

Papieska Akademia Teologiczna
w Krakowie
Wydział Filozoficzny

Rozprawy doktorskie

O rozumieniu implikacji w klasie logik porządku
i jego znaczeniu w dążeniu do pewności językowej

zatwierdzona przez Radę Wydziału Filozoficznego PAT
w dniu 18.10.1996 r.

promotor
ks. prof. dr hab. Michał Heller (PAT)

recenzenci
bp prof. dr hab. Józef Życiński (PAT)
doc. dr hab. Jacek K. Kabziński (UJ)

Ks. Adam Olszewski

**O rozumieniu implikacji
w klasie logik porządku i jego znaczeniu
w dążeniu do pewności językowej**

Wydawnictwo Naukowe
Papieskiej Akademii Teologicznej
Kraków 1997

© by Adam Olszewski

opracowanie techniczne Tomasz Sekunda

ISBN 83-85245-70-7

WSTĘP

Czasem uważa się, że filozofia miałaby, w stosunku do nauk szczegółowych, spełniać rolę samoświadomości nauk, rozumiejąc ich wyniki. Być może i taka rola przysługuje filozofii. Rodzi się jednak pytanie o to, co miałoby spełniać analogiczną rolę wobec filozofii samej. Pytanie to jest o tyle ważne, że w filozofii obserwujemy dość duży zamęt¹. Daje się zauważyć w niektórych wypadkach nawrót do sofistyki i relatywizmu². Rodzi to niepokój o przyszłość filozofii. Jednym z najpilniejszych problemów leżących u podstaw naszego myślenia, a zatem i filozofowania jest rozwiązanie zagadnienia znaczenia oraz pewności. Dotyczy to w szczególności filozofii matematyki i logiki.³

Powracając do postawionego wyżej pytania, należy stwierdzić, iż filozofia jest skazana na to by być swą własną "metafilozofią". Jeśli tak, to "metafilozofia" byłaby obarczona powyższymi słabościami.

Praca niniejsza leży w zarysowanym nurcie, który wyraża troski o filozofię – o miejsce filozofii w racjonalnym świecie. Celem rozprawy jest rozważenie małego obszaru dziedziny refleksji filozoficznej, należącego zasadniczo do

¹ interesujący jest pogląd Wittgensteina na temat niektórych prac filozoficznych; por. SADY [1993], s. 64. Dla wyjaśnienia zasady dokonywania przypisów zaznaczam, że na przykład; 'SADY [1993]' jest odnośnikiem do pozycji znajdującej się w spisie literatury na końcu pracy. 'SADY' jest to nazwisko autora umieszczone według kolejności alfabetycznej, zaś cyfra w nawiasie oznacza rok wydania pracy. W przypadku prac tłumaczonych na język polski, w nawiasie podaję rok wydania tłumaczenia polskiego; do niego odnoszą się podane numery stron.

² por. KOŁAKOWSKI [1987], s. 3-9.

³ Emil L. Post w artykule: Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems, „Bulletin of the American Mathematical Society”, t. 50, (1944), s. 295, pisze, że „... nieunikniony jest przynajmniej częściowy odwrót od całego aksjomatycznego prądu końca XIX i początku XX wieku oraz powrót do pojęć znaczenia i prawdy, będących istotą matematyki”. Cytuję za MOSTOWSKI [1948], s. 373.

filozofii języka i filozofii logiki. Zadziwieniem, które legło u jej podstaw jest spostrzeżenie dotyczące pewnej właściwości języka potocznego. Wysłowić je można następująco: Jak jest możliwe porozumienie językowe pomiędzy ludźmi, jeśli w języku potocznym znaczenia wyrażen są tak nieprecyzyjne? W szczególności jeśli chodzi o znaczenie, jak się wydaje, tak prostego tworu językowego jakim jest okres warunkowy. Wynik pracy jest zasadniczo negatywny. Stwierdza on, że przy pewnych założeniach i w niektórych sytuacjach koniecznym jest świadome sprecyzowanie znaczenia zwrotu "jeżeli..., to ...", jednak uczynienie tego do końca nie jest możliwe. Główny, filozoficzny wynik tej pracy posiada, jak się wydaje, mocne uzasadnienie w postaci formalnych faktów.

Trawestując znane powiedzenie filozofa można wyrazić metodę niniejszej pracy w następującym sformułowaniu: z powrotem do faktów. Faktami o które nam chodzi, są wyniki nauk szczegółowych, w szczególności wyniki matematyki i logiki - wyniki formalne, co należy podkreślić z całą mocą. Przez wynik formalny rozumiemy będziemy konsekwentnie twierdzenia wyrażone w postaci warunkowej, z dokładniami i jednoznacznie wymienionym przesłankami. Dlatego właśnie ta praca rozpoczyna się od przytoczenia faktów mentalnych stwierdzonych przez specjalistów pracujących na terenie logiki formalnej. Te fakty stały się podstawą do poprowadzenia refleksji filozoficznej. Wydaje się, że współczesna logika jest dziedziną dysponującą całym mnóstwem niezwykle interesujących faktów "empirycznych" o charakterze umysłowym. Objęcie ich całościową refleksją filozoficzną wydaje się czymś pożądanym i wysoce obiecującym. W niniejszej pracy jedna z formalnych koncepcji, dokładnie logiki porządku, stała się ową podstawą dla wyciągnięcia wniosków filozoficznych.

Pierwszy rozdział pracy przedstawia alternatywne, wobec logik porządku, ujęcia znaczenia spójników zdaniowych. Oparłem się w nim głównie na wynikach Witolda A. Pogorzelskiego i J. Słupeckiego oraz R. Suszki. Rozdział ten nie pretenduje w żadnym wypadku do kompletności w przedstawie-

niu tego zagadnienia w literaturze przedmiotu.⁴ Koncepcje powyższych Autorów zostały dobrane specjalnie ze względu na formalne pokrewieństwo ujęcia podstawowego problemu. Rozdziały drugi i trzeci prezentują koncepcję logik porządku, stworzoną przez Jacka K. Kabzińskiego. W rozdziale drugim podano definicje logik bazowych, w szczególności bazowej konsekwencji spójnika porządku, wyznaczających interesującą nas klasę logik porządku, wraz z twierdzeniami o pełności dla tych logik. W oryginalnej pracy Kabzińskiego znajduje się zarys dowodu twierdzenia o pełności jedynie dla bazowej konsekwencji spójnika porządku. Rozdział trzeci, centralny od strony formalnej dla niniejszej rozprawy, przedstawia różnorodne fakty opisujące kratę logik porządku, w szczególności kratę logik implikacyjnych.⁵ Należy podkreślić, że cała koncepcja logik porządku pochodzi od Jacka K. Kabzińskiego. Główny filozoficzny spostrzeżenie tej pracy zawarte jest w rozdziale czwartym. Ten filozoficzny rozdział omawia, występujące w tytule rozprawy, zagadnienie pewności językowej. Kluczową rolę pełni w nim teza (T). W zakończeniu proponuję kierunkowe rozwiązanie zagadnienia postawionego powyżej, które dało asumpt do podjęcia tych rozważań. Pragnę w tym miejscu złożyć serdeczne podziękowania Księdzu Profesorowi Michałowi Hellerowi, mojemu Promotorowi, za troskliwą i życzliwą opiekę nad pracą doktorską. Dziękuję również za to, że w swojej pracy naukowej zawsze mogłem liczyć na Jego nieocenioną pomoc. Dziękuję także Docentowi Jackowi K. Kabzińskiemu za udostępnienie mi maszynopisu swej nieopublikowanej pracy zawierającej oryginalną koncepcję logik porządku oraz za zainteresowanie mnie tą tematyką i ukazanie jej piękna.

Niniejsza publikacja różni się od oryginalnej pracy doktorskiej. Dokonano tutaj wielu skróceń. Główny nacisk położono na stronę filozoficzną pracy, pominięto dowody wszyst-

⁴ świadomie pominięto cały współczesny trend określania znaczenia spójników zdaniowych za pomocą systemów dedukcji naturalnej. Klasyczne tutaj prace PRAWITZ [1977] oraz przeglądowa SUNDHOLM [1986] i [1983], odwołują się do koncepcji Gentzena [1934].

⁵ dowody faktów i twierdzeń zostały w niniejszej publikacji pominięte.

kich twierdzeń, które znalazły się w pracy doktorskiej. Starano się również, w miarę możliwości, zredukować w maksymalnym stopniu zbędne fragmenty o charakterze formalnologicznym.

Elementarne definicje pojawiające się szczególnie w pierwszym rozdziale mają za zadanie pomóc ewentualnemu Czytelnikowi i uczynić tę publikację samowystarczalną.

ROZDZIAŁ PIERWSZY

Formalizacja jest zabiegiem intelektualnym, dzięki któremu niejasne do końca pojęcia umysłu nabierają konkretnej i jednoznacznej treści w pewnym intersubiektywnie zrozumiałym języku. Naturalnie to określenie formalizacji nie jest jej definicją ostateczną. Pokazuje ono pewien proces, który "przenosi" treści z "wnętrza" umysłu do powszechnie zrozumiałego języka. Ów proces jest próbą uchwycenia znaczenia niektórych pojęć. Intuicyjnie posiadamy rozumienie spójników zdaniowych. Jednym z głównych zadań logiki, a w szczególności logiki formalnej jest podanie znaczenia owych spójników. Rozdział niniejszy ma za zadanie zarysować główne kierunki formalnego przedstawiania sensu spójników zdaniowych w rachunku zdaniowym i jego metateorii. Na początku przedstawimy najczęstszy sposób prezentacji podstawowych pojęć rachunku zdań. W symbolice i ujęciu trzymamy się głównie pracy Ryszarda Wójcickiego "Lectures on propositional calculi"⁶.

V - przeliczalny nieskończony zbiór zmiennych zdaniowych o postaci $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$.

S - zbiór wyrażeń zbudowanych za pomocą zmiennych zdaniowych i spójników zdaniowych $F_1, \dots, F_n$, z których każdy ma $n \geq 0$ argumentów.

Język zdaniowy zapisany jako algebra abstrakcyjna

$$\mathcal{A} = (S, F_1, \dots, F_n)$$

jest algebrą absolutnie wolną w klasie wszystkich algebr podobnych, wolno generowaną przez zbiór V.

Typem algebry nazywamy uporządkowaną n -tkę, $(k_1, \dots, k_n)$, gdzie każde k_i jest skończoną liczbą naturalną przedstawiającą argumentowość odpowiedniego spójnika zdaniowego.

Język zdaniowy jest teorią rzędu 0.

⁶ WÓJCICKI [1984].

Język zdaniowy określony za pomocą przeliczalnego zbioru zmiennych zdaniowych V i spójników zdaniowych $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$, nazywać będziemy standardowym i oznaczamy symbolem $\mathcal{L}$, zaś zbiór jego formuł przez L . Typem algebry $\mathcal{L}$ jest $(2, 2, 2, 1)$, w kolejności spójników zapisanych jak powyżej.

W sposób standardowy definiujemy podstawienia jako endomorfizmy danego języka. Oznaczać je będziemy symbolem e . Dla dowolnego $\alpha \in S$, $e(\alpha)$ będziemy również nazywać podstawieniami.

Symbolem $Sb(X)$ oznaczać będziemy podstawienia wszystkich formuł należących do zbioru X . Gdy $X = Sb(X)$, to zbiór X nazywać będziemy inwariantnym.

Tradycyjne rozumienie logiki zdaniowej wywodzące się od Fregego i Hilberta polegało na podaniu zbioru pewnych tez jako aksjomatów teorii i dodatkowo zbioru reguł inferencyjnych za pomocą których, ze zbioru aksjomatów danego rachunku wyprowadzano wszystkie inne tezy tego rachunku. Współczesne pojęcie logiki zdaniowej, szczególnie przydatne w badaniach metateoretycznych ujmuje logikę zdaniową raczej jako zbiór reguł inferencyjnych. Przedstawimy je za pracą WÓJCICKI [1984].⁷

Przez logikę zdaniową będziemy rozumieć parę uporządkowaną $(\mathcal{L}, C)$, gdzie $\mathcal{L}$ jest językiem zdaniowym zaś C strukturalną operacją konsekwencji określoną w języku $\mathcal{L}$. Gdy C nie jest strukturalna, to ową parę będziemy nazywać rachunkiem zdaniowym.

Zdefiniujemy obecnie operację konsekwencji określoną w języku $\mathcal{L}$. Jest to kluczowe pojęcie niniejszego rozdziału. Pochodzi ono od Alfreda Tarskiego.⁸

Operacja $C: 2^S \rightarrow 2^S$, określona na zbiorach formuł języka $\mathcal{L}$ nazywa się operacją konsekwencji, gdy spełnione są następujące aksjomaty:

- (T1) $X \subseteq C(X)$,
- (T2) $C(C(X)) \subseteq C(X)$,
- (T3) jeśli $X \subseteq Y$ to $C(X) \subseteq C(Y)$.

⁷ por. WÓJCICKI [1984], ss. 17-18.

⁸ por. TARSKI [1930], [1930a].

Zbiór wszystkich konsekwencji dla danego języka tworzy kratę zupełną, względem następującego porządku: napiszemy $C_1 \leq C_2$ i będziemy czytać: konsekwencja C_1 jest słabsza od konsekwencji C_2 wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $X \subseteq S$, $C(X) \subseteq C_2(X)$. Gdy dodatkowo spełnione są powyższe warunki i $C(X) \neq C_2(X)$, powiemy, że konsekwencja C_1 jest istotnie słabsza od konsekwencji C_2 . W tej kracie elementem najmniejszym jest konsekwencja określona następującym warunkiem:⁹

$Id(X) = X$ (idle consequence),

zaś elementem największym konsekwencja zwana sprzeczną, oznaczana S , tym samym symbolem co zbiór wszystkich poprawnie zbudowanych formuł:

$S(X) = S$.

Za pracą ŁOŚ-SUSZKO [1958] ze względu na to, iż dla języków zdaniowych klasa wszystkich endomorfizmów języka $\mathcal{L}$ jest równa klasie wszystkich podstawień, operację konsekwencji nazwiemy strukturalną, gdy dla dowolnego podstawienia e ,

(T4) $eC(X) \subseteq C(eX)$.

Para o postaci $(C_0, \leq)$, jest to zbiór wszystkich konsekwencji strukturalnych określonych w danym języku $\mathcal{L}$ wraz z porządkiem $\leq$.

$(C_0, \leq)$ jest zupełną podkratą kraty wszystkich konsekwencji języka $\mathcal{L}$.

Operacja konsekwencji nazywa się finitystyczną wtw spełniony jest następujący warunek:

jeśli $\alpha \in C(X)$, to $\alpha \in C(Y)$, dla pewnego $Y \in FinX$, gdzie $FinX$ oznacza rodzinę skończonych podzbiorów zbioru X .

Interesującą rzeczą z punktu widzenia filozofii logiki jest fakt, iż formalizacje niektórych pojęć są możliwe na różne sposoby, za pomocą których to sposobów określony jest pewien przedmiot formalizowany. Ów przedmiot formalizowany jest czymś różnym od skutku formalizacji, którym jest zazwyczaj jakiś przedmiot matematyczny, jak np. funkcja czy relacja. Pokażemy to na przykładzie operacji konsekwencji.

⁹ por. WÓJCICKI [1984], s. 27.

Niech $R \subseteq 2^S \times S$ i będzie nazywana relacją inferencji, o następujących własnościach:

- (I1) jeśli $\alpha \in X \subseteq S$, to $(X, \alpha) \in R$,
- (I2) jeśli $X \subseteq Y \subseteq S$ i $(X, \alpha) \in R$ to $(Y, \alpha) \in R$,
- (I3) jeśli $(X, \alpha) \in R$ i $(Y \cup \{\alpha\}, \beta) \in R$ to $(X \cup Y, \beta) \in R$.

Mając daną relację R określoną w języku $\mathcal{L}$ łatwo możemy uzyskać operację konsekwencji za pomocą następującej definicji:

$C_R(X) = \text{df } \{\alpha : (X, \alpha) \in R\}$, litera R przy symbolu C_R wskazuje na pochodzenie tej operacji.

