasługuje na osobne zbadanie" (s. 242). W konsekwencji kolejna cześć rozdziału dotyczy relacji między twórczą aktywnością w dziedzinie logiki a zdrowiem psychicznym, mimo tego, że Hintikka o problemie tym nie wspominał.

Chociaż książka Krajewskiego ma charakter monografii, nie jest ona filozoficznie neutralna. Wskazują na to rozważania zawarte w ostatnim rozdziale, gdzie oprócz subtelnych rozróżnień typów konsekwencji twierdzeń Gödla w dziedzinach pozamatematycznych i analiz obecnych w literaturze błędnych odniesień do tych twierdzeń Krajewski sugeruje, iż „twierdzenie Gödla samo przez się nie rozstrzyga żadnych sporów filozoficznych" (s. 342); ich ewentualne zastosowanie w filozofii wymaga uwzględnienia pewnych — sformułowanych przez Krajewskiego — kryteriów (na przykład „stosowanie twierdzenia Gödla [...] do teorii pozamatematycznych wymaga nadania tym teoriom postaci formalnej" (s. 342)). Sugestia ta wydaje mi się wątpliwa z dwóch powodów. Zgadzam się z autorem co do tego, że pozamatematyczne zastosowanie twierdzeń Gödla wymaga ich interpretacji, co oczywiście może prowadzić do ich nadużycia. Tymczasem sugestia Krajewskiego, iż z twierdzeń Gödla nie można korzystać, o ile nie są spełnione dane kryteria, jest przecież pewną ich interpretacją; co więcej, nie spełnia ona żadnego z kryteriów Krajewskiego. Po drugie, normatywne rozstrzyganie tego, jakie interpretacje danego zagadnienia należy uważać za słuszne, nie cieszą się w filozofii zbyt dużą estymą. I słusznie, albowiem na podstawie jakich przesłanek należałoby uznać ich prawdziwość? Krajewski stara się wzmocnić swoją argumentację, przytaczając przykłady nadużywania twierdzeń Gödla; nie sądzę jednak iż z tego, że dotychczasowe refleksje, nie spełniające kryteriów Krajewskiego, okazały się mniej lub bardziej niezasadne wynika, że wszystkie tego typu próby również będą bezwartościowe.

Oczywiście należy liczyć się z tym, że skoro żyjemy w „erze pogödlowskiej" (por. s. 343), w której „popularność twierdzenia Gödla [...] będzie rosła" (tamże), to również rosła będzie ilość nietrafnych komentarzy do tych wyników. Sądzę jednak, iż odpowiedzialna filozoficzna refleksja nie musi przyjmować form zadanych z góry.

Robert Piechowicz

Semina ☐ Scientiarum Nr 3 2004

Dla kogo?

John L. Casti, Werner DePauli, *Gödel. Życie i logika*, CiS, Warszawa 2003.

Ukazała się w tym roku niewielka książeczka o intrygującym tytule *Gödel. Życie i logika* — łakomy kąsek dla czytelnika zainteresowanego postacią matematyka, dla którego towarzystwa Einstein miał przyjechać do Princeton. Notka na okładce informuje, że co najmniej jeden z autorów zajmuje się „analizą dorobku Kurta Gödla".

Otwieramy książkę. Tłumaczył ją Piotr Amsterdamski — kolejny plus. Trochę zastanawia jej objętość: 192 strony, duża czcionka, mały format mają pomieścić opowieść o życiu i logice „najlepszego matematyka stulecia"; tymczasem rzecz zaczyna się „od czasów Arystotelesa", a kończy — „podróżą w głąb duszy". Najwidoczniej należy nastawić się na popularne opracowanie, być może sympatyczny początek znajomości ze słynnym logikiem, przystępne wprowadzenie w tajemniczy świat współczesnej matematyki?

Styl i sposób wykładu wydaje się potwierdzać to przypuszczenie: twierdzenie Gödla zostało wytłumaczone na przykładzie „Maszyny do Czekoladowych Ciast", paradoksy teorii mnogości zilustrowane znaną historią fryzjera golącego wszystkich, którzy nie golą się sami, system formalny zbudowany jest w oparciu o karciane symbole, dla wyjaśnienia numeracji Gödla zapożyczono od Hofstadtera „analogię kolejową", itp. W książce roi się od dowcipnych uwag i anegdotek z życia Gödla: o tym, jak przyszła żona obroniła go parasolką przed „brunatnymi koszulami", czy jak skrupulatny logik znalazł w konstytucji amerykańskiej lukę, pozwalającą na przekształcenie ustroju Stanów Zjednoczonych w dyktaturę.

Tyle tylko, że wśród tych rozmaitych uwag, analogii i skojarzeń gubią się informacje o głównym bohaterze. Niemal tyle samo co jemu miejsca autorzy poświęcają filozofii Wittgensteina i Koła Wiedeńskiego[1]; znacznie więcej zajmuje dyskusja na temat możliwości komputerów i sztucznej inteligenicji: od teorii rekursji ze stosunkowo szczegółowym omówieniem maszyn Turinga łącznie z tzw. problemami stopu i pracowitych bobrów, poprzez tezę Turinga–Churcha, dyskusję z Penrosem, nauki kognitywne, test Turinga, różne podejścia do problematyki sztucznej inteligencji aż po algorytmy genetyczne — to wszystko po to, by wspomnieć o argumencie Lukasa błędnie interpretującym twierdzenie Gödla.

Dwa ostatnie rozdziały poświęcone są rozważaniom kosmologicznym oraz pracom Chaitina. Przyznać jednak muszę, że ich nie przeczytałam. Książka, w pierwotnym zamierzeniu „do poduszki", pobudzała do gwałtownej (i nie sprzyjającej miłemu zasypianiu) pracy umysłowej, polegającej jednak głównie na tym, by znaleźć taki punkt widzenia, z którego ze spokojem mogłabym zaakceptować twierdzenia autorów. Jednak kiedy na 149 stronie przeczytałam, jakoby „Immanuel Kant głosił, że zmiany są złudą wywołaną naszym szczególnym ludzkim sposobem percepcji", nie wytrzymałam. I w chwilę potem pogratulowałam sobie tej decyzji, szkoda że podjętej tak późno. Bowiem skoro czytając o rzeczach znanych musiałam poszukiwać perspektywy pozwalającej na przyjęcie stanowiska autorów[2], nie mogłam polegać na informacjach dla mnie

[1] Może to dziwić tym bardziej, jeżeli uważnie przeczyta się wprowadzający w problematykę wiedeńskiej filozofii fragment, gdzie czytamy m.in.: *Gödel nigdy nie rozmawiał z Wittgensteinem, ale widział go kiedyś na wykładzie L. E. J. Brouwera o matematyce, nauce i języku, wygłoszonym, na Uniwersytecie Wiedeńskim w 1928 roku. W każdym razie jego sposób widzenia matematyki z pewnością odbiegał od późniejszej koncepcji Wittgensteina [...].* Wprawdzie autorzy wskazują również pewne podobieństwa poglądów filozofa i logika, ale moim zdaniem, czynią to w sposób nieprzekonujący.

[2] Tu dopisać by warto słówko, np. o rozstrzygalności aksjomatów w „formalnej wersji logicznej" twierdzenia Gödla (s. 54), tu zaznaczyć, że tak twierdzili

nowych — skądże bowiem mieć pewność, że nie wyciągam z nich zupełnie błędnych wniosków?

Jednym słowem: dla kogo ta książka? Ani dla specjalistów — nie ma tam stwierdzeń odkrywczych[3], ani dla nowicjuszy — strzeżcie się! Można ją polecić co najwyżej kolekcjonerom anegdot.

Maria Piesko

---

tylko niektórzy interpretatorzy (np. filozofii Wittgensteina), to znów machałam już ręką i nie zastanawiałam się dłużej na istnienie jakichże to „ograniczeń logicznej mocy ludzkiego umysłu" miałoby wskazywać twierdzenie Gödla (nie sądzę, by wynikało to z rozważań zamieszczonych na s. 120). Od wniesienia do oryginalnego tekstu poprawki nie mógł się powstrzymać najwidoczniej i tłumacz (por. s. 41).

[3] Autorów najwyraźniej pociąga tematyka sztucznej inteligencji; dlaczego jednak nie zamieścili swoich rozważań pod nieco bardziej adekwatnym tytułem?