Rodzinę podzbiorów D zbioru formuł języka $\mathcal{L}$ nazwiemy systemem domknięć jeśli spełnia następujące warunki:

- (D1) $D \subseteq 2^S$ i $S \in D$,
- (D2) jeśli $\emptyset \neq X \subseteq D$, to $\cap X \in D$,
- (D3) $S = \text{df } \cap \emptyset$

Wtedy operację konsekwencji uzyskamy definiując jak następuje:

$$C_D(X) = \cap \{Y \in D : X \subseteq Y\}.$$

Powracając do naszego wcześniejszego spostrzeżenia, jak widać z powyższych trzech definicji, intuicyjne rozumienie konsekwencji można scharakteryzować na trzy różne sposoby, to znaczy, za pomocą trzech różnych przedmiotów matematycznych:

- a. za pomocą operacji określonej na przestrzeni podzbiorów zbioru wyrażeń języka,
- b. za pomocą relacji zawierającej się w produkcie $2^S \times S$,
- c. za pomocą rodziny podzbiorów zbioru S .

Zupełnie podobną sytuację spotykamy w wypadku konstrukcji zbioru liczb rzeczywistych:

- a. za pomocą przekrojów Dedekinda,
- b. za pomocą ciągów Cantora.

Zagadnienie to wiąże się jedynie ubocznie z głównym przedmiotem naszych rozważań. Trzeba jednak podkreślić, że powyższe uwagi opierają się na filozoficznej krytyce definicji

prawdy Tarskiego¹⁰ i na spostrzeżeniu, iż przedmiot opisywany w dowolnym języku, zarówno naturalnym jak i sztucznym jest czymś istotnie bogatszym od samego języka.

Po tej krótkiej refleksji powróćmy do dalszych definicji.

Inferencją w języku $\mathcal{L}$ nazywać będziemy parę uporządkowaną (X, α) taką, że $X \subseteq S$ i $\alpha \in S$, którą zapisywać będziemy również $X \vdash \alpha$. Inferencja nazywa się aksjomatyczną jeśli X jest zbiorem pustym, zaś finitystyczną jeśli X jest zbiorem skończonym. Jeśli $\alpha \in C(X)$, to inferencja $X \vdash \alpha$ będzie nazywana poprawną w C , zaś zbiór wszystkich inferencji poprawnych w C nazywać będziemy relacją konsekwencji odpowiadającą operacji konsekwencji C i oznaczać symbolem $\vdash_C$.

Jeśli $\alpha \in C(\emptyset)$, to $\vdash \alpha$ nazywać będziemy tezą C .

Ponieważ zbiór wszystkich inferencji poprawnych w C jest bardzo obszerny, zdefiniujemy wyrażenie "reguła inferencyjna". Jest to termin należący do opisu syntaktycznego języka formalnego. Potocznie za Wójcickim¹¹ powiemy, że reguła inferencyjna jest to zbiór instrukcji o postaci:

mając dany zbiór wyrażeń X o danej strukturalnej postaci, mamy również wyrażenie o postaci strukturalnej α , czyli odwołując się do naszych wcześniejszych ustaleń $X \vdash \alpha$.

Zatem reguła inferencyjna r jest to pewien zbiór inferencji $X \vdash \alpha$. Jeśli wszystkie inferencje należące do r są finitystyczne, to r będziemy nazywać finitystyczną, zaś gdy są one aksjomatyczne, to r nazwiemy aksjomatyczną. Gdy do r należą wszystkie podstawienia inferencji należących do r , to r nazywamy strukturalną. Reguły, które można przedstawić w postaci ogólnego schematu, takiego, że każda inferencja jest podstawieniem schematu, nazwiemy schematycznymi. Każda reguła strukturalna jest sumą mnogościową reguł schematycznych.

Regułę inferencji oznaczaną r_0 o schemacie:

$$r_0 = \{(\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha\}, \beta) : \text{dla } \alpha, \beta \in L\},$$

nazywać będziemy regułą odrywania lub modus ponens.

¹⁰ por. ETCHEMENDY [1990], szczególnie rozdział drugi i czwarty; por. również ETCHEMENDY [1988], szczególnie s. 61.

¹¹ por. WÓJCICKI [1984], s. 39.

Regułę r nazwiemy regułą C , gdy dla dowolnego X i dowolnego α , jeśli $(X, \alpha) \in r$, to $\alpha \in C(X)$.

Zauważymy, że tradycyjne ujęcie logiki utożsamiające logikę ze zbiorem jej tez jest znacznie węższe od współczesnego ujęcia logiki, jak pokaże to następujący przykład pochodzący od Hiż¹². Weźmy fragment języka $\mathcal{L}$, w którym dysponujemy następującym zbiorem spójników $\{\rightarrow, \neg\}$ oraz następujące schematy reguł inferencyjnych:

- (H1) $\vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha$,
- (H2) $\vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\beta$,
- (H3) $\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma$,
- (H4) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \alpha \rightarrow \beta \vdash \alpha \rightarrow \gamma$,
- (H5) $\neg\alpha \rightarrow \beta, \neg\alpha \rightarrow \neg\beta \vdash \alpha$.

Okazuje się, że powyższa logika, oznaczana dalej przez K_h , ma następujące własności:¹³

(a) $K_h(\emptyset) = K(\emptyset)$, gdzie K oznacza konsekwencję logiki klasycznej w tym samym języku co K_h ,

(b) reguła odrywania nie jest regułą K_h , zatem konsekwencja K_h jest istotnie słabsza od konsekwencji klasycznej K .

Powyższy przykład pokazuje, że jak powiedział Hiż w rozmowie, którą przytacza Suszko¹⁴ „opinia, czasami wyrażana, że semantycznie pełny system tautologii tworzy wystarczającą charakterystykę poprawnych inferencji zdaniowych, okazała się być nieusprawiedliwiona”. Jest to bardzo ciekawe spostrzeżenie, wyrażające ten naturalny pogląd, iż decydujące znaczenie posiadają sposoby uznawania jednych zdań na podstawie innych nie zaś zbiór zdań uznanych za prawdziwe.

W ten sposób przygotowani powrócimy do głównego przedmiotu niniejszego rozdziału, którym jest przedstawienie niektórych sposobów uchwytowania sensu spójników zdaniowych za pomocą metod formalnych.

¹² por. HIŻ [1959].

¹³ por. WÓJCICKI [1984], s. 43.

¹⁴ por. SUSZKO [1961], s. 204.

Pierwsze ujęcie pochodzi od Alfreda Tarskiego¹⁵ oraz Pogorzelskiego i Słupeckiego¹⁶; było ono rozwijane przez Grzegorzycę¹⁷.

Wypowiadając rzecz najogólniej, chodzi o charakterystykę spójników zdaniowych za pomocą operacji konsekwencji. Symbolika, którą się będziemy posługiwać, zostanie nieco zmieniona tak, by ją ujednolicić z wcześniej wprowadzoną w niniejszej pracy.

Za Tarskim¹⁸ wyjaśnimy różnicę pomiędzy wyrażeniami "teoria dedukcyjna" oraz "system dedukcyjny". System dedukcyjny jest to, według Tarskiego, model czy też realizacja systemu aksjomatycznego, który zostanie przedstawiony poniżej i który w swej najogólniejszej wersji nazywać będziemy teorią T , zaś teoria dedukcyjna to poniższa teoria T i jej wzmocnienia aksjomatyczne.

System dedukcyjny X , będący zbiorem formuł języka $\mathcal{L}$ definiujemy za Tarskim warunkiem $C(X) = X$, czyli jest to zbiór formuł zadanego języka domknięty ze względu na operację konsekwencji C .

Terminy pierwotne teorii T :

S - zbiór zdań pewnego języka,

C - operacja konsekwencji określona w 2^S ,

$\alpha, \beta, \gamma, \dots$ - zmienne metajęzykowe przebiegające zbiór S zdań języka,

$X, Y, Z, \dots$ - zmienne przebiegające zbiór 2^S ,

$\rightarrow, \wedge, \vee, \neg, =$ - metajęzykowe spójniki zdaniowe.

Oba powyższe zbiory zmiennych są przeliczalne.

$\text{Fin}X$ - rodzina wszystkich skończonych podzbiorów X .

¹⁵ por. TARSKI [1930], [1930a]; obie te prace w zbiorze TARSKI [1956], kolejno ss. 30-37 oraz ss. 60-109. W dalszym ciągu pracy będziemy przywoływać strony pracy TARSKI [1956].

¹⁶ por. POGORZELSKI-SŁUPECKI [1960], [1960a]. Również praca POGORZELSKI [1962].

¹⁷ por. GRZEGORCZYK [1972].

¹⁸ por. TARSKI [1956], s. 33 oraz ss. 69-70.

Aksjomaty teorii T:¹⁹

- (A1) moc zbioru S jest skończona lub przeliczalna,
- (A2) $X \subseteq C(X) \subseteq S$,
- (A3) $C(C(X)) = C(X)$,
- (A4) jeśli $X \subseteq Y$ to $C(X) \subseteq C(Y)$,
- (A5) jeśli $\alpha \in C(X)$ to istnieje taki zbiór $Y \in \text{Fin}X$, taki, że $\alpha \in C(Y)$.

W pracy TARSKI [1930] powyższy układ aksjomatów został wzmocniony do następującego układu T* : Dodajemy aksjomaty:

- (A6*) $\alpha \rightarrow \beta, \neg \alpha \in S$,
- (A7*) $\alpha \rightarrow \beta \in C(X)$ wtw²⁰, gdy $\beta \in C(X \cup \{\alpha\})$,
- (A8*) $C(\alpha, \neg \alpha) = S$,
- (A9*) $C(\alpha) \cap C(\neg \alpha) = C(\emptyset)$.

W dalszej części pracy POGORZELSKI-SŁUPECKI [1960], zostały zbudowane adekwatne systemy aksjomatów dla nieklasycznych lub fragmentarycznych rachunków zdaniowych.

Najpierw z lewej strony podamy nazwę rachunku zdaniowego, a z prawej adekwatny dla niego system aksjomatów:²¹

1. Logika pozytywna - A6* (skreślamy $\neg \alpha$), A7* ,
2. Dwuwartościowy implikacyjny rachunek zdań - A6* (bez $\neg \alpha$), A7* i $C(\alpha) \cap C(\alpha \rightarrow \beta) = C(\emptyset)$
3. Dwuwartościowy rachunek zdań o terminach pierwotnych implikacji i fałsum - w A6* " $\neg \alpha \in S$ " zamieniamy na " $0 \in S$ ", $C(\alpha) \cap C(\alpha \rightarrow \beta) = C(\emptyset)$ oraz $C(0) = S$,
4. Logika intuicjonistyczna -
 - A6ⁱ $\alpha \rightarrow \beta, \neg \alpha, \alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta \in S$,
 - A7ⁱ $\alpha \rightarrow \beta \in C(X)$ wtw $\beta \in C(X \cup \{\alpha\})$,
 - A8ⁱ $\neg \alpha \in C(X)$ wtw $C(X \cup \{\alpha\}) = S$,

¹⁹ referuję za pracą POGORZELSKI-SŁUPECKI [1960].

²⁰ od tego miejsca, w dalszym ciągu całej pracy na zwrot „wtedy i tylko wtedy, gdy”, będziemy używali często stosowanego skrótu „wtw”.

²¹ por. POGORZELSKI-SŁUPECKI [1960], ss. 165-169.

A9ⁱ $\alpha \wedge \beta \in C(X)$ wtw $\alpha, \beta \in C(X)$,

A10ⁱ $C(\alpha) \cap C(\beta) = C(\alpha \vee \beta)$,

5. Logika minimalna Johannsona - A6ⁱ, A7ⁱ, A9ⁱ oraz

- a) jeśli $\neg \beta \in C(X \cup \{\alpha\})$, to $\neg \alpha \in C(X \cup \{\beta\})$,
- b) jeśli $\alpha \in C(X)$ lub $\beta \in C(X)$, to $\alpha \vee \beta \in C(X)$,
- c) jeśli $\alpha \vee \beta, \alpha \rightarrow \gamma, \beta \rightarrow \gamma \in C(X)$, to $\gamma \in C(X)$

6. System S5 Lewisa z terminami pierwotnymi implikacji ścisłej, negacji i koniunkcji – ze względu na wieloznaczność terminu S5²² przytoczymy określenie tego rachunku za POGORZELSKI-SŁUPECKI [1960], które pochodzi źródłowo z pracy LEMMON i inni [1957].²³

Język: p, q, r, ... zmienne zdaniowe,

spójniki zdaniowe $\Rightarrow$ (implikacja ścisła), $\wedge$ (koniunkcja), $\neg$ (negacja), reguły inferencji to reguła odrywania i podstawiania.

Aksjomaty:

1. $q \Rightarrow (p \Rightarrow p)$,
2. $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow r] \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$,
3. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$,
4. $p \wedge q \Rightarrow p$,
5. $p \wedge q \Rightarrow q$,
6. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)]$,
7. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$,
8. $p \Rightarrow \neg \neg p$,
9. $\neg \neg p \Rightarrow p$,
10. $p \wedge \neg (p \wedge \neg q) \Rightarrow q$.

Definicja pomocnicza: $\alpha \in S^*$ wtw istnieją takie β, γ że,

$\alpha = \beta \rightarrow \gamma$,

A6ⁱ $\alpha \rightarrow \beta, \alpha \wedge \beta, \neg \alpha \in S$,

A7ⁱ a. jeśli $\alpha \rightarrow \beta \in C(X)$, to $\beta \in C(X \cup \{\alpha\})$,

b. jeśli $X \subseteq S^*$ to, jeśli $\beta \in C(X \cup \{\alpha\})$, to $\alpha \rightarrow \beta \in C(X)$,

A8ⁱ $C(\alpha, \neg \alpha) = S$,

A9ⁱ jeśli $\alpha \in S^*$, to $C(\alpha) \cap C(\alpha \rightarrow \beta) = C(\emptyset)$,

A10ⁱ $\alpha \wedge \beta \in C(X)$ wtw $\alpha, \beta \in C(X)$,

²² por. POGORZELSKI-WOJTYŁAK [1982], ss. 45-46.

²³ por. POGORZELSKI-SŁUPECKI [1960], s. 167.

A11¹ jeśli $C(X \cup \{\neg\alpha\}) = S$, to $\alpha \in C(X)$.

7. Logika trójwartościowa Łukasiewicza, implikacyjno-negacyjna:

A6³ $\alpha \rightarrow \beta, \neg\alpha \in S$,

A7³ a. jeśli $\alpha \notin X$, to, jeśli $\alpha \rightarrow \beta \in C(X)$
to $\beta \in C(X \cup \{\alpha\})$,

b. jeśli $\beta \in C(X \cup \{\alpha\})$, to $\alpha \rightarrow \beta \in C(X)$,

A8³ jeśli $\neg\alpha \notin X$, to, jeśli $\neg\alpha \in C(X \cup \{\alpha\})$
to $\beta \in C(X \cup \{\alpha\})$,

A9³ $C(\alpha) \cap C(\alpha \rightarrow \neg\alpha) = C(\emptyset)$.

8. Logika dwuwartościowa z terminem pierwotnym równoważności -

A6^R $\alpha \equiv \beta \in S$,

A7^R $\alpha \equiv \beta \in C(X)$ wtw ($\alpha \in C(X)$ wtw $\beta \in C(X)$).

W pracy Pogorzelskiego²⁴ przedstawione zostało mocniejsze ujęcie odpowiedniości pomiędzy teorią systemów dedukcyjnych, a danym rachunkiem zdaniowym, w postaci relacji silnej adekwatności. Nie będziemy go tutaj przytaczać, uczynimy natomiast następującą uwagę: adekwatność zwana przez Pogorzelskiego²⁵ słabą adekwatnością dla odróżnienia od silnej adekwatności wobec danego systemu dedukcyjnego, tym się różni od tej drugiej, że wedle słabej adekwatności teoria odpowiada konsekwencji w danym rachunku zdaniowym zasadniczo jedynie na zbiorze pustym, zaś teoria jest mocno adekwatna gdy, w danym rachunku zdaniowym, odpowiada konsekwencji określonej dla dowolnego podzbioru formuł $X \subseteq S$.

Tarski sformułował następujące warunki charakteryzujące podstawowe spójniki zdaniowe dla logiki klasycznej, które przytaczamy za POGORZELSKI-WOJTYŁAK [1982]:

Dla dowolnego $X \subseteq L$ oraz dowolnych $\alpha, \beta \in L$;
gdzie $C(r_0, Sb(A_2) \cup X)$ zapiszemy w skrócie $C(X)$.

(i) $\alpha \rightarrow \beta \in C(X)$ wtw $\beta \in C(X \cup \{\alpha\})$,

(ii) $C(X \cup \{\alpha \wedge \beta\}) = C(X \cup \{\alpha, \beta\})$,

(iii) $C(X \cup \{\alpha \vee \beta\}) = C(X \cup \{\alpha\}) \cap C(X \cup \{\beta\})$,

(iv) $\neg\alpha \in C(X)$ wtw $C(X \cup \{\alpha\}) = L$,

(v) $\alpha \in C(X)$ wtw $C(X \cup \{\neg\alpha\}) = L$.

W powyższych wzorach A_2 oznacza zbiór aksjomatów dwuwartościowego rachunku zdań, zaś poniżej A_1 oznacza zbiór aksjomatów logiki intuicjonistycznej.

Dla logiki intuicjonistycznej wyglądają one następująco²⁶:

(i') $\alpha \rightarrow \beta \in C_i(X)$ wtw $C_i(X \cup \{\beta\}) \subseteq C_i(X \cup \{\alpha\})$,

(ii') $\alpha \wedge \beta \in C_i(X)$ wtw $C_i(X \cup \{\alpha\}) \cap C_i(X \cup \{\beta\}) \subseteq C_i(X)$,

(iii') $\alpha \vee \beta \in C_i(X)$ wtw $C_i(X \cup \{\alpha\}) \cup C_i(X \cup \{\beta\}) \subseteq C_i(X)$,

(iv') $\neg\alpha \in C_i(X)$ wtw $L \subseteq C_i(X \cup \{\alpha\})$.

Grzegorzczuk w swoim artykule²⁷ przytaczając podobne definicje dla logiki intuicjonistycznej, i rozszerzając je dla rachunku kwantyfikatorów, wspomina o tym, że dany język formalny może posiadać np. różne implikacje, negacje, koniunkcje lub alternatywy.²⁸

Starannie odróżniając język rachunku zdań od języka teorii systemów dedukcyjnych twierdzi, iż definicje te pochodzą z doświadczeń dedukcyjnych logików²⁹. Dalej, wypowiada swe przekonanie, że trudno nazwać jakiś spójnik zdaniowy implikacją jeśli nie spełnia warunku analogicznego do warunku (i) z powyższej listy dla logiki klasycznej, zamieniając w wypadku logiki intuicjonistycznej A_2 na A_1 . To samo wg. jego przekonania zachodzi, mutatis mutandis, dla innych spójników zdaniowych.

Zakończyliśmy tym samą prezentację określenia sensu spójników zdaniowych za pomocą operacji konsekwencji.

Obecnie przejdziemy do zaprezentowania wybranych określeń znaczenia spójników zdaniowych za pomocą metod semantycznych. Skupimy swą uwagę jedynie na tej części rozważań semantycznych, które używają metody wartościowań prawdziwościowych.

Metoda wartościowań prawdziwościowych jest historycznie pierwszym sposobem charakterystyki spójników zda-

²⁴ por. POGORZELSKI [1962], ss. 109-115.

²⁵ por. POGORZELSKI [1962], s. 110.

²⁶ por. POGORZELSKI, WOJTYŁAK [1982], s. 40.

²⁷ por. GRZEGORCZYK [1972], s. 34.

²⁸ por. GRZEGORCZYK [1972], s. 34.

²⁹ por. GRZEGORCZYK [1972], s. 34.

niowych dla logiki klasycznej. Przytoczymy ją tutaj dla przypomnienia i porównania z innymi charakteryzacjami dla logik nieklasycznych.

Niech funkcja $v:L \rightarrow \{0,1\}$ nazywa się wartościowaniem prawdziwościowym zbioru formuł L , według następujących zasad dla dowolnych $\alpha, \beta \in L$:

- (i) $v(\neg\alpha) = 1$ wtw $v(\alpha) = 0$,
- (ii) $v(\alpha \rightarrow \beta) = 0$ wtw $v(\alpha) = 1$ i $v(\beta) = 0$,
- (iii) $v(\alpha \vee \beta) = 0$ wtw $v(\alpha) = 0$ i $v(\beta) = 0$,
- (iv) $v(\alpha \wedge \beta) = 1$ wtw $v(\alpha) = 1$ i $v(\beta) = 1$.

Pojęcie wartościowania można rozszerzyć dla dowolnego języka zdaniowego J .

Mając daną inferencję o postaci $X \vdash \alpha$ powiemy, że dane wartościowanie v spełnia tę inferencję, jeśli $v(\alpha) = 1$, lub $v(\beta) = 0$ dla pewnego $\beta \in X$. Wartościowanie v spełnia zbiór X , gdy $v(\alpha) = 1$, dla każdego $\alpha \in X$. Gdy dla pewnego $\alpha \in X$, $v(\alpha) = 0$, to powiemy, że wartościowanie v nie spełnia zbioru $X \subseteq S$.³⁰

TWIERDZENIE³¹ Dla każdego zbioru wartościowań prawdziwościowych H dla języka J , operacja Cn_H określona dla dowolnego $X \subseteq S$ zdefiniowana następująco,

$\alpha \in Cn_H(X)$ wtw każde $v \in H$ spełnia $X \vdash \alpha$,

jest operacją konsekwencji.

Taka konsekwencja nazywać się będzie konsekwencją określoną przez zbiór wartościowań H .

Zupełnie naturalnie rozwój badań semantycznych charakteryzujących większość znanych logik poszedł w kierunku badań matrycowych. Nurt ten pojawił się w związku z podstawami semantyki naukowej ugruntowanej przez Alfreda Tarskiego.

Jeśli dany język zdaniowy $\mathcal{L}$ rozumieć jako algebrę absolutnie wolną w klasie wszystkich algebr podobnych, to przez interpretację języka zdaniowego rozumieć będziemy przyporządkowanie każdej formule $\alpha \in S$ jej znaczenia, czyli korelatu

³⁰ por. WÓJCICKI [1984], s. 77, trzymamy się tutaj symboliki i wyników z tej pracy

³¹ por. WÓJCICKI [1984], s. 77.

semantycznego $in(\alpha)$.³² Interpretacja $in:S \rightarrow I$, przeprowadza zbiór formuł S w zbiór korelatów semantycznych I , przy następujących zastrzeżeniach:³³

F1 każdej formule należącej do S przyporządkowany jest jeden korelat semantyczny,

F2 jeśli dwóm formułom $\alpha, \beta \in S$ przyporządkowano te same korelaty semantyczne to te formuły powinny być zastępowalne w dowolnych kontekstach.

Rozważania powyższych dwóch warunków tych doprowadziły Profesora Suszkę do stworzenia logiki identyczności, do której powrócimy jeszcze w rozdziale drugim.³⁴

Przytoczymy ważny wynik Suszki³⁵:

TWIERDZENIE Jeżeli I jest zbiorem wszystkich korelatów semantycznych formuł języka $\mathcal{L} = (S, F_1, \dots, F_n)$, to dla dowolnego $i=1, \dots, n$ wzór

$$f_i(in(\alpha_1), \dots, in(\alpha_k)) = in(F_i(\alpha_1, \dots, \alpha_k))$$

określa na I funkcję f_i o tej samej liczbie argumentów, jaką ma F_i .

Zatem algebrę podobną do $\mathcal{L}$ o postaci $\mathcal{A} = (I, f_1, \dots, f_n)$ nazwiemy strukturą interpretacyjną, a zbiór I , uniwersum tej struktury. Przykładem takiej struktury jest dwuelementowa algebra Boole'a o postaci $B = (\{0,1\}, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow)$, gdzie działania są określone tabelkami prawdziwościowymi dla logiki klasycznej, zaś algebra B jest strukturą interpretacyjną dla języka standardowego $\mathcal{L}$.

Matrycą logiczną nazywamy parę o postaci³⁶:

$$\mathcal{M} = (\mathcal{A}, D)$$

gdzie $\mathcal{A}$ jest algebrą podobną do języka $\mathcal{L}$, zaś D jest niepustym podzbiorem uniwersum algebry $\mathcal{A}$ zwanym zbiorem

³² por. MALINOWSKI [1990], ss. 35-36.

³³ por. MALINOWSKI [1990], s. 36; OMYŁA [1986], roz. II; FREGE [1970].

³⁴ por. OMYŁA [1986], roz. II.

³⁵ przytaczam to twierdzenie za MALINOWSKI [1990], s. 36; Suszko opublikował je w pracy: Formalna teoria wartości logicznych, „Studia Logica”, 6, ss. 145-230.

³⁶ pojęcie to pochodzi z pracy Łukasiewicza-Tarskiego zatytułowanej „Untersuchungen ueber den Aussagenkalkuel”, Warszawa 1930.

wartości wyróżnionych. Do pewnych badań związanych z macierzami logicznymi powrócimy w dalszych rozdziałach.

Przypomnimy jedynie pojęcie konsekwencji macierzowej pochodzące od Łosia i Suszki.³⁷ Jest to pojęcie pochodzące historycznie od Bolzany, poprzez Tarskiego, który nadał mu przejrzysty sens logiczny definiując pojęcie wynikania logicznego.³⁸ Operację $Cn_{\mathcal{M}} : 2^S \rightarrow 2^S$ nazywać będziemy operacją konsekwencji związaną z macierzą $\mathcal{M}$, gdy dla dowolnego $X \subseteq S$ oraz $\alpha \in S$:

$\alpha \in Cn_{\mathcal{M}}(X)$ wtw dla każdego homomorfizmu $h \in \text{Hom}(\mathcal{L}, \mathcal{D})$, jeśli $h(X) \subseteq D$, to $h\alpha \in D$,

gdzie klasa $\text{Hom}(\mathcal{L}, \mathcal{D})$ oznacza zbiór wszystkich homomorfizmów języka $\mathcal{L}$ w algebrę $\mathcal{D}$. Operacja konsekwencji tak zdefiniowana jest operacją strukturalną.

Jeśli weźmiemy dowolną klasę macierzy $\mathcal{MM}$, taką, że $\mathcal{M} \in \mathcal{MM}$, to

dla dowolnego $X \subseteq S$ i dla dowolnej formuły $\alpha \in S$:

$\alpha \in C_{\mathcal{MM}}(X)$ wtw dla każdej macierzy $\mathcal{M} \in \mathcal{MM}$, $\alpha \in C_{\mathcal{M}}(X)$.

Tak określoną operację konsekwencji nazwiemy operacją konsekwencji wyznaczoną przez klasę macierzy $\mathcal{MM}$.

Klasę macierzy $\mathcal{MM}$ nazwiemy silnie adekwatną dla logiki $(\mathcal{L}, C)$ gdy:

$\alpha \in C(X)$ wtw $\alpha \in C_{\mathcal{MM}}(X)$,

dla dowolnego $X \subseteq S$ oraz $\alpha \in S$, zaś słabo adekwatną, gdy:

$\alpha \in C(\emptyset)$ wtw $\alpha \in C_{\mathcal{MM}}(\emptyset)$.

Podejście via macierze logiczne do zagadnienia sensu spójników zdaniowych ma swoje słabe strony. Najważniejszą z nich wydaje się, zarzut ten wysuwano już przeciwko semantycznej definicji prawdy Tarskiego, że w istocie tego typu semantyka ustala zależności pomiędzy językami, dokładnie algebrami. Założenia, które przyjmujemy uprawiając takie badania, nie odzwierciedlają faktycznej i podstawowej funkcji języka, jaką jest opisywanie rzeczywistości, czy też bytów rzeczywistych, a nie tylko innego języka, na który nakładamy

³⁷ por. ŁOŚ-SUSZKO [1958], s. 181.

³⁸ por. TARSKI [1936], s. 64.

jeszcze dodatkowo tak restrykcyjne ograniczenia jak np. podobieństwo algebr. Czy rzeczywiście jest tak na terenie nauk dedukcyjnych, czy też formalnych, że istnienie bytów ogólnie mówiąc matematycznych wyczerpuje się w języku formalnym? Czy nie jest tak, że semantyka macierzowa dla rachunków zdaniowych, w kwestii ustalania sensów np. spójników zdaniowych, jedynie przesuwaga zagadnienie nie rozwiązując go?³⁹

Profesor Suszko w swoim znakomitym artykule⁴⁰ prezentuje odmienne stanowisko w kwestii określenia znaczenia spójników zdaniowych. Oto jego sformułowanie: "Tak więc, waluacje logiczne i waluacje algebraiczne są funkcjami o całkiem odmiennej naturze pojęciowej".⁴¹ Wyjaśnia swe stanowisko konstruując zbiór funkcji zwanych waluacjami logicznymi⁴² określonymi dla dowolnego języka $\mathcal{L}$ na zbiorze S jego formuł.

Dla danego języka $\mathcal{L}$ i macierzy $\mathcal{M} = (\mathcal{L}, D)$ określimy za Suszką zbiór waluacji logicznych $TV_{\mathcal{M}} = \{t_h : h \in \text{Hom}(\mathcal{L}, \mathcal{D})\}$, gdzie

$t_h(\alpha) = 1$, jeśli $h(\alpha) \in D$ oraz

$t_h(\alpha) = 0$, jeśli $h(\alpha) \notin D$.

Przyjmijmy, że:⁴³

$X \vdash_{\mathcal{M}} \alpha$ czytamy; α wynika semantycznie ze zbioru X wtw $\alpha \in Cn_{\mathcal{M}}(X)$.

Mamy:

$X \vdash_{\mathcal{M}} \alpha$ wtw dla dowolnego $t \in TV_{\mathcal{M}}$, jeśli $t(X) \subseteq \{1\}$, to $t(\alpha) = 1$.

Ze względu na to, że dla dowolnej strukturalnej operacji konsekwencji, istnieje taka klasa macierzy $\mathcal{M}$ logicznych, że $C = Cn_{\mathcal{M}}$, zbiór $TV_{\mathcal{M}}$ można łatwo zdefiniować dla dowolnej operacji konsekwencji. Prowadzi to do bardzo interesującego rezultatu iż dla każdej strukturalnej operacji konsekwencji C

³⁹ por. WÓJCICKI [1984], s. 23.

⁴⁰ por. SUSZKO [1977].

⁴¹ por. SUSZKO [1977], s. 378.

⁴² przedstawiamy to pojęcie za MALINOWSKIM [1990], ss. 83-84.

⁴³ por. TARSKI [1936], s. 64.

istnieje jej charakterystyka za pomocą zbioru wartościowań prawdziwościowych H , określonym powyżej, w taki sposób, że $C = C_{n_H}$, gdzie H jest nazywany zbiorem waluacji dopuszczalnych (admissible).⁴⁴

Analogiczne rozważania prowadzono w latach siedemdziesiątych przez ROUTLEY-MEYER [1976]. W tej pracy uzyskano bardzo ogólne rezultaty, między innymi taki, iż:

"Każda wielowartościowa logika może być wyrażona (reexpressed) jako dwuwartościowa logika intensjonalna."⁴⁵

Można powiedzieć, że semantyki Kripkego w pewnym sensie należą do tej samej linii podejścia do scharakteryzowania spójników logik zdaniowych.⁴⁶

Przytoczmy teraz, dla porównania z poprzednim podejściem do znaczenia spójników zdaniowych, tzn. podejściem Pogorzelskiego i Słupeckiego, rezultat Profesora Suszki. Uczynimy to na przykładzie dwóch logik dla których jest to szczególnie proste, mianowicie dla logiki intuicjonistycznej i logiki trójwartościowej Łukasiewicza.

Weźmy standardowy język zdaniowy $\mathcal{L}$, który jest algebrą absolutnie wolną w klasie wszystkich algebr podobnych o typie $(2,2,2,1)$.⁴⁷ A_i oznacza zbiór aksjomatów logiki intuicjonistycznej zamknięty ze względu na modus ponens. Niech TV będzie zbiorem wszystkich waluacji logicznych t , należących do $\{0,1\}^L$, spełniających następujące warunki, dla dowolnych $\alpha, \beta \in L$:

- (i) $t(\alpha) = 1$ $\alpha \in A_i$,
- (ii) $t(\alpha) = 0$ lub $t(\neg\alpha) = 0$,
- (iii) $t(\alpha \wedge \beta) = 1$ wtw $t(\alpha) = t(\beta) = 1$,
- (iv) $t(\alpha \vee \beta) = 0$ wtw $t(\alpha) = t(\beta) = 0$,
- (v) $t(\alpha \rightarrow \beta) = 0$ lub $t(\alpha) = 0$ lub $t(\beta) = 1$,
- (vi) $t(\alpha \equiv \beta) = 1$ wtw $t(\alpha \rightarrow \beta) = t(\beta \rightarrow \alpha) = 1$.