Semina □ Nr 3
Scientiarum 2004

???TYTUŁ

J. W. Dawson, *Logical Dilemmas. The Life and Work of Kurt Gödel*, A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 1997, ss. ??.

O Kurcie Gödlu wiadomo niewiele. Poza wąskim gronem specjalistów z dziedziny szeroko pojętej matematyki, większość ludzi, którzy o nim w ogóle słyszeli, wie zapewne tylko tyle, że należał do najwybitniejszych matematyków XX wieku, a może i wszechczasów. Bliżej zaznajomieni z historią logiki i matematyki dodadzą, że to właśnie on jest odkrywcą przełomowych twierdzeń o niezupełności, których znaczenie dla nauki do dzisiaj jest dyskutowane. Niektórzy być może wiedzą także i to, że przez całe swoje życie cierpiał z powodu choroby psychicznej, że był dziwakiem i samotnikiem, że przez pewien czas uczęszczał na spotkania Koła Wiedeńskiego albo to, że oprócz matematyki zajmował się także filozofią i kosmologią. Wydaje się jednak, że o ile dorobek naukowy Gödla obejmujący główne prace z matematyki i logiki jest — przynajmniej wśród specjalistów — powszechnie znany i komentowany, o tyle sama postać ich autora wciąż pozostaje co najmniej enigmatyczna.

O życiu Gödla napisano do tej pory niewiele – zaledwie kilka krótkich artykułów autorstwa Georga Kreisela, Curta Chrystiana i Salomona Fefermana. Dwie książki o Gödlu napisał Hao Wang, niemniej żadna z nich nie może pretendować do miana biografii. Wreszcie w 1997 r. ukazała się na rynku (niestety nie polskim) pozycja, dzięki której sytuacja uległa długo oczekiwanej zmianie: *Logical Dilemmas. The Life and Work of Kurt Gödel* Johna W. Dawsona.

Nie można by chyba znaleźć osoby bardziej kompetentnej do napisania biografii Gödla. Dawson jest profesorem matematyki na

Uniwersytecie w Pennsylwanii, autorem prac z logiki matematycznej i teorii mnogości, a także historykiem nauki. Co jednak najistotniejsze, to właśnie on w latach 1982 – 1984 podjął się, na prośbę władz Institute for Advanced Study w Princeton, skatalogowania pism, które pozostawił po sobie Gödel, a potem brał udział w wydaniu jego niepublikowanych za życia dzieł (w serii *Collected Works*).

Materiał bibliograficzny zebrany przez Dawsona jest naprawdę imponujący. Oprócz zachowanych zapisków samego Gödla, obejmujących ponad 60 skrzyń (!) oraz jego korespondencji listowej z matką, przechowywanej w bibliotekach w Wiedniu, Dawson dotarł m. in. do spisanych wspomnień Karla Mengera, brata Kurta Gödla — Rudolfa, pamiętników Oskara Morgensterna, jak również licznych archiwów państwowych.

W rezultacie otrzymujemy książkę bardzo bogatą pod względem faktograficznym, niezrównane źródło informacji o geniuszu, którego losy to pasmo wielkich sukcesów naukowych, ale także licznych rozczarowań i problemów osobistych. Wydarzenia z życia Gödla przedstawione są w książce Dawsona chronologicznie – od dzieciństwa w Brnie, przez studia na Uniwersytecie w Wiedniu, aż po wyjazd do Stanów Zjednoczonych i śmierć w Princeton. Zajmujący sposób narracji, rzetelny warsztat badawczy, urozmaicanie faktów biograficznych anegdotami oraz wypowiedziami osób, które Gödla znały osobiście, wreszcie fotografie miejsc, z którymi był w jakiś sposób związany, sprawiają, że sprawozdanie z życia wiecznego samotnika staje się naprawdę pasjonujące.