⁴⁴ por. np. WÓJCICKI [1984], s. 78 i następne, gdzie powyższe wyniki są przedstawione w sposób techniczny, wraz z dowodami.

⁴⁵ ROUTLEY-MEYER [1976], s. 363.

⁴⁶ por. WÓJCICKI [1984], s. 77 i następne.

⁴⁷ por. SUSZKO [1974], ss. 20-21.

Zasadniczo spójnik " $\equiv$ " nie należy do języka standardowego, ponieważ rozumiany jest następująco $\alpha \equiv \beta =_{df} (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$.

Intuicjonistyczna relacja konsekwencji jest zdefiniowana następująco dla dowolnego $X \subseteq S$:⁴⁸

$X \vdash_c \alpha$ wtw α należy do każdej teorii nad X .

Podobnie zreferujemy znaczenia spójników zdaniowych logiki trójwartościowej Łukasiewicza. Język jest algebrą absolutnie wolną w klasie algebr podobnych o typie $(2,1)$, reprezentujących argumentowość kolejno implikacji i negacji. Język oznaczamy symbolem $\mathcal{L}_3$, zaś zbiór jego formuł symbolem L_3 . Weźmy zbiór TV_3 wszystkich funkcji $t: L_3 \rightarrow \{0,1\}$, takich, że dla dowolnych $\alpha, \beta \in L_3$ spełnione są następujące warunki:⁴⁹

- (i) $t(\alpha) = 0$ albo $t(\neg\alpha) = 0$,
- (ii) jeśli $t(\beta) = 1$, to $t(\alpha \rightarrow \beta) = 1$,
- (iii) jeśli $t(\alpha) = 1$ oraz $t(\beta) = 0$, to $t(\alpha \rightarrow \beta) = 0$,
- (iv) jeśli $t(\alpha) = t(\beta)$ oraz $t(\neg\alpha) = t(\neg\beta)$, to $t(\alpha \rightarrow \beta) = 0$,
- (v) jeśli $t(\alpha) = t(\beta) = 0$ oraz $t(\neg\alpha) \neq t(\neg\beta)$, to $t(\alpha \rightarrow \beta) = t(\neg\alpha)$,
- (vi) jeśli $t(\neg\alpha) = 0$, to $t(\neg\neg\alpha) = t(\alpha)$,
- (vii) jeśli $t(\alpha) = 1$ oraz $t(\beta) = 0$, to $t(\neg(\alpha \rightarrow \beta)) = t(\neg\beta)$,
- (viii) jeśli $t(\alpha) = t(\neg\alpha) = t(\beta)$ oraz $t(\neg\beta) = 1$, to $t(\neg(\alpha \rightarrow \beta)) = 0$.

Na koniec tego rozdziału poczynione zostaną filozoficzne, krytyczne uwagi w stosunku do dwóch przedstawionych tutaj koncepcji formalnego uchwycenia sensu spójników zdaniowych.

Obie koncepcje posiadają, jak się wydaje braki o charakterze metodologicznym. Mianowicie w ujęciu Pogorzelskiego i Słupeckiego warunki konsekwencyjne nałożone na spójniki, tak aby przysługiwała im odpowiednia nazwa, mają charakter zdecydowanie subiektywny w tym sensie, że są nałożone dowolnie. Na przykład, to, co jest niezbędnym warunkiem, które musi spełniać implikacja daje nam zbyt małą klasę lo-

⁴⁸ SUSZKO [1974], s. 21.

⁴⁹ MALINOWSKI [1990], ss. 84-85.

gik. Poza nią znajdują się logiki relewantne, niektóre logiki wielowartościowe, logiki modalne, czy też logika Rasiowej. Ujęcie to również, nie pokazuje właściwie żadnego związku pomiędzy logikami nieklasycznymi, przez fakt dowolności nakładanych warunków.

Ujęcie Suszki, wprawdzie nie posiada tego braku, natomiast problemy pojawiają się w związku z "niekonstruktywnością" jego propozycji. Mianowicie nie wiadomo właściwie w jaki sposób nakładać odpowiednie warunki na walucje dla poszczególnych logik⁵⁰.

Obie propozycje nie podają, żadnej ogólnej metody formalnej, dzięki której można by zbadać wystarczająco obszerną klasę logik i spośród nich wyróżnić logiki kodyfikujące rzeczywiście funkcjonujące w języku potocznym rozumienie spójników zdaniowych. Podejście obu koncepcji można nazwać "empirycznym", w tym sensie, że dobudowywane jest do niektórych zastanych logik. Wydaje się to nie być całkiem właściwym, szczególnie na terenie nauk dedukcyjnych.

Ostatnia uwaga. Spójniki zdaniowe występujące w języku naturalnym, istnieją uprzednio w stosunku do naszych czynności poznawczych. Dlatego ich charakterystyka powinna mieć charakter sprawozdawczy, a nie projektujący.⁵¹

⁵⁰ por. MALINOWSKI [1990], s. 84.

⁵¹ ta ostatnia uwaga może się stać przedmiotem osobnego artykułu i jest wysoce dyskusyjna.

ROZDZIAŁ DRUGI

W niniejszym rozdziale przedstawimy propozycję, będącą alternatywnym sposobem ujęcia znaczenia spójników zdaniowych. Koncepcja poniższa pochodzi od Jacka K. Kabzińskiego z jego pracy zatytułowanej roboczo "O modelach porządkowych dla implikacji i równoważności". Tytuł ten dlatego nazywam roboczym ponieważ, o ile mi wiadomo, po pierwsze, praca ta jest fragmentem większej całości, a po drugie, posiadam ją w maszynopisie, dzięki uprzejmości Autora, i nie ukazała się drukiem w całości.

We wstępie chciałbym dać krótkie wprowadzenie w filozoficzne przesłanki leżące u podstaw poniższej konstrukcji.

Rozdział ten ma zasadniczo charakter relacjonujący wyżej wymienioną pracę. Ode mnie pochodzą filozoficzne komentarze, również w niektórych przypadkach rozwijam idee będące źródłem inspiracji dla Kabzińskiego. Zmieniam czasami tok wykładu w stosunku do pierwowzoru.

Biorąc pod uwagę spostrzeżenia poczynione w poprzednim rozdziale, powiemy, że określenie, czy też scharakteryzowanie rozumienia spójników zdaniowych, powinno być dokonane przy dwóch założeniach:

Z1 dla danego spójnika trzeba przyjąć wystarczająco ogólny punkt widzenia, taki, że ów spójnik pojawi się w całej obszernej klasie logik;

Z2 koncepcja znaczenia, którą należałoby przyjąć, to koncepcja znaczenia według Wittgensteina, na mocy której znaczeniem terminu jest sposób jego użycia.

Konsekwentnie, jak zobaczymy dalej, oba postulaty zostaną zachowane. Dla spełnienia Z1 buduje się pewną bardzo słabą logikę, której nadlogiki są ową wystarczająco obszerną klasą logik, w jej obrębie pojawiają się fragmenty wielu znanych logik.

Ta słaba logika z jednym spójnikiem, przesądza o sposobie rozumienia spójnika, poprzez reguły inferencji, które stanowią jej bazę inferencyjną.

Przedstawione będą również badania semantyczne pojawiających się logik, jednak jeśli chodzi o aspekt w którym patrzymy na poniższą konstrukcję, mają one charakter drugoplanowy.

Odnosniki do stron pracy Kabzińskiego podajemy tylko wtedy, gdy przytaczamy dosłowne cytaty. Należy podkreślić jeszcze raz, że autorstwo tych formalnych koncepcji należy do Kabzińskiego. Ode mnie pochodzą jedynie dowody twierdzeń

PODROZDZIAŁ PIERWSZY – SPÓJNIK PORZĄDKU

W artykule z roku 1974 Profesor Suszko⁵² zauważa, że podobnie jak predykat identyczności jest badany w pewnych działach logiki formalnej (equational logic), tak samo można się pokusić o to aby "...zbudować i studiować logikę równościową zbudowaną na spójniku identyczności..."⁵³. Zupełnie analogicznie Kabziński, buduje i bada logikę zdaniową zbudowaną na spójniku porządku, będącego zdaniową wersją predykatu częściowego porządku.

Określimy język zdaniowy, który będzie ustalony w całym rozdziale drugim, jeśli nie zostanie ustalone inaczej, w szczegółowych przypadkach. Oznaczamy go symbolem $\mathcal{P}$, jest on algebrą absolutnie wolną w klasie algebr podobnych K , typu (2), czyli jedyny spójnik oznaczany stałą poziomą kreską - jest dwuargumentowy. Algebra ta jest wolno generowana przez zbiór zmiennych zdaniowych V o postaci $p_1, p_2, \dots$, których jest przeliczanie, nieskończenie wiele. Symbolem P oznaczamy zbiór jego formuł. Niech C_p będzie strukturalną opera-

⁵² por. SUSZKO [1974a], s. 19.

⁵³ SUSZKO [1974a], s. 19.

cją konsekwencji określoną w języku $\mathcal{P}$ przez następujące reguły inferencji:

α, β, γ , są zmiennymi metasystemowymi reprezentującymi formuły zbioru P ,

$$(p1) \vdash \alpha - \alpha,$$

$$(p2) \alpha - \beta, \beta - \gamma \vdash \alpha - \gamma,$$

$$(p3) \alpha - \beta, \alpha \vdash \beta,$$

$$(p4) \alpha - \beta, \beta - \alpha, \gamma - \delta, \delta - \gamma \vdash (\alpha - \gamma) - (\beta - \delta).$$

Operację konsekwencji C_p nazywać będziemy BAZOWĄ KONSEKWENCJĄ SPÓJNIKA PORZĄDKU. Wyznacza ona całą klasę logik, które nazywać będziemy konsekwencjami spójnika porządku. Stosując często przyjętą konwencję łączenia w lewo⁵⁴, ze względu na jedyność spójnika -, będziemy ów symbol opuszczać zarówno w języku jak i w algebrach klasy K - symbol działania, oczywiście wtedy, gdy nie będzie to prowadziło do nieporozumień. Zatem reguły konsekwencji C_p możemy zapisać w naszej konwencji następująco:

$$(p1) \vdash \alpha \alpha,$$

$$(p2) \alpha \beta, \beta \gamma \vdash \alpha \gamma,$$

$$(p3) \alpha \beta, \alpha \vdash \beta,$$

$$(p4) \alpha \beta, \beta \alpha, \gamma \delta, \delta \gamma \vdash \alpha \gamma (\beta \delta).$$

Uzasadnimy dlaczego konsekwencja C_p nazywa się konsekwencją spójnika porządku. Otóż powyższe reguły (p1), (p2), (p4), kodują aksjomaty spójnika porządku częściowego, odpowiednio: zwrotność, przechodniość i antysymetryczność.

Przejdziemy do określenia semantyki algebraicznej dla konsekwencji C_p .

K jest klasą algebr podobnych o postaci $\mathcal{A} = (A, *)$, gdzie A jest uniwersum algebry, zaś $*$ jedynym dwuargumentowym działaniem.

Algebry mają typ (2). Elementy $a, b, c, d \in A$.

$H(A, R)$ oznacza rodzinę zbiorów niepustych i domkniętych ze względu na relację $R \subseteq A^2$, tzn.,

$$H(A, R) = \{D \subseteq A : D \neq \emptyset \text{ oraz gdy } a \in D \text{ i } aRb, \text{ to } b \in D\},$$

⁵⁴ por. na przykład KABZIŃSKI [1980], s. 10.

$Or(A)$ – zbiór porządków częściowych określonych na zbiorze A .

DEFINICJA 2.1.1.

Parę $(\mathcal{U}, D)$ będziemy nazywać R-MODELEM PORZĄDKOWYM (w skrócie

R-MP) wtw:

- (i) $\mathcal{U} \in K$,
- (ii) $R \in Or(A)$,
- (iii) $D \in H(A, R)$,
- (iv) $a * b \in D$ wtw aRb .

ROZGAŁĘZIONYM R-MP nazywamy zbiór $(\mathcal{U}, H(A, R))$.

$\mathcal{MP}(\mathcal{U})$ oznacza zbiór wszystkich rozgałęzionych modeli porządkowych, określonych na $\mathcal{U}$.

$\mathcal{MP}$ oznacza klasę wszystkich modeli porządkowych $\mathcal{MP} = \cup \{\mathcal{MP}(\mathcal{U}) : \mathcal{U} \in K\}$.

Przytoczymy bez dowodu twierdzenie o pełności konsekwencji C_p względem klasy $\mathcal{MP}$.⁵⁵

TWIERDZENIE 2.1.1. (o pełności)

$$C_p = C_{\mathcal{MP}}.$$

Bazowa konsekwencja spójnika porządku koduje w języku zdaniowym pewną ideę, jaką wiążemy między innymi ze spójnikiem implikacji, lub lepiej z wynikaniem logicznym, polegającą na tym iż zarówno wynikanie, jak i implikacja porządkują zbiór wyrażeń języka. Dlatego porządkowanie jest relacją określoną na zbiorze wyrażeń i jest warunkiem koniecznym na to, aby coś nazywać implikacją. Odnalezienie warunku wystarczającego pozwoliłoby nam na adekwatne scharakteryzowanie klasy logik nazwanych najogólniej implikacyjnymi. Do tego zagadnienia powrócimy w następnym rozdziale.

Podamy teraz kilka przykładów, egzemplifikujących modele porządkowe.⁵⁶

⁵⁵ dowód tego twierdzenia szczegółowo został przedstawiony w pracy doktorskiej, jego zarys pochodzi z pracy Kabzińskiego [JKK].

⁵⁶ por. KABZINSKI [JKK], ss. 7-10.

Najpierw:

DEFINICJA 2.1.2.

ZBIOREM MODELOWO UPORZĄDKOWANYM nazywamy trójkę (A, D, R) , gdzie

$$A \neq \emptyset, D \subseteq A, R \subseteq A^2 \text{ wtw } R \in Or(A) \text{ oraz } D \in H(A, R).$$

Dla zbiorów dwuelementowych mamy dwa typy zbiorów uporządkowanych, oraz dwa typy zbiorów modelowo uporządkowanych (przy założeniu, że $D \neq A$).

Oto dwa typy zbiorów uporządkowanych, dwuelementowych:

$$A = \{0, 1\}, R_1 = \{(0, 1), (1, 1), (0, 0)\}; R_2 = \{(0, 0), (1, 1)\}.$$

Dla określenia zbiorów modelowo uporządkowanych należy dodatkowo określić elementy zbioru D , czyli zbioru wartości wyróżnionych. W obu przypadkach będzie to zbiór $D = \{1\}$.

Typy zbiorów modelowo uporządkowanych wyznaczają modele porządkowe. Zbiór pierwszy wyznacza konsekwencje implikacji klasycznej aksjomatyzowanej następującymi regułami:

- $\vdash \alpha(\beta\alpha)$, prawo poprzedzania,
- $\vdash \alpha\beta(\beta\gamma(\alpha\gamma))$, prawo sylogizmu hipotetycznego,
- $\vdash \alpha\beta\alpha\alpha$, prawo Pierce'a,
- $\alpha\beta, \alpha \vdash \beta$, reguła odrywania.

Zbiór drugi wyznacza konsekwencję klasycznej równoważności:

- $\vdash \alpha\beta(\beta\alpha)$ prawo przemienności,
- $\vdash \alpha(\beta\gamma)(\alpha\beta\gamma)$ prawo łączności,
- $\alpha\beta, \alpha \vdash \beta$ reguła odrywania.

Profesor Rasiowa wyznaczyła konsekwencję określoną przez oba modele porządkowe na zbiorze dwuelementowym.⁵⁷

- $\vdash \alpha\beta(\beta\gamma(\alpha\gamma))$,
- $\vdash \beta(\alpha(\alpha\beta))$,
- $\vdash \alpha\beta(\alpha\beta\alpha)\alpha$,
- $\alpha\beta, \alpha \vdash \beta$.

Wszystkie trzy konsekwencje są nadkonsekwencjami bazowej konsekwencji spójnika porządku.

⁵⁷ por. RASIOVA [1955].

PODROZDZIAŁ DRUGI – SPÓJNIK IDENTYCZNOŚCI

Jak to zostało zapowiedziane w rozdziale pierwszym, skupimy swoją uwagę na spójniku zdaniowym, który pojawił się na gruncie logiki zdaniowej głównie za sprawą Profesora Suszki. Jak pisze on w swoim artykule⁵⁸, formuły rachunku zdań odgrywają podwójną semantyczną rolę. Z jednej strony mamy odniesienie formuł do prawdy i fałszu, jeśli przez to odniesienie rozumiemy będziemy logiczne waluacje, zaś z drugiej algebraiczne waluacje, które – jak zaznacza Suszko – mają zupełnie odmienną naturę pojęciową od logicznych waluacji. Ów drugi rodzaj waluacji przypisuje formułom ich korelaty semantyczne, czyli sytuacje. Algebraiczne waluacje mają charakter referencyjny. Aksjomat Fregego w jego wersji semantycznej stwierdza, że wszystkim zdaniom prawdziwym odpowiada jeden i ten sam korelat semantyczny, zaś wszystkim zdaniom fałszywym odpowiada jeden i ten sam korelat semantyczny.⁵⁹ Aksjomat Fregego utożsamia zatem korelat semantyczny zdania z jego prawdziwością lub fałszywością. Tak jest dla logiki klasycznej, zwanej prawdziwością. Na gruncie tej logiki następuje utożsamienie identyczności dwóch zdań które mają jednakowy korelat semantyczny, z równoważnością dwóch zdań będących równocześnie prawdziwymi lub równocześnie fałszywymi. Logika nefregowska to taka w której pojawia się intensjonalny spójnik identyczności, wyrażający w rachunku ową subtelność, "pominiętą" przez Fregego. Koncepcja Suszki ma również swoje źródło w filozofii Wittgensteina, od którego pochodzi teza, że zdania opisują sytuacje, gdyż sytuacje to właśnie ich korelaty semantyczne.⁶⁰

⁵⁸ por. SUSZKO [1977], s. 377.

⁵⁹ por. OMYŁA [1986], s. 77.

⁶⁰ sytuacje jako korelaty semantyczne zdań atomowych rozważane były przez Wittgensteina w pracy „Tractatus logico-philosophicus”.

Drugim źródłem inspirującym Profesora Suszkę jest, mówiąc w skrócie, próba imitacji relacji kongruencji regularnych w rachunku zdaniowym.⁶¹

Podstawowe własności identyczności da się wydedukować ze sformułowania zwanego prawem Leibniza, które za Tarskim wypowiemy następująco:⁶²

$x=y$ wtw x posiada każdą własność, którą posiada y i y posiada każdą własność, którą posiada x .

Z tej zasady wynikają następujące własności:

$$x = x,$$

$$\text{jeśli } x = y, \text{ to } y = x,$$

$$\text{jeśli } x = y \text{ i } y = z, \text{ to } x = z.$$

Szczególnym przypadkiem zasady Leibniza jest następująca własność:

Jeśli $x = y$, to jeśli w dowolnej konstrukcji, w której występuje x , zamienimy x na y , to otrzymamy konstrukcję identyczną z wyjściową.

Przystępujemy do przedstawienia logiki identyczności. Niech symbol $\mathcal{P}_\Theta$ oznacza język, który w stosunku do ustalonego na przeciąg tego rozdziału różni się tym, że Θ jest skończonym zbiorem spójników takim, że $- \in \Theta$. Zbiór formuł tego języka oznaczamy P_Θ .

Weźmy następujące aksjomaty, kodujące w języku zdaniowym wyżej wyrażone własności identyczności:

$$(i1) \quad \vdash \alpha - \alpha,$$

$$(i2) \quad \alpha - \beta \vdash \beta - \alpha,$$

$$(i3) \quad \alpha - \beta, \beta - \gamma \vdash \alpha - \gamma,$$

$$(i4) \quad \alpha - \beta \vdash F_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) - F_i(\beta_1, \dots, \beta_n),$$

gdzie $i = 1, \dots, n$; zaś F_i jest dowolnym

n -argumentowym spójnikiem ze zbioru Θ ,

$$(i5) \quad \alpha - \beta, \alpha \vdash \beta$$

Ostatni warunek w postaci reguły odrywania, wyraża warunek regularności kongruencji, lub kongruencji zgodnych z konsekwencją.⁶³

⁶¹ por. SUSZKO [1974a], s. 19.

⁶² por. TARSKI [1995], ss. 56-65.

Wspomniany aksjomat Fregego w sformułowaniu ontologicznym brzmi:⁶⁴

Dla dowolnych p, q $[(p=q) \rightarrow (\delta(p)=\delta(q))]$.

W nawiązaniu do powyższego, powróćmy na pewien czas do charakterystyki spójników zdaniowych za pomocą operacji konsekwencji. Weźmy:

(Int) $\alpha-\beta \in C(X)$ wtw $C(X, \alpha) = C(X, \beta)$,

(Idt) $\alpha-\beta \in C(X)$ wtw $C(X, \delta(\alpha)) = C(X, \delta(\beta))$, dla dowolnego $\delta \in P_{\Theta}$.

Dowodzono, że najmniejszą konsekwencją spełniającą warunek (Int) jest równoważnościowy fragment logiki intuicjonistycznej, aksjomatyzowalny regułami:⁶⁵

$\vdash \alpha-\alpha$,
 $\vdash (((\alpha-\beta)-\gamma)-\gamma)-((\alpha-\gamma)-(\beta-\gamma))$,
 $\vdash (((\alpha-\beta)-((\alpha-\gamma)-\gamma))-((\alpha-\gamma)-\gamma))-(\alpha-\beta)$,
 $\alpha-\beta, \alpha \vdash \beta$,
 $\alpha \vdash (\alpha-\beta)-\beta$.

Sformułujemy fakt, że najmniejszą konsekwencją spełniającą warunek (Idt) jest konsekwencja określona warunkami (i1)-(i5).⁶⁶

FAKT 2.2.1.⁶⁷

Konsekwencja określona warunkami (i1)-(i5), może być zdefiniowana przez następujące reguły:

(i1) $\vdash \alpha-\alpha$,
 (id) $\alpha-\beta, \delta(\alpha) \vdash \delta(\beta)$.

⁶³ zajmowali się tym zagadnieniem G. MALINOWSKI i J. ZYGMUNT w pracy 'Sprawozdanie z Jesiennej Szkoły Logicznej, Międzygórze, 1977.

⁶⁴ por. SUSZKO [1977], s. 377.

⁶⁵ dowód tego twierdzenia znajduje się w pracy: POREBSKA-WROŃSKI, A characterization of fragments of the intuitionistic propositional logic, 'Reports on Mathematical Logic', 4, (1975), ss. 39-42.

⁶⁶ por. KABZIŃSKI [JKK], ss. 18-19.

⁶⁷ por. KABZIŃSKI [JKK], ss. 17-18; tam dowód faktu 2.2.1. oraz twierdzenia 2.2.1.

TWIERDZENIE 2.2.1.

Operacja konsekwencji określona regułami (i1)-(id), jest najmniejszą konsekwencją spełniającą warunek (Idt).

Powracamy do naszego roboczego języka z jednym spójnikiem zdaniowym oznaczanym przez -.

Powyższe rozważania prowadzone były w bogatszym języku wyposażonym w wiele spójników. Ważne są one również dla naszego języka $\mathcal{P}$, dla którego zbiór spójników $\Theta = \{-\}$.

Określimy w języku $\mathcal{P}$ operację konsekwencji, zwaną BAZOWĄ KONSEKWENCJĄ SPÓJNIKA IDENTYCZNOŚCI, w nawiązaniu do określenia Profesora Suszki i przez niego podaną. Oznaczać ją będziemy literą E.

Oto reguły definiujące:

(i1*) $\vdash \alpha\alpha$,
 (i2*) $\alpha\beta, \alpha \vdash \beta$,
 (i3*) $\alpha\beta, \gamma\delta \vdash \alpha\gamma(\beta\delta)$.

FAKT 2.2.2.

Logika określona przez reguły (i1)-(i5), jest identyczna dla języka $\mathcal{P}$, z logiką E.

FAKT 2.2.3.

Logika E jest konsekwencją spójnika porządku, czyli $C_p \leq E$.

Podamy obecnie semantykę dla logiki E.

DEFINICJA 2.2.1.

Model $\mathcal{M}$ nazywamy MODELEM IDENTYCZNOŚCIOWYM wtw $\mathcal{M}$ jest R-MP, takim, że relacja R jest relacją identyczności.

Klasę modeli identycznościowych oznaczать będziemy $\mathcal{ME}$.

FAKT 2.2.4.

Model $\mathcal{M}$ jest modelem identycznościowym wtw model $\mathcal{M}$ jest R-MP oraz spełnia warunek:

(s) jeśli aRb , to bRa .

TWIERDZENIE 2.2.2. (o pełności)⁶⁸

$$E = C_{\mathcal{M}E}.$$

PODROZDZIAŁ TRZECI – SPÓJNIK RÓWNOWAŻNOŚCI

Na początku tego podrozdziału poczynimy parę uwag natury historycznej. Okazuje się, że własności spójnika równoważności odkrywane były, odmiennie niż pozostałych standardowych spójników, bardzo powoli. Już w starożytności znane było prawo zwrotności dla równoważności. Dalszy rozwój dokonał się zasadniczo za sprawą Whiteheada i Russella, którzy w "Principia Mathematica" umieścili prawo symetryczności dla równoważności, tzn. $(\alpha \equiv \beta) \equiv (\beta \equiv \alpha)$.

W Polsce międzywojennej, w okresie bujnego rozwoju polskiej logiki, głównie za sprawą Stanisława Leśniewskiego, w którego systemach logicznych, równoważność odgrywała ważną rolę, jak również za przyczyną "czarodzieja" rachunków zdaniowych J. Łukasiewicza, zajęto się spójnikiem równoważności bardziej szczegółowo. Spośród innych logików polskich i zagranicznych, którzy prowadzili skuteczne badania w tej dziedzinie należy wymienić następujących: Tarski, Wajsberg, Słupecki, Sobociński, Stone, McKinsey, Quine oraz Mihailescu.⁶⁹ Do tej problematyki powrócił w końcu lat sześćdziesiątych Stanisław Surma, który odkrył i udowodnił twierdzenie o dedukcji dla równoważności. Dzisiaj w ośrodku krakowskim kontynuuje te badania uczeń Surmy, Jacek K. Kabziński wraz ze współpracownikami.

Badanie klasycznej równoważności, szczególnie od strony syntaktycznej, ma pewną szczególną własność. Mianowicie, co jest raczej ewenementem w dziedzinie badań nauko-

⁶⁸ twierdzenie to pochodzi od Kabzińskiego i jest tylko wypowiedziane w Jego pracy [JKK]. Dowód znajduje się w mojej pracy doktorskiej.

⁶⁹ por. KABZIŃSKI [JKK], ss. 15-20.

wych, zostało zakończone. W jakim to sensie, pokażemy poniżej przytaczając krótką historię najważniejszych wyników:⁷⁰

przed 1922 r. - Łukasiewicz odkrywa prawo $\vdash (\alpha \equiv (\beta \equiv \gamma)) \equiv ((\alpha \equiv \beta) \equiv \gamma)$.

1923 r. - Tajtelbaum (Tarski) w rozprawie doktorskiej "O wyrazie pierwotnym logistyki" cytuje powyższe prawo, zaś owym pierwotnym wyrazem jest równoważność.

1929 r. - Leśniewski przyjmuje wraz z regułą odrywania następujące aksjomaty dla równoważnościowego fragmentu logiki klasycznej:

$$\vdash (\alpha \equiv (\beta \equiv \gamma)) \equiv ((\alpha \equiv \beta) \equiv \gamma),$$

$$\vdash ((\alpha \equiv \beta) \equiv (\gamma \equiv \alpha)) \equiv (\beta \equiv \gamma).$$

Leśniewski formułuje kryterium, zwane KRYTERIUM LESNIEWSKIEGO, wyrażające fakt, iż dowolna formuła jest tezą fragmentu równoważnościowego logiki klasycznej wtw każda zmienna występuje w niej parzystą ilość razy. Później Słupecki uogólnił to kryterium na inne rachunki.

1932 r. - Wajsberg zamieszcza kilka aksjomatyk dla równoważnościowego rachunku zdań (w skrócie RRZ) i dwa jedyne aksjomaty dla RRZ.

1932 r. - Bolesław Sobociński informuje o sześciu piętnastoliterowych, jedyńskich aksjomatach dla RRZ, znalezionych przez siebie, Łukasiewicza i Brymana.

1939 r. - Łukasiewicz sumuje stan badań nad RRZ, opisuje m.in. nową prostą metodę dowodu zupełności RRZ i podaje syntaktyczny dowód niesprzeczności tego rachunku. Podaje - wraz z dowodem, że jest to aksjomat najkrótszy - jedenastoliterowy, jedyny aksjomat RRZ.

1951 r. - Uczeń Łukasiewicza C.A.Meredith znajduje następne dwa jedenastoliterowe aksjomaty RRZ.

1963 r. - Meredith publikuje sześć dalszych, najkrótszych aksjomatów dla RRZ.

1976 r. - J.G.Peterson wykazuje przy użyciu metod komputerowych za pomocą reguły inferencyjnej, zwanej condensed detachment, będącej kombinacją reguły odrywania i reguły podstawiania, że oprócz jednej formuły, którą modyfikuje

⁷⁰ por. KIJANIA-PLACEK [1991].

Kalman w roku 1978, wszystkie formuły Meredith'a aksjomatyzują RRZ.

1980 r. - L.Wos i S.Winker w ostatecznie za pomocą komputera rozwiązują zagadnienie znalezienia wszystkich najkrótszych aksjomatów dla RRZ. Wykazują iż spośród wszystkich 630 jedenastoliterowych formuł jedynie każda z 13 formuł podanych przez nich, wraz z regułą odrywania, może być jedynym aksjomatem dla RRZ.

Jak widać zagadnienie znalezienia wszystkich najkrótszych aksjomatów RRZ zostało uwieńczone sukcesem, licząc od "Principia Mathematica", po okresie ponad siedemdziesięciu lat.

W rozdziale pierwszym, kiedy przedstawiono język standardowy $\mathcal{L}$, nie zaliczono do niego spójnika równoważności, rozumiejąc za Wójcickim⁷¹, że formuła o postaci $\alpha \equiv \beta$ jest skrótem wyrażenia $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$. Wskazuje to na fakt, iż równoważność jako spójnik jest rozumiana, pochodnie w stosunku do rozumienia implikacji. Kontynuując ten punkt widzenia, zaprezentujemy logikę, zwaną BAZOWĄ KONSEKWENCJĄ SPÓJNIKA RÓWNOWAŻNOŚCI, oznaczaną dalej symbolem R . Oto reguły ją definiujące:

- (r1) $\vdash \alpha \alpha$,
- (r2) $\vdash \alpha \beta (\beta \alpha)$,
- (r3) $\alpha \beta, \alpha \vdash \beta$,
- (r4) $\alpha \beta \vdash \alpha \gamma (\beta \gamma)$.

Nadkonsekwencje operacji R nazywać będziemy konsekwencjami spójnika równoważności.

FAKT 2.3.1.

Operacja konsekwencji R jest konsekwencją spójnika porządku.

FAKT 2.3.2.

Konsekwencje spójnika równoważności są konsekwencjami spójnika identyczności.

⁷¹ por. WÓJCICKI [1984], s. 16.

Przedstawimy obecnie semantykę dla logiki R .

DEFINICJA 2.3.1.

Model $\mathcal{M} = (\mathcal{U}, D)$ nazywać będziemy MODELEM RÓWNOWAŻNOŚCIOWYM wtw model $\mathcal{M}$ jest R-MP oraz działanie * algebry modelu spełnia warunek:

(S) $a * b = b * a$.

Klasę modeli równoważnościowych oznaczać będziemy symbolem $\mathcal{MR}$.

FAKT 2.3.3.

Każdy model równoważnościowy jest modelem identycznościowym.

Sformułujemy obecnie:

TWIERDZENIE 2.3.1.(o pełności)⁷²

$$R = C_{\mathcal{MR}}.$$

⁷² podobnie jak poprzednio, to twierdzenie sformułował Kabziński, zaś dowód standardowy pochodzi ode mnie.