Interesujący jest sposób, w jaki Dawson zestawia ze sobą dwa wizerunki Kurta Gödla: po pierwsze, jako osoby prywatnej, skupiając się przede wszystkim na jego cechach charakteru, zainteresowaniach, kontaktach z innymi ludźmi, oraz genezie i przebiegu jego zaburzeń emocjonalnych. Po drugie zaś, patrzy na Gödla jako na naukowca, geniusza – matematyka, który większość swojego życia poświęcił pracy badawczej. Tych dwóch płaszczyzn nie można oczywiście precyzyjnie od siebie oddzielić, niemniej Dawson stara się zbadać, jaki wpływ na osiągnięcia naukowe Gödla mogły mieć wydarzenia z jego życia osobistego oraz analogicznie, jak praca naukowa – zarówno spektakularne sukcesy jak i wielkie porażki – oddziaływały na stan jego psychiki.

Kurt Gödel to — jakże często pojawiający w historii nauki — przykład geniusza, którego znamionuje wyraźny rys tragizmu. Epokowego odkrycia twierdzeń o niezupełności, z którym obecnie kojarzone jest jego nazwisko, dokonał mając zaledwie dwadzieścia cztery lata. Z początku zupełnie niezrozumiany przez środowisko naukowe, sławę i zaszczyty uzyskał dopiero pod koniec życia – w czasie, kiedy nie przywiązywał już do nich żadnego znaczenia. Po odkryciu twierdzeń limitacyjnych osiągnął już tylko kilka liczących się wyników naukowych i prześladowany przez nasilające się obsesje i nerwice, prawie całkowicie usunął się w cień życia publicznego. Przez te wszystkie lata był osobą niezwykle skrytą, pozstając zagadką nawet dla najbliższego grona nielicznych przyjaciół.

Dzięki książce Dawsona mamy okazję przyjrzeć się postaci Gödla z nieznanego do tej pory punktu widzenia – porzucić wizerunek zasadniczego, zawsze tajemniczego i niedostępnego dla otoczenia uniwersyteckiego wykładowcy bez reszty poświęconego nauce i spojrzeć na jego życie takie, jakim było naprawdę. Było w nim miejsce na przelotne zainteresowanie zjawiskami parapsychologicznymi w czasie studiów w Wiedniu, brawurową ucieczkę z Rzeszy niemieckiej do USA przez Rosję i Pacyfik, była wielka miłość do żony Adele, a także przyjaźnie z najwybitniejszymi ludźmi jego czasów, jak choćby z Einsteinem, czy Morgensternem. Przy tym wszystkim życie Gödla nie było wcale łatwe. Dawson znakomicie pokazuje ciągłe napięcie między krótkimi okresami szczęścia i równowagi psychicznej, a powtarzającymi się atakami depresji i hipochondrii, których tragicznym finałem była śmierć głodowa Kurta.

Logical Dilemmas jest pozycja adresowaną do bardzo szerokiego grona odbiorców. Z tego względu autor musiał stawić czoła poważnej trudności, a mianowicie możliwie rzetelnej prezentacji dorobku naukowego Gödla w sposób zrozumiały dla przeciętnego czytelnika. Pociągało to za sobą z jednej strony konieczność umiejscowienia jego pracy naukowej w szerokim kontekście historii logiki i matematyki, z drugiej zaś ograniczenia do minimum, czy wręcz zrezygnowania z formalizmu matematycznego. Dawson podjął się karkołomnego zadania – przedstawienia w dwóch krótkich rozdziałach dziejów logiki od starożytności do czasów najnowszych oraz podstawowej problematyki teorii mnogości. W rezultacie czytelnik otrzymuje zbiór dość szczegółowych, lecz niejasno powiązanych ze sobą stwierdzeń i wątków, które bez gruntownego przygotowania matematycznego mogą pozostać niezrozumiałe. Niedosyt pozostawia również sposób zaprezentowania głównego odkrycia naukowego Gödla – twierdzenia o niezupełności. Szkoda, że mimo licznych uwag o nowatorstwie zastosowanej w jego dowodzeniu metody arytmetyzacji składni, Dawson nigdzie jej nawet nie przybliża.

Jednak dla czytelnika, którego znajomość logiki i matematyki wychodzi poza poziom rudymentarny *Logical Dilemmas* staje się fantastyczną pomocą, dzięki której można śledzić historię powstawania, dojrzewania, a wreszcie prób pokonywania określonych problemów z dziedziny szeroko pojętej matematyki. Dawson z dużą znajomością przedmiotu wskazuje niuanse rozważanych zagadnień, czy np. wzajemne inspiracje rozmaitych myślicieli.

Logical Dilemmas Johna Dawsona to bez wątpienia pozycja bardzo dobra, bogata pod względem faktografii, rzetelna, a jednocześnie pasjonująca. Niemała w tym zasługa budzącej respekt erudycji autora. Dla logików i matematyków książka Dawsona może stać się wartościową pomocą, dokumentującą proces rozwoju podstawowych idei związanych głównie z aksjomatem wyboru i hipotezą continuum. Dla wszystkich zaś będzie bez wątpienia wyczerpującym i zajmującym opisem życia Gödla — kto wie, czy nie najwybitniejszego umysłu matematycznego w historii.

Tomasz Furman

Semina ☐ Nr 3
Scientiarum 2004

Komentarz do przypisów...

Krzysztof Wójtowicz, *Platonizm matematyczny. Studium filozofii matematyki Kurta Gödla*, OBI–Biblos, Krkaów–Tarnów, 2002, ss. 160.

Problem istnienia bytów abstrakcyjnych jest jednym z najstarszych i najbardziej podstawowych zagadnień filozoficznych. Zagadnienie to zostało postawione przez Platona dwadzieścia pięć wieków temu. Stawiając tezę realnego istnienia idei, niezależnych od świata fizycznego i ludzkich umysłów, Platon zainicjował spór znany w historii filozofii jako spór o uniwersalia.

Realistyczny pogląd Platona w kwestii istnienia powszechników był później krytykowany na bardzo wiele sposobów. Krytykę zapoczątkował już uczeń twórcy Akademii (Arystoteles, a kontynuowali ją średniowieczni nominaliści, a następnie przedstawiciele rozmaitych odmian pozytywizmu i materializmu. Mimo to platonizm wciąż ma wielu «wyznawców» i to wśród największych postaci myśli współczesnej.

Krzysztof Wójtowicz przedstawia w książce *Platonizm matematyczny*, wydanej przez Biblos w 2002 roku, poglądy filozoficzne jednego z dwudziestowiecznych platoników, Kurta Gödla. Książka składa się z ośmiu rozdziałów, w których autor charakteryzuje typ uprawianej przez Gödla filozofii (przede wszystkim rozdziały 1, 2, 4) i zestawia jego poglądy ze stanowiskami współczesnych mu myślicieli (rozdziały 3, 5, 6). Całość dopełnia krótka biografia Gödla i obszerna bibliografia.

Chociaż głównym przedmiotem swoich rozważań Wójtowicz czyni ontologię matematyki, poprzedza je przedstawieniem ogólnego światopogląd filozoficznego Gödla. Autor omawia Gödlowski program stworzenia całościowego systemu filozoficznego, zbudowanego na wzór systemów aksjomatycznych. Gödel uważał, że problemy filozoficzne są zasadniczo rozwiązywalne, a ich rozwiązanie otwiera drogę do stworzenia syntezy wyników nauk szczegółowych i dociekań czysto filozoficznych. Optymizm Gödla wiązał się z jego wizją metody filozoficznej. Nazywał ją „analizą treści pojęć". W tle tej wizji stało przekonanie «metafizyczne» o obiektywnym istnieniu obiektu tej analizy: rzeczywistości pojęć dostępnej specjalnej intuicji.

Dla czytelnika, któremu nazwisko „Gödel" kojarzy się wyłącznie z osiągnięciami na polu logiki i matematyki, to filozoficzne *credo* może być nie lada zaskoczeniem. Program Gödla jest bowiem programem bardzo śmiałym, jak na pełen na ogół pozytywistycznego sceptycyzmu i krytyki tradycyjnej metafizyki wiek dwudziesty.

Całościowy system filozoficzny, o którego stworzeniu marzył Gödel, nigdy niestety nie powstał. Ogólne założenia tego systemu znalazły jednak wyraz w refleksji Gödla nad istotą matematyki i nie pozostały bez wpływu na jego podejście do uprawiania nauk formalnych.