ROZDZIAŁ TRZECI

Rozdział ten poświęcimy bardziej szczegółowym rozważaniom dotyczącym spójnika implikacji. Skupimy się na nim, ponieważ wydaje się on być podstawowym spójnikiem zdaniowym.⁷³ Anderson i Belnap, zasadniczo twórcy kierunku entailment w logice, twierdzą, że serce logiki leży w implikacji.⁷⁴ Taki punkt widzenia jest przyjęty w niniejszej pracy. Jako uzasadnienie można podać następujące argumenty:

- implikacja koduje w języku rachunku zdań okres warunkowy języka potocznego, który wypowiadamy: jeżeli ..., to ...⁷⁵
- implikacja koduje w języku rachunku zdań pojęcie wynikania, w tym samym sensie w jakim spójnik porządku i spójnik identyczności kodują w języku zdaniowym odpowiednio relacje częściowego porządku oraz relację kongruencji.⁷⁶

Na początku tego rozdziału poczynimy parę uwag natury historycznej. Jednym z głównych problemów rozważanych przez starożytnych było zagadnienie znaczenia okresu warunkowego.⁷⁷ Termin "okres warunkowy" pochodzi, według Matesa, od Chryzypa i rozumiany był technicznie jako sąd, nie jako wnioskowanie. U stoików znajdujemy cztery sposoby rozumienia okresu warunkowego. Oto one:

- Filon rozumiał okres warunkowy, tak jak my dzisiaj rozumiemy implikację materialną,

⁷³ por. ANDERSON-BELNAP [1975], s. 3.

⁷⁴ por. ANDERSON-BELNAP [1962]; ANDERSON-BELNAP [1975], ss. 3-5.

⁷⁵ pomijamy tutaj zagadnienie, czy język rachunku zdań jest wystarczająco precyzyjnym narzędziem badawczym w sprawie ustalenia znaczeń spójników zdaniowych; por. w tej sprawie CZERWIŃSKI [1958], ss. 270-271.

⁷⁶ jak się okazuje, można przy naszym ujęciu logik porządku twierdzić, że znaczenie implikacji jest zakodowane formalnie z użyciem znaku inferencji „ $\vdash$ ”, lub też, że znaczenie tego ostatniego symbolu zakodowane jest przez implikację.

⁷⁷ por. MATES [1971], s. 65; KNEALE-KNEALE [1962], s. 96.

- Diodor uważał, że okres warunkowy jest prawdziwy "jeżeli nie jest, ani nigdy nie było możliwe, aby miał on poprzednik prawdziwy, a następnik fałszywy".⁷⁸ W pewnym sensie, ze względu na funktor modalny użyty w tym określeniu, można mówić o podobieństwie implikacji ścisłej Lewisa do poglądu Diodora,

- trzeci pogląd nieznanego autora, który przytacza Sextus Empiricus, mówi, że sąd warunkowy jest prawdziwy, gdy zaprzeczenie jego następnika jest niezgodne z jego poprzednikiem,

- czwarty pogląd mówi o prawdziwości sądu warunkowego, gdy następnik w pewnym sensie zawiera się w poprzedniku.⁷⁹

Prawdziwościowa charakterystyka implikacji materialnej, znana już była Stoikom.⁸⁰ Również ta implikacja jako pierwsza została zakodowana w postaci aksjomatyzowanego rachunku zdań przez Fregego w 1879 roku.⁸¹

Implikacja materialna niepokoiła jednak stale filozofów pewną paradoksalnością. Okazuje się bowiem, iż niektóre tezy zapisane przy pomocy spójnikiem implikacji materialnej wydawały się nienaturalne. To znaczy, przy założeniu, że implikacja ma być równoznaczna z okresem warunkowym z języka potocznego. Próby usunięcia niektórych paradoksalnych tez dały w efekcie różne od klasycznego, rachunki zdaniowe. Owe dziwne tezy, po podstawieniu za zmienne zdaniowe zdań języka naturalnego i odczytaniu spójników, dawały zdania, których nie jesteśmy skłonni uznać za prawdziwe. Zaliczono tutaj przede wszystkim te implikacje, w których nie było żadnego związku treściowego pomiędzy poprzednikiem i następnikiem implikacji zwanego związkiem relewancji, jak np. prawo poprzedzania, prawo przepełnienia.

W tym miejscu wypada wspomnieć o pewnym zagadnieniu związanemu z rozważanymi problemami. Ajdukiewicz w

⁷⁸ por. MATES [1971], ss. 67-68.

⁷⁹ por. MATES [1971], ss. 72-73.

⁸⁰ por. MATES [1971], s. 67.

⁸¹ taką uwagę czyni znakomity specjalista - Jan Łukasiewicz w pracy; Z historii logiki zdań, „Przegląd Filozoficzny”, 37, Warszawa 1934.

artykule "Okres warunkowy a implikacja materialna"⁸² rozważając zagadnienie relacji pomiędzy okresem warunkowym z języka potocznego a implikacją materialną, twierdzi, że różnica pomiędzy znaczeniami obu spójników "...nie idzie tak daleko, aby pewne twierdzenia prawdziwe dla znaku implikacji przestawały być prawdziwe dla spójnika warunkowego rozumianego potocznie."⁸³ Ajdukiewicz powtarza opinię przyjmowaną dość powszechnie, że wyrażenie "jeśli p, to q" jest mocniejsze od implikacji materialnej " $p \rightarrow q$ ". To znaczy, że zachodzenie okresu warunkowego implikuje zachodzenie odpowiadającej mu implikacji materialnej.⁸⁴ Formalny wyraz tym filozoficznym, intuicjom podamy w dalszej części pracy.

Ajdukiewicz twierdzi, dla wykazania przeciwnego wyniku, iż należy odróżnić to co zdanie wyraża, od tego co stwierdza. Uważa, że "paradoksy implikacji materialnej" biorą się z niebrania pod uwagę tego rozróżnienia, czyli mają swe źródło w pragmatycznej relacji uznawania zdania za prawdziwe. Odmawiamy uznania "paradoksalnych tez" implikacji materialnej ze względu na niechęć do niewłaściwego jej użycia.⁸⁵ Według Ajdukiewicza, okres warunkowy wyraża dwie rzeczy: po pierwsze, że kto uznaje ten okres nie zna wartości logicznych przyjmowanych przez zdania wchodzące w jego skład, po drugie, chęć wywnioskowania następnika z poprzednika. Implikacja materialna nie wyraża ani jednego z tych warunków, choć stwierdza to samo co okres warunkowy.⁸⁶

Jeszcze inne podejście do rozwiązania "paradoksów implikacji" zaproponował Quine w swej pracy "Logika matematyczna".⁸⁷ Twierdzi on, iż czasownik "implikuje" jest w rzeczywistości predykatem od dwóch argumentów nazwowych, gdzie rzeczony nazwy, to nazwy zdań. Według Quine'a implikacja materialna nie jest implikacją, jak dodaje "...chyba że

⁸² por. AJDUKIEWICZ [1965], t.II, ss. 248-265.

⁸³ por. AJDUKIEWICZ [1965], s. 249.

⁸⁴ por. THOMASON [1990], ss. 58-59.

⁸⁵ por. AJDUKIEWICZ [1965], s. 255.

⁸⁶ por. AJDUKIEWICZ [1965], s. 265.

⁸⁷ por. QUINE [1974], ss. 33-39.

przez analogię".⁸⁸ Zwrot "implikuje materialnie" jest predykatem od dwóch argumentów nazwowych, nie jest zaś spójnikiem zdaniowym.

Zarówno próba rozwiązania problemu "paradoksów implikacji" przez Ajdukiewicza jak i Quine'a zostanie skomentowana w następnym, czwartym rozdziale poświęconym filozofii.

Logicy, stosując metody formalne próbowali, nie wchodząc w tego rodzaju subtelności filozoficzne, rozwiązać problemat "paradoksów implikacji", na swój własny formalny sposób. I tak:

Logiki zwane w szerokim sensie relewantnymi, próbują zaradzić temu np. przez wymaganie wspólnej zmiennej między poprzednikiem a następnikiem, formalny wymóg odpowiadający relewancji.⁸⁹

Innym wymogiem, który powodował odrzucenie niektórych tez klasycznej implikacji, był wymóg konieczności wiążącej poprzednik implikacji z jej następnikiem. Zaliczymy tutaj przede wszystkim systemy ścisłej implikacji Lewisa, zwane niekiedy logikami modalnymi, choć termin ten jest wieloznaczny.

Jeszcze inną krytykę implikacji, z pozycji odmiennego stanowiska zajmowanego w kwestiach logicznych, prezentują przedstawiciele kierunku entailment, przede wszystkim Anderson i Belnap. Autorzy ci twierdzą, że nie można mówić o "paradoksach implikacji", lecz o paradoksach "implikacji". Utrzymując, że implikacja materialna nie jest implikacją. Budują oni logiki typu entailment, chcąc połączyć oba powyższe wymogi, relewancji i konieczności, poprzednika i następnika implikacji. Kontynuują oni drogę wytyczoną przez Ackermanna, twórcy tak zwanej mocnej implikacji.⁹⁰

Powód powstania logik nieklasycznych jest jednak znacznie bardziej złożony. Okazuje się bowiem, że grunt do skonstruowania logiki różnej od klasycznej, może być różnorodny. Przez logikę klasyczną rozumiemy $(\mathcal{L}, C)$, gdzie konse-

kwencja C jest określona w języku standardowym $\mathcal{L}$. Konsekwencję C tworzą na przykład aksjomaty Hilberta-Bernaysa domknięte na podstawianie wraz z regułą odrywania.

Powody powstania pewnych logik nieklasycznych są na przykład następujące:

- poglądy z dziedziny filozofii matematyki i istnienia przedmiotów matematycznych dały asumpt do powstania logiki intuicjonistycznej,

- nadlogiki intuicjonizmu zwane logikami pośrednimi, powstałe w wyniku rozważań nad semantyką dla logiki intuicjonistycznej,

- logiki Łukasiewicza powstałe w wyniku rozważań nad wartością logiczną zdań o przyszłości,

- logiki nieklasyczne wyrosłe z badań metodologicznych nauk przyrodniczych. Tutaj zaliczymy logiki kwantowe oraz logiki przyczynowości.⁹¹

Zasadą, według opinii niektórych specjalistów,⁹² powinno być, budowanie jakiejś logiki różnej od klasycznej na mocnych fundamentach filozoficznych.

Rodzina logik zwanych nieklasycznymi, jak widać na wyliczonych przykładach, jest bardzo obszerna. W niniejszej pracy ograniczamy swą uwagę do tych logik nieklasycznych, które są określone w języku z jednym spójnikiem dwuargumentowym. Zatem z naszych rozważań wykluczmy te wszystkie formalizacje logik nieklasycznych, które zostały dokonane w innym języku niż język standardowy. Dokładnie interesować nas będą fragmenty implikacyjne tych logik.

Przypomnijmy, że dziedziną naszych formalnych rozważań, jest klasa standardowych nadlogik bazowej konsekwencji spójnika porządku C_p . Klasę tę będziemy w dalszym ciągu oznaczać symbolem $[C_p]$. Operacja konsekwencji jest standardowa gdy jest strukturalna i finitystyczna. Klasę operacji strukturalnych silniejszych od danej konsekwencji C , silniejszych względem porządku $\leq$, oznaczać będziemy symbolem $[C_0]$, zaś klasę wszystkich konsekwencji silniejszych od kon-

⁸⁸ por. QUINE [1974], s. 35.

⁸⁹ por. interesujące uwagi na ten temat w pracy TOKARZ [1980], ss. 1-4.

⁹⁰ por. ANDERSON-BELNAP [1975], ss. 23-27.

⁹¹ por. na przykład KICZUK [1994], [1995].

⁹² podobną opinię wyraził w rozmowie znany logik A. Wroński.

sekwencji C , względem tego samego porządku, symbolem $[C]$. Oczywiście, jeśli nie zostanie to ustalone inaczej, relacje konsekwencji określone są w naszym roboczym języku $\mathcal{P} = (P, -)$. Klasę wszystkich konsekwencji (strukturalnych, standardowych), oznaczać będziemy kolejno symbolami C, C_o, C^f .

Trzy bazowe logiki C_p, E, R zdefiniowane w poprzednim rozdziale są tak nazwane ze względu na następujące fakty:

FAKT.⁹³

Niech Q będzie zbiorem reguł inferencji. Dla każdego $X \subseteq P$, $Cl_Q(X)$ jest najmniejszym nadzbiorem zbioru X , zamkniętym ze względu na wszystkie reguły ze zbioru Q .

TWIERDZENIE.⁹⁴

Niech $\mathcal{J}$ będzie językiem zdaniowym, zaś C operacją jednoargumentową zdefiniowaną na zbiorze podzbiorów S , to spełnione są następujące warunki: C jest operacją konsekwencji (strukturalną, finitystyczną, standardową) wtw istnieje zbiór reguł inferencyjnych Q , (strukturalnych, finitystycznych, standardowych) taki, że:

$$C = Cl_Q.$$

W klasie logik $[C]^f$ wprowadzimy quasi-porządek, dla dowolnych $C_1, C_2 \in [C]^f$:

$C_1 \leq_f C_2$ wtw dla dowolnego skończonego $X \subseteq P$, $C_1(X) \subseteq C_2(X)$.

Zanotujemy⁹⁵:

Jeśli C_1 jest finitystyczna, to $C_1 \leq_f C_2$ wtw $C_1 \leq C_2$.

Klasa $[C_p]^f$, wszystkich logik standardowych silniejszych od logiki C_p , jest podkratą zupełną ze względu na porządek $\leq_f$ kraty $(C^f, \leq_f)$. Jak zostało wcześniej zaznaczone, jeśli pewna

⁹³ por. WÓJCICKI [1984], s. 56. Wszystkie fakty i definicje rozdziału trzeciego posiadające własny numer, jeśli nie zostało to zaznaczone wyraźnie, pochodzą ode mnie. Ich dowody zostały w tym skrócie pominięte.

⁹⁴ por. WÓJCICKI [1984], ss. 57-58.

⁹⁵ por. WÓJCICKI [1984], s. 30.

konsekwencja $K \in [C_p]^f$, to nazwiemy ją konsekwencją spójnika porządku. Odpowiednio kraty konsekwencji standardowych $[E]^f, [R]^f$ nazywać będziemy kratami logik identycznościowych i równoważnościowych.

TWIERDZENIE.⁹⁶

Para $(C^f, \leq_f)$ jest kratą zupełną, choć nie jest zupełną podkratą $(C_o, \leq)$ ani $(C, \leq)$.

Przytoczymy jeszcze jeden rezultat, który natychmiast wykorzystamy.⁹⁷

TWIERDZENIE.

Dla dowolnej konsekwencji standardowej K , krata $([K]^f, \leq_f)$ posiada koatomy, to znaczy, że dla dowolnej standardowej konsekwencji K istnieje jej standardowa maksymalizacja.

FAKT.3.1.1.

Kraty; $([C_p]^f, \leq_f), ([E]^f, \leq_f), ([R]^f, \leq_f)$, posiadają koatomy.

Rasiowa w swej pracy "An algebraic approach to non-classical logics"⁹⁸ zdefiniowała słabą logikę implikacyjną – będziemy ją nazywać logiką Rasiowej – której nadlogiki zwane są w literaturze logicznej logikami implikacyjnymi.⁹⁹ Przedstawimy tutaj ową logikę z modyfikacją polegającą na zmianie języka. Rasiowa określiła swą logikę w bogatszym języku. My przedstawimy ją w naszym roboczym języku $\mathcal{P}$.

(ra1) $\vdash \alpha\alpha$,

(ra2) $\alpha\beta, \alpha \vdash \beta$,

(ra3) $\alpha\beta, \beta\gamma \vdash \alpha\gamma$,

(ra4) $\alpha\beta, \beta\alpha, \gamma\delta, \delta\gamma \vdash \alpha\gamma(\beta\delta)$,

(ra5) $\alpha \vdash \beta\alpha$.

Logikę Rasiowej oznaczamy symbolem C_r .

⁹⁶ por. WÓJCICKI [1984], s. 30.

⁹⁷ por. WÓJCICKI [1984], s. 34.

⁹⁸ por. RASIOWA [1974], ss. 179-180.

⁹⁹ por. na przykład CZELAKOWSKI [1980], s. 60.

FAKT.3.1.2.

$$C_r \in [C_p]^f.$$

Jak widać, bazowa konsekwencja spójnika porządku różni się od logiki Rasiowej tym, że brak w niej reguły (ra5), słabszej formy prawa poprzedzania.

Bazowa konsekwencja spójnika porządku C_p , która wyznacza obszerną klasę nadlogik standardowych, posiada, odmiennie niż logika Rasiowej bardzo interesujące własności. Otóż jej wzmocnienia, polegające na dodaniu do bazy inferencyjnej C_p pewnych reguł inferencyjnych, dają nam, jak to zostało wykazane w poprzednim rozdziale, zupełnie odmienne znaczenia spójnika - Przez dodanie reguły $\alpha\beta \vdash \beta\alpha$, uzyskujemy logikę identyczności zaś przez dodanie reguły $\vdash \alpha\beta - (\beta\alpha)$; , uzyskujemy logikę równoważności. Zatem spójnik - raz staje się spójnikiem równoważności, zaś w innym przypadku spójnikiem implikacji.

Ujęcie Kabzińskiego z powyższego powodu posiada znakomite zalety, które mogą służyć do filozoficznego badania znaczenia spójników zdaniowych, a w szczególności spójnika równoważności i co najważniejsze, spójnika implikacji.

Kabziński, na stronie jedenastej pracy [JKK], podaje pewne warunki, które mogą spełniać dowolne klasy modeli porządkowych. Warunki te nakłada albo na relację R modelu porządkowego, albo na działania algebry pewnego modelu porządkowego, albo warunki są nałożone równocześnie na działanie algebry pewnego modelu porządkowego i relację R tego modelu.

Oto wspomniane warunki, które są tylko przykładami, bowiem w żadnym przypadku nie wyczerpują wszystkich możliwych:

- (s) jeżeli $a R b$, to $b R a$,
- (S) $a*b = b*a$,
- (C) $a*(b*c) = b*(a*c)$,
- (k) jeżeli $a \in D$, to $b R a$,
- (b) jeżeli $a R b$, to $c*a R c*b$,
- (f) jeżeli $c R a*b$, to $c*a R c*b$.

DEFINICJA.3.1.1.¹⁰⁰

(i) R-MP, w których spełniony (s), nazywamy modelami identycznościowymi,

(ii) R-MP, w których spełniony jest warunek (S), nazywamy modelami równoważnościowymi,

(iii) R-MP, w których spełniony jest warunek (b), nazywamy b-MP,

(iv) b-MP, w których spełniony jest warunek (C), nazywamy BCI-MP,

(v) BCI-MP, w których spełniony jest warunek (k), nazywamy BCK-MP,

(vi) BCI-MP, w których spełniony jest warunek (f), nazywamy R-MP,

(vii) BCK-MP, w których spełniony jest warunek (f), nazywamy H-MP.

Przytoczmy teraz zbiór reguł inferencyjnych¹⁰¹:

- (1) $\alpha\beta, \alpha \vdash \beta$,
- (2) $\vdash \alpha\beta(\beta\gamma(\alpha\gamma))$,
- (3) $\vdash \alpha\beta(\gamma\alpha(\gamma\beta))$,
- (4) $\vdash \alpha\alpha$,
- (5) $\vdash \alpha\alpha\beta\beta$,
- (6) $\vdash \alpha(\alpha\beta)(\alpha\beta)$,
- (7) $\vdash \alpha(\alpha\beta\beta)$,
- (8) $\vdash \alpha(\beta\alpha)$,
- (9) $\vdash \alpha(\alpha\alpha)$,
- (10) $\vdash \beta(\alpha\alpha)$,
- (11) $\vdash \alpha\beta\alpha\alpha$,
- (9*) $\vdash A(AA)$,
- (10*) $\vdash B(\alpha\alpha)$,
- (11*) $\vdash A\beta AA$, duże litery oznaczają formuły o postaci implikacyjnej,
- (12) $\vdash \alpha\beta(\beta\alpha)(\beta\alpha)$,
- (13) $\vdash \alpha(\alpha\beta)(\alpha\beta)\phi(\delta\chi\chi(\chi\delta\delta)\gamma\gamma)$,

¹⁰⁰ por. KABZIŃSKI [JKK], s. 11.

¹⁰¹ por. KABZIŃSKI [JKK], s. 13; por. również prace MEREDITH-PRIOR [1964]; LEMON i inni [1957]; POGORZELSKI [1973].

- (14) $\vdash \alpha\beta\beta(\beta\alpha\alpha)$,
- (15) $\vdash \alpha\beta\gamma(\gamma\alpha(\delta\alpha))$,
- (16) $\vdash \alpha\beta\gamma(\delta(\gamma\chi)(\beta(\delta\chi)))$,
- (17) $\vdash \chi\chi\alpha\beta(\gamma\delta)(\delta\alpha(\lambda(\gamma\alpha)))$,
- (18) $\vdash \alpha\beta\gamma(\delta(\beta(\gamma\chi)(\beta\chi)))$,
- (19) $\vdash (\alpha\beta\gamma(\alpha\beta))(\alpha\beta)$,
- (20) $\vdash \alpha\beta\beta\alpha\gamma(\beta\alpha\alpha\beta\gamma\gamma)$,
- (21) $\vdash \alpha(\beta\gamma)(\alpha\beta(\alpha\gamma))$,

Formuły te są dobrane nieprzypadkowo. Odpowiedni ich dobór pozwala określić niektóre z ważniejszych znanych logik, oczywiście chodzi o ich fragmenty implikacyjne. I tak mamy na przykład:¹⁰²

- (1)-(5),(7) logika BCI,
- (1)-(5),(7),(8) logika BCK,
- (1)-(4),(6) logika T, Ticket-Entailment,
- (1),(2),(5),(6) logika E, Entailment,
- (1),(2),(5),(9*) logika EM, gdzie za A w formule (9*) podstawiamy $\alpha\beta$,
- (1),(2),(4),(6),(7) logika R,
- (1),(2),(6),(10) logika S4,
- (1),(2),(6),(19) logika S5,
- (1),(2),(7),(20) logika RM,
- (1),(2),(8),(11) logika TB, implikacja klasyczna Tarskiego-Bernaysa.

Powyższe spostrzeżenia i fakty zostały przytoczone po to aby pokazać, że fragmenty implikacyjne niektórych spośród znanych logik nieklasycznych, są logikami spójnika porządku.

Grzegorzcyk¹⁰³ argumentował, że jak już zostało wspomniane, spójnik zasługuje aby nazywać go implikacją, jeśli spełnia pewien warunek. Rzeczony warunek to wyrażone konsekwencyjnie twierdzenie o dedukcji oraz reguła odrywania w jednym. Twierdzenie o dedukcji i reguła odrywania

¹⁰² por. KABZIŃSKI [JKK], s. 14; LOGIKA FORMALNA [1987], ss. 345-346. Istnieje dość bogata literatura na ten temat rozszana po różnych czasopismach. Spis najważniejszych prac znajduje się na przykład w POGORZELSKI [1973] oraz LOGIKA FORMALNA [1987].

¹⁰³ por. GRZEGORCZYK [1972].

rzeczywiście obowiązują razem w rachunku intuicjonistycznym. Okazuje się jednak, że poniżej intuicjonizmu, to znaczy w logikach słabszych od intuicjonistycznej, twierdzenie o dedukcji w klasycznym sformułowaniu, nie obowiązuje. Jego osłabione wersje obowiązują np. w logice trójwartościowej Łukasiewicza, czy też w logice S4 Lewisa. Najslabszą logikę znalazł Pogorzelski.¹⁰⁴

Przytoczymy ją z nieistotnymi zmianami:

- (po) $\vdash (\alpha_1 (\alpha_2 (...(\alpha_n \beta))))$ wtw istnieje takie $i=1,...,n$, że $\beta = \alpha_i$, przy dowolnym n ,
- (ra5) $\alpha \vdash \beta\alpha$.

Dla tej logiki pozostaje ważne twierdzenie o dedukcji¹⁰⁵, o postaci:

Jeśli $\beta \in C(X, \alpha)$, to $\alpha \rightarrow \beta \in C(X)$.

FAKT 3.1.3.

Dla logiki Pogorzelskiego nie jest wyprowadzalną regułą odrywania.

Jak widać zakresy obowiązywania reguły odrywania i twierdzenia o dedukcji są różne.

FAKT 3.1.4.¹⁰⁶

Jeśli C jest logiką standardową, dla której zachodzi: $\beta \in C(X, \alpha)$ wtw $\alpha \rightarrow \beta \in C(X)$, to C jest zdefiniowana co najmniej przez następujące reguły z wyżej wymienionej listy; (1),(8),(21).

Na podstawie powyższych spostrzeżeń wnosimy, że poza klasą logik w których reguła odrywania i twierdzenie o dedukcji zbiegają się ze sobą, znajduje się cała gama logik, stworzonych specjalnie dla zakodowania pewnego rozumienia

¹⁰⁴ por. POGORZELSKI [1973], ss. 99-100.

¹⁰⁵ por. POGORZELSKI [1973], ss. 99-100.

¹⁰⁶ por. WÓJCICKI [1984], s. 100; SUSZKO [1961], s. 201.

spójnika implikacji, jak np. logiki Łukasiewicza, czy też niektóre logiki relewantne¹⁰⁷.

Dla wypełnienia naszego postulatu Z1, aby uchwycić za pomocą metod formalnych sens spójnika implikacji należy odpowiedzieć na następujące pytanie. Czy w klasie standardowych logik porządku istnieje logika najsłabsza $C_{\min}$, wyznaczająca podkratę $[C_{\min}]^f$ logik zwanych logikami implikacyjnymi. Odpowiedź na to pytanie nie jest znana. Kabziński zaproponował następujące metateoretyczne kryterium¹⁰⁸, które przytoczymy tutaj w nieco zmienionej postaci;

DEFINICJA 3.1.2.¹⁰⁹

Niesprzeczna logika standardowa spójnika porządku jest logiką implikacyjną wtw reguła $\alpha\beta \vdash \beta\alpha$ ją usprzecznia.

Jeśliby mówić o logikach określonych w bogatszym języku, z większą ilością spójników, to wtedy definicja powyższa odnosiłaby się do fragmentów implikacyjnych logik, czy też jak to nazywa Kabziński $(\rightarrow)$ -reduktów.

Wprowadzimy następującą operację w kracie $[C_p]^f$:

DEFINICJA 3.1.3.

$C_1 + C_2 = Cl_{Q_1 \cup Q_2}$, gdzie $C_1, C_2 \in [C_p]^f$, zaś Q_1 oraz Q_2 są bazami inferencyjnymi odpowiednio konsekwencji C_1, C_2 .

DEFINICJA 3.1.4.

Logika $C \in [C_p]^f$ jest logiką implikacyjną wtw $(C + E) = S$.

Klasę logik implikacyjnych w powyższym sensie oznaczać będziemy symbolem I.

FAKT 3.1.5.

Logika C , i każda jej nadlogika, (określona w języku $\mathcal{P}$) jest logiką implikacyjną.

¹⁰⁷ zagadnienie obowiązywania twierdzenia o dedukcji jest jeszcze bardziej złożone.

¹⁰⁸ por. KABZIŃSKI [JKK], s. 31.

¹⁰⁹ por. KABZIŃSKI [JKK], s. 31.

Definiujemy:

DEFINICJA 3.1.5.

Regułę standardową r_k nazwiemy standardowym osłabieniem reguły standardowej r_i wtw $r_k \subseteq r_i$.

Jak widać z powyższej definicji dowolna reguła standardowa jest osłabieniem samej siebie.

Wprost z definicji wynika również:

FAKT 3.1.6.

Jeśli r_i należy do bazy inferencyjnej Q standardowej konsekwencji C , to dowolne osłabienie r_k reguły r_i , jest regułą wyprowadzalną w Q .

Jako wniosek zaznaczymy, że zbiór osłabień standardowych zawiera się w zbiorze reguł wyprowadzalnych dla pewnej bazy inferencyjnej Q . Inkluzja odwrotna nie zachodzi. Pokazuje to następujący przykład:

Reguła $\alpha \vdash \beta$ jest wyprowadzalna dla konsekwencji $C + E$, nie jest natomiast osłabieniem żadnej z reguł bazy inferencyjnej konsekwencji $C + E$.

DEFINICJA 3.1.6.

Regułę standardową r_i nazwiemy wzmocnieniem standardowym reguły standardowej r_k wtw r_k jest osłabieniem standardowym r_i .

FAKT 3.1.7.

Oslabieniami standardowymi reguły (ra5) jest nieskończony ciąg reguł o postaci:

- $\alpha \vdash \beta\alpha$,
- $\alpha \vdash \beta\alpha\alpha$,
- $\alpha \vdash \beta\alpha\alpha\alpha$,
- ... i.t.d.,

o ogólnej postaci $\alpha \vdash \beta\alpha^{n+1}$.

Jeżeli zastąpimy w logice Rasiowej C_r , regułę (ra5) dowolną regułą z powyższego ciągu osłabień, to uzyskamy ciąg logik, którego poszczególne wyrazy oznaczmy przez $C_{r(n+1)}$.

FAKT.3.1.8.

Dla dowolnego n należącego do zbioru liczb naturalnych N ;

$$C_{r(n+1)} + E = S.$$

WNIOSEK.3.1.1.

Logika Rasiowej nie jest najsłabszą logiką implikacyjną, w klasie $[C_p]^f$, zgodnie z kryterium z def.3.1.4.

Powyższy wniosek jest przesłanką za tym, że logika Rasiowej nie jest najmniejszą logiką, ogólnie mówiąc, kodującą minimalne warunki nakładane na implikację. Drugi argument jest taki, że:

$$\alpha(\beta\beta) \in C_r(\emptyset).$$

Mianowicie, podstawmy do reguły (ra5) $\beta\beta \vdash \alpha(\beta\beta)$, na mocy reguł strukturalnych i $\vdash \beta\beta$, mamy $\vdash \alpha(\beta\beta)$. Teza ta jest uznawana za tak zwany "paradoks implikacji" i nie występuje na przykład w logikach relewantnych.

Logika Rasiowej jest jednak logiką słabą, powstającą z bazowej konsekwencji spójnika porządku przez dodanie tylko jednej reguły, mianowicie (ra5).

Weźmy następującą logikę określoną w naszym języku $\mathcal{L}$. Oznaczać ją będziemy symbolem C_{po} :

$$(po1) \vdash \alpha\alpha,$$

$$(po2) \alpha\beta, \alpha \vdash \beta,$$

$$(po3) \alpha\beta, \beta\gamma \vdash \alpha\gamma,$$

$$(po4) \alpha\beta, \beta\alpha, \gamma\delta, \delta\gamma \vdash \alpha\gamma(\beta\delta),$$

$$(po5) \alpha(\alpha\beta) \vdash \alpha\beta.$$

Od razu widać, że ta logika jest logiką porządku, ponieważ powstaje z tej drugiej przez dodanie reguły (po5). Należy sprawdzić, czy jest to logika implikacyjna. Zachodzi następujący:

FAKT.3.1.9.

$$C_{po} + E \neq S.$$

Weźmy następującą logikę, oznaczaną symbolem C_{op} :

$$(po1) \vdash \alpha\alpha,$$

$$(po2) \alpha\beta, \alpha \vdash \beta,$$

$$(po3) \alpha\beta, \beta\gamma \vdash \alpha\gamma,$$

$$(po4) \alpha\beta, \beta\alpha, \gamma\delta, \delta\gamma \vdash \alpha\gamma(\beta\delta),$$

$$(op) \alpha\beta \vdash \beta.$$

Zauważmy, że reguła (op) jest wzmocnieniem standardowym reguły (po5).

FAKT.3.1.10.

$$C_{op} = S.$$

Jeśli w logice C zastąpimy regułę (op) przez regułę (op1), o postaci $\alpha\beta \vdash \alpha$, to od razu zauważymy, że:

FAKT.3.1.11.

$$C_{op1} = S.$$

Jeśli w logice C_{op} , zastąpimy regułę (op) regułą (ad), o postaci $\alpha, \beta \vdash \alpha\beta$, to uzyskaną logikę oznaczmy, przez C_{ad} . Logika ta, nie jest logiką implikacyjną według kryterium Kabzińskiego.

Zachodzi:

FAKT. 3. 1. 12.

$$(C_{ad} + E) \neq S.$$

Należy tutaj wspomnieć o tym, że słabe logiki porządku były badane przez Kabzińskiego w różnych pracach. Wiele rezultatów uzyskał on szczególnie w badaniach algebraicznych tych logik. Badania prowadzone były w związku z algebraiczną charakterystyką logiki intuicjonistycznej, w postaci stworzonych przez niego algebr równoważnościowych¹¹⁰.

Weźmy następującą logikę C , którą uzyskujemy z bazowej logiki porządku, przez dodanie reguły (do) o postaci $\alpha, \beta\alpha \vdash \beta$.

¹¹⁰ por. na przykład rozprawę doktorską Kabzińskiego.

FAKT.3.1.13.
 $(C_{do} + E) \neq S$.