Stanowisko Gödla w filozofii matematyki zwykło się nazywać „platonizmem". Tym samym mianem określa się jednak także inne, często znacznie różniące się od siebie (a nieraz i mające niewiele wspólnego z poglądami samego Platona) doktryny filozoficzne. Wójtowicz w drugim rozdziale pracy charakteryzuje Gödlowską wersję *platonizmu matematycznego* następująco: „(1) Gödel uznaje istnienie obiektywnego, niezależnego od naszej działalności poznawczej uniwersum matematycznego. (2) Uniwersum to ma [według Gödla] bogatą strukturę [. . .]. (3) Możemy poznać to uniwersum i dążyć do jego pełniejszego opisu" (s. 42). Gödlowski platonizm *metafizyczny* Wójtowicz przeciwstawia platonizmowi *metodologicznemu.* W metafizycznej odmianie platonizmu założenie, że pojęcia i liczby istnieją niezależnie od umysłu ludzkiego i od świata materialnego, nie jest jedynie (jak dla platoników metodologicznych (zabiegiem czysto heurystycznym.

Z platonistyczną wizją ontologii matematyki wiąże się ściśle Gödlowska wizja epistemologii (rozdział czwarty). Podstawowym narzędziem poznania matematycznego jest, jak już wspominano, intuicja, tj. specyficzny sposób obcowania z bytami matematycznymi i – ogólnie – pozaempirycznymi. Intuicja jest dla bytów abstrakcyjnych tym, czym poznanie zmysłowe dla świata fizycznego – środkiem poznania bezpośrednim, ale i zawodnym. I w matematyce bowiem możemy błądzić, ale też i korygować błędne rezultaty poznania.

"Drugim filarem" wiedzy matematycznej jest u Gödla „owocność aksjomatów i ich przydatność w rozwiązywaniu problemów" (s. 70): to, w jakim stopniu mogą one przyczynić się do rozwoju matematyki (uproszczenia dowodów, znalezienia nowych metod heurystycznych itd.).

Wydobyciu swoistych cech Gödlowskiej filozofii matematyki służy zestawienie poglądów Gödla ze stanowiskami innych współczesnych mu myślicieli zajmujących się podobną problematyką. Rozdział trzeci dotyczy w szczególności relacji platonizmu matematycznego do koncepcji przedstawicieli pozytywizmu logicznego. Gödel sprzeciwia się – proponowanym m.in. przez młodego Carnapa – czysto syntaktycznym interpretacjom matematyki. Zdania matematyki są według Gödla (a wbrew neopozytywistom (zdaniami analitycznymi, a matematyka to nie dziedzina operacji na bezsensownych symbolach. Wójtowicz zwraca uwagę na zasadniczą różnicę w pojmowaniu „analityczności" przez Gödla i przez Carnapa. Zdania analityczne w ujęciu neopozytywistów są właśnie pozbawionymi treści tautologiami, gdy tymczasem według Gödla – analityczne prawdy wypływają z analizy treści obiektywnie istniejących pojęć

W rozdziale piątym Wójtowicz zestawia poglądy „metafizyka" Gödla ze stanowiskiem „instrumentalisty" Hilberta. Hilbert i Gödel podzielają pogląd o obiektywności wiedzy matematycznej i obaj są optymistami (uważają, że matematyczne problemy są rozwiązywalne), różnią się jednak zasadniczo co do tego, jaka ma być «strategia» rozwiązywania tych problemów. Według Hilberta, sposobem na usunięcie pojawiających się w podstawach matematyki paradoksów i ugruntowanie jej pewności jest jej finitystyczna aksjomatyzacja i dowiedzenie niesprzeczności za pomocą metod czysto formalnych. Gödel nie uważał za konieczne przyjmowanie ograniczeń finitystycznych proponowanych przez Hilberta. Stanowisko Gödla jest realistyczne w stosunku do całości matematyki, także jej części infinitystycznej. Gödel, jako realista, nie utożsamiał prawdziwości z dowodliwością formalną. Bywa bowiem, że prawda wymyka się procedurom dowodowym. Potwierdzenie tego faktu znalazł, dowodząc niezupełności arytmetyki.W rozdziale szóstym Wójtowicz zestawia poglądy Gödla z tzw. argumentem z niezbędności Quine'a. Punktem wyjścia poglądów Quine'a na temat odniesienia przedmiotowego matematyki jest założenie, że skoro istnieją te obiekty, o których mówi się w naukach empirycznych, to wystarczy wykazać, że matematyka jest niezbędną częścią tych nauk, żeby mieć podstawy do zajęcia stanowiska realizmu matematycznego. W holistycznym ujęciu wiedzy Quine'a niknie jakościowa różnica między prawdami analitycznymi a syntetycznymi, czyli także między tezami matematyki a zdaniami wyprowadzanymi z doświadczenia. Realizm Quine'owski obchodzi się w ten sposób bez postulowania jakichś odrębnych obiektów matematycznych. Gödel natomiast, choć nie umniejsza roli matematyki w opisie fizycznego świata, uznaje świat obiektów matematycznych za samodzielne uniwersum badań. O ile dla Quine'a matematyka to przede wszystkim nauka stosowana (a więc integralna część teorii fizycznych), o tyle dla Gödla «prawdziwa» matematyka to matematyka czysta.

Ostatnim zagadnieniem omawianym przez Wójtowicza są «zmagania» Gödla z hipotezą *continuum* (rozdział siódmy). Ten chyba najciekawszy rozdział książki pokazuje, w jaki sposób ogólne poglądy filozoficzne Gödla odzwierciedlały się w sposobie rozwiązywania konkretnych problemów matematycznych. Gödel dowiódł niezależności postawionej przez Cantora hipotezy. Jednakże jego filozoficzne przekonanie o obiektywności prawd matematycznych i istnieniu matematycznego uniwersum kazało mu na tym nie poprzestać. Jako realista wierzył bowiem w możliwość rozstrzygnięcia pytania o prawdziwość tej hipotezy. Inna sprawa, że mimo długotrwałych starań, nie udało się Gödlowi tej możliwości zrealizować.

Jak wspomina Wójtowicz, Gödlowskie rozważania nad hipotezą *continuum* i – ogólniej – zdaniami niezależnymi zaowocowały sformułowaniem przez Gödla «programu» poszukiwania aksjomatów dla teorii matematycznych. Program ten, nazwany imieniem twórcy, a postulujący nową metodę rozstrzygania otwartych problemów matematycznych, jest obecnie realizowany z powodzeniem między innymi w ramach tzw. matematyki odwrotnej

Książka Wójtowicza jest godną polecenia lekturą zarówno dla filozofów, jak i dla matematyków. Pozwala spojrzeć na postać Gödla z niecodziennej perspektywy i w nowym świetle stawia jego dokonania matematyczne. Nasuwają mi się tylko dwie uwagi krytyczne. Pierwsza uwaga dotyczy zbyt stereotypowego przedstawienia poglądów zarówno Hilberta, jak i logicznych pozytywistów. To instrumentalne ich potraktowanie można jednak usprawiedliwić. Dokładna analiza wymienionych doktryn wymagałaby znacznie obszerniejszych wywodów, przez co praca straciłaby na spójności. Druga uwaga dotyczy kompozycji całości książki. Jak pisze autor w przedmowie, książka powstała na podstawie kilku wcześniej publikowanych artykułów. Ma to swoje dobre i złe strony. Do dobrych należy to, że poszczególne rozdziały można czytać jako oddzielne, niezależne od reszty eseje. Strona zła ujawnia się podczas czytania książki «od deski do deski». Ma się wtedy wrażenie, że autor niepotrzebnie wraca do rozważanych już wcześniej kwestii.

Whitehead napisał kiedyś, że cała filozofia zachodnia to przypisy do Platona. Jeśli tak byłoby rzeczywiście, to „Platonizm matematyczny" można nazwać „komentarzem do przypisów". Nie jest to jednak bynajmniej określenie pojoratywne. Nie rozstrzygając, czy Whitehead miał rację, przyznajmy że zadziwiająca jest aktualność pytań stawianych przez Platona, a jeszcze bardziej – wielu udzielanych przez niego odpowiedzi. Obecność platońskich wątków u tak wielu współczesnych myślicieli, do których należał i Gödel, stanowi uzasadnienie tezy, że wielka filozofia nigdy się nie dezaktualizuje. Książka Wójtowicza o tym przypomina i skłania do refleksji nad starymi, choć wciąż istotnymi pytaniami metafizyki.

Anna Brożek