Weźmy następującą konsekwencję, którą oznaczamy symbolem C_{par} , utworzoną z reguł (p1)-(p4) oraz dodatkowo z reguły (par) o postaci $\alpha\alpha \vdash \beta(\alpha\alpha)$. Reguła ta jest osłabieniem standardowym reguły (ra5).

Zachodzi:
 FAKT.3.1.14
 $(C_{par} + E) = S$.

FAKT.3.1.15.
 Każda reguła standardowa r posiada osłabienie standardowe.

Zdążamy, obecnie aby maksymalnie przybliżyć się do rozwiązania zagadnienia istnienia najmniejszej logiki implikacyjnej w klasie logik porządku. Użyjemy do tego kryterium Kabzińskiego. Wiadomo, że $[C_p]^f$, względem wcześniej zdefiniowanego porządku $\leq_f$, jest podkratą zupełną w kracie $(C^f, \leq_f)$. Jeśli najmniejsza logika implikacyjna C_{min} , w klasie logik implikacyjnych, wyróżnionych na mocy kryterium Kabzińskiego w klasie nadlogik standardowych bazowej konsekwencji spójnika porządku, istnieje, to $C_{min} = \inf I$. Na mocy zupełności kraty $([C_p]^f, \leq_f)$, $\inf I$ istnieje i $\inf I \in [C_p]^f$. Wiadomo również jaką postać ma $\inf I$.¹¹¹

Niech $\inf I = C^f$ w kracie $([C_p]^f, \leq_f)$, to:
 $C^f(X) = \cap \{C(X_f) : X_f \in \text{Fin}X\} : C \in I$.

Konsekwencja, której poszukujemy powinna mieć następujące własności:

- (i) istnienie; czyli, dla dowolnego $X \subseteq S$, $C_{min}(X) \neq \emptyset$,
- (ii) jedyności; jeśli konsekwencje C_1 i C_2 są najmniejszymi w klasie logik implikacyjnych, to $C_1 = C_2$,

(iii) C_{min} ma być standardową nadlogiką bazowej konsekwencji spójnika porządku należąca do klasy logik I.

PRZYPUSZCZENIE.

Nie istnieje konsekwencja spełniająca powyższe warunki (i)-(iii).

Przypuszczam, że taka konsekwencja nie istnieje. Dowód nie jest mi znany oraz zagadnienie wydaje się być nietrywialne. Uzasadnienie tego przypuszczenia mogłoby pójść w następującym kierunku. Załóżmy niewprost, że taka konsekwencja istnieje. Istniałaby jej baza inferencyjna Q , złożona z reguł standardowych. Baza ta składałaby się z reguł tworzących bazową konsekwencję spójnika porządku oraz z dodatkowych reguł standardowych, określających poszukiwaną konsekwencję. Na mocy faktu 3.1.17., każda taka reguła miałaby osłabienie standardowe. Oznaczmy konsekwencję, powstającą z zastąpienia jednej z reguł przez jej osłabienie standardowe, przez C_Q . Owa nowa konsekwencja powinna spełniać warunki: $C_Q \leq C$ i konsekwencje te są nierównoważne. Jeśli C_Q jest niesprzeczna to również C jest również niesprzeczna.

Ponieważ $(C_Q + E) = S$, również $(C + E) = S$ powinno zajść dla naszej poszukiwanej konsekwencji. To przeczyłoby warunkowi, iż C_Q jest konsekwencją najmniejszą.

Poszukiwanie najmniejszej konsekwencji nie byłoby jednak tym samym skazane na niepowodzenie. Wprowadzimy dodatkowo:

DEFINICJA.3.1.7.

Reguła standardowa r_{Qmax} nazywać się będzie regułą bazową, ze względu na daną bazę inferencyjną Q wtw dowolne wzmocnienie standardowe r_k reguły r_{Qmax} ma następującą własność: konsekwencja C_{max} , której bazą inferencyjną jest Q wzbogacona o regułę r_k spełnia, dla dowolnego zbioru formuł $X; C_{max}(X) = S$.

¹¹¹ por. WÓJCICKI [1984], s. 31.

DEFINICJA.3.1.8.

Logika standardowa C , o bazie inferencyjnej Q , nazywać się będzie logiką bazową wtw reguły tworzące bazę Q są bazowe.

WNIOSEK.

Logiki C_p, E, R, C_r są logikami bazowymi.

Przeformulujemy zatem podstawowy problem tego rozdziału. Brzmi on następująco: Czy istnieje bazowa konsekwencja spójnika implikacji w klasie logik porządku?

Odpowiedź na to pytanie pozostaje otwarta.

Przejdziemy teraz do ubocznego wątku względem naszych rozważań, który rzuca interesujące światło na klasę logik porządku.

Kabziński w różnych pracach badał zagadnienie tzw. reduktów równoważnościowych¹¹². Szczególnie ważna jest tutaj praca habilitacyjna Kabzińskiego z roku 1980, w której wprowadza pojęcie nierozróżnialności równoważnościowej.¹¹³

Dla wprowadzenia tego pojęcia poczynimy parę uwag. Od tego momentu rozszerzamy nas roboczy język przez wprowadzenie drugiego spójnika zdaniowego. Ten rozszerzony język oznaczać będziemy symbolem $\mathcal{Z} = (F, \equiv, \rightarrow)$, gdzie $\mathcal{Z}$ jest algebrą absolutnie wolną w klasie algebr podobnych typu (2,2), generowaną przez zbiór zmiennych zdaniowych V . Symbolem FM oznaczmy $\{\equiv\}$ -redukt języka F , to znaczy że $FM \subseteq F$ i w formułach należących do FM nie występuje inny spójnik oprócz $\equiv$. Symbolem C^* oznaczać będziemy dowolną konsekwencję standardową należącą zbudowaną przez dodanie do logiki $C \in \{C_p\}^f$ następującego zbioru reguł:

(b5) $\vdash (\alpha \equiv \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$,

(b6) $\vdash (\alpha \equiv \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$,

(b7) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \alpha \rightarrow (\gamma \rightarrow \beta) \vdash \alpha \rightarrow (\beta \equiv \gamma)$.

¹¹² por. KABZIŃSKI [JKK], [1981], [1984], [JKKa].

¹¹³ por. ważny rezultat odnoszący się do logiki intuicjonistycznej w pracy TAX [1971].

DEFINICJA.3.1.9.¹¹⁴

Logika standardowa $eC^* \in [R]^f$ nazywać się będzie reduktem równoważnościowym logiki C^* wtw dla dowolnego $X \subseteq FM$, $eC^*(X) = C^*(X) \cap FM$.

DEFINICJA.3.1.10.

Logiki C i C' należące do klasy $\{C_p\}^f$, nazywają się logikami równoważnościowo nierozróżnialnymi wtw dla dowolnego $X \subseteq FM$, $C(X) = C'(X)$.

Jak pisze Kabziński¹¹⁵ "...równoważnościowa nierozróżnialność konsekwencji jest pojęciem niezwykle interesującym, a zarazem tajemniczym. Pozostaje takim pojęciem, ponieważ nie zostało ono dotychczas dostatecznie przebadane, natomiast równoważnościowo nierozróżnialne okazują się być konsekwencje znacznie się różniące własnościami."

Znane są częściowe wyniki dotyczące równoważnościowej nierozróżnialności, które tutaj przytoczmy bez dowodu.¹¹⁶

FAKT.3.1.16.

Równoważnościowo nierozróżnialne są następujące konsekwencje:

(i) logiki; trójwartościowa Łukasiewicza i trójwartościowa Heytinga,

(ii) logika określona przez następujące reguły:

(1) $\vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$,

(2) $\vdash (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$,

(3) $\vdash (((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow (((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow \beta)$,

(4) $\vdash ((\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \gamma) \rightarrow (((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma)$,

(5) $\alpha \rightarrow \beta, \alpha \vdash \beta$,

oraz reguły (b5)-(b7), jest równoważnościowo nierozróżnialna z konsekwencją określoną przez powyższe reguły z opuszczeniem reguły (4).

¹¹⁴ por. KABZIŃSKI [JKK], ss. 20-21.

¹¹⁵ KABZIŃSKI [JKK], s. 27.

¹¹⁶ por. KABZIŃSKI [JKK], [1980], [1981], [1984], [JKKa].

(iii) bazowa konsekwencja spójnika porządku określona przez reguły (p1)-(p4) jest równoważnościowo nierozróżnialna z logiką powstającą z C_p przez opuszczenie reguły (p2) i (p4), a zastąpienie ich obu regułą $\alpha \rightarrow \beta, \gamma \rightarrow \delta \vdash (\delta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\gamma \rightarrow \beta)$.

FAKT.3.1.17.¹¹⁷

- (i) $eC_p^* = R$,
- (ii) eC_r^* jest logika R wzbogacona regułą (ad) o postaci $\alpha, \beta \vdash \alpha \equiv \beta$.

Obecnie zajmujemy się zagadnieniem tak zwanych reduktów identycznościowych, analogicznym do zagadnienia reduktów równoważnościowych. Pozostajemy na gruncie języka $\mathcal{Z}$ z dwoma spójnikami. Weźmy następujące reguły:

- (b8) $\alpha \equiv \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$,
- (b9) $\alpha \equiv \beta \vdash \beta \rightarrow \alpha$,
- (b10) $\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \alpha \vdash \alpha \equiv \beta$,
- (b11) $\alpha \equiv \beta, \gamma \equiv \delta \vdash (\alpha \equiv \gamma) \rightarrow (\beta \equiv \delta)$.

Niech konsekwencja $C \in [C_p]^f$ zostanie wzbogacona przez dodanie reguł (b8)-(b11). Oznaczać ją będziemy symbolem C^+ .

DEFINICJA.3.1.11.¹¹⁸

Reduktem identycznościowym konsekwencji C^+ , gdzie $C \in [C_p]^f$, jest konsekwencja $iC^+ = C^+(X) \cap FM$, dla dowolnego $X \subseteq FM$.

FAKT.3.1.18.

$$iE^+ = E.$$

FAKT.3.1.19.

$$iC_p^+ = E.$$

FAKT.3.1.20.

Dla dowolnej konsekwencji spójnika porządku C , zachodzi: $E \leq iC^+$.

Podamy obecnie kilka własności reduktów identycznościowych. Odtąd redukt dowolnej niesprzecznej konsekwencji spójnika porządku C , oznaczać będziemy symbolem iC , opuszczamy plus przy symbolu konsekwencji. Określimy teraz funkcję przeprowadzającą klasę wszystkich niesprzecznych konsekwencji spójnika porządku $[C_p]^f$ w klasę niesprzecznych konsekwencji spójnika identyczności $[E]^f$. Szukaną funkcją jest $i: [C_p]^f \rightarrow [E]^f$. Należy wykazać, że jest to funkcja.

FAKT.3.1.21.

Jeśli $C, C' \in [C_p]^f$ oraz $C = C'$, to $iC = iC'$.

FAKT.3.1.22.

Jeśli $C \leq C'$ to $iC \leq iC'$.

Funkcję $i: [C_p]^f \rightarrow [E]^f$ nazywać będziemy operacją redukowania. Funkcja ta nie jest różnowartościowa, co wynika wprost z faktu 3.1.22. oraz faktu 3.1.21.

Na tym kończymy rozdział trzeci, który ma charakter nieco bardziej formalny. Jednak tworzy on istotną część niniejszej rozprawy, przedstawiając wiele faktów formalnych, które staną się "bazą" dla dalszych rozważań.

¹¹⁷ por. KABZIŃSKI [JKK], [1981], [1984], [JKKa].

¹¹⁸ pomysł tej definicji i wprowadzenie tego pojęcia zrodził się w wyniku dyskusji z Jackiem K. Kabzińskim.

ROZDZIAŁ CZWARTY

Jednym z najważniejszych zagadnień filozoficznych jest zagadnienie pewności¹¹⁹. Cokolwiek bowiem filozof twierdzi, powinien wiedzieć czy jest to twierdzenie pewne, czy też nie. Bez rozstrzygnięcia tego problemu trudno uznać jakikolwiek przejaw myśli filozoficznej za całkowicie poważny. Dokładniej filozof powinien zdawać sobie sprawę z tego, jaki stopień pewności przysługuje jego twierdzeniom.¹²⁰ Nawet więcej, pojęcie prawdy jawi się jako późniejsze od pewności bo przecież to prawda ma być pewna, a nie pewność prawdziwa.

Ujmując rzecz historycznie, można spojrzeć na dzieje filozofii jako na dzieje poszukiwania pewności. Wydaje się, że pragnienie uzyskania pewności poznawczej pozostawało naczelnym celem, niektórych przynajmniej, filozofów.¹²¹

Już w starożytności podano rozwiązanie zagadnienia pewności, w postaci sceptycyzmu. Było to naturalnie rozwiązanie negatywne, utrzymujące, iż wszystko co poznajemy i twierdzimy jest obarczone istotną niepewnością.

Podstawowy zarzut wobec argumentów sceptycznych jest taki, że do ich wypowiedzenia należy mieć już jakieś pojęcie pewności. Jeśli tego nie ma, to argumenty sceptyków są tyle samo warte co każde inne niesprzeczne twierdzenie.

Jak uważa Kołakowski¹²², istnieje w filozofii europejskiej silna antysceptyczna tradycja, do której zaliczamy Sokratesa, Platona, Kartezjusza, Leibniza, Kanta oraz Husserla. Są to nazwiska najbardziej znane. Celem tych wymienionych filozofów było osiągnięcie pewności. Zazwyczaj chodziło o jakiś jej rodzaj. Podstawowym wymaganiem, czy też warunkiem powyższego dążenia, był absolutny, obiektywny charakter pew-

¹¹⁹ por. WITTGENSTEIN [1993].

¹²⁰ może się wydać interesującym to, że nauka o pewności twierdzeń została rozwinięta na terenie teologii.

¹²¹ por. rozważania Kołakowskiego w książce [1987].

¹²² KOŁAKOWSKI [1987], s. 5.

ności. Subiektywne poczucie pewności znane Kartezjuszowi i Wittgensteinowi w odróżnieniu od obiektywnego, nie posiada dużego znaczenia filozoficznego¹²³.

Nawet pobieżna lektura pracy Wittgensteina "O pewności", napisanej prawie na łożu śmierci, pozwala stwierdzić, jak skomplikowanym, ważnym i wysoce niejasnym jest zagadnienie pewności. Przytoczmy wypowiedź Kartezjusza: "... Przed kilkoma laty już spostrzegłem, jak wiele rzeczy fałszywych uważałem w swojej młodości za prawdziwe i jak wątpliwe jest to wszystko, co później na ich podstawie zbudowałem; [doszedłem więc do przekonania], że jeżeli chcę nareszcie coś pewnego i trwałego w naukach ustalić, to trzeba raz w życiu z gruntu wszystko obalić i na nowo rozpocząć od pierwszych podstaw. Zdawało mi się jednak, że jest to olbrzymie przedsięwzięcie..."¹²⁴.

Dążenie do pewności nie ma charakteru praktycznego, jak podkreśla Kołakowski¹²⁵, nie chodzi o poszukiwanie wiedzy technicznie godnej zaufania, ale o poszukiwanie "... prawdy i pewności jako wartości samoistnych"¹²⁶.

Obszerne zagadnienie pewności nie zostało dotychczas całościowo i wyczerpująco opracowane. Zadanie takie stoi jeszcze przed filozofami jako ważne wyzwanie. Ten program maksymalistyczny nie jest przedmiotem niniejszej pracy, lecz jedynie jego szczegółowy przypadek.

Chodzi o tak zwane zagadnienie pewności językowej, które spróbujemy obecnie bliżej nakreślić.

Zakładając, że cokolwiek jesteśmy w stanie wiedzieć, np. w postaci warunkowej, zakładamy tym samym, iż jesteśmy to coś w stanie jakoś wypowiedzieć, zatem posłużyć się językiem najogólniej pojętym. Na mocy naszego założenia jesteśmy w stanie, dzięki językowi, najogólniej pojętemu, zawartość naszej wiedzy w owym języku przechować i przekazać.

Już Sokrates przeciwstawiał się sofistom, którzy za pomocą sprytnych rozumowań potrafili dowodzić, na podstawie

dowolnych przesłanek, dowolne wnioski. Jedną z zasadniczych przyczyn umożliwiających im taki stan rzeczy była wieloznaczność pojęć. Dlatego Sokrates prowadził z nimi dialogi i stosując wprowadzone przez siebie metody rozumowań (elenktyczną i maieutyczną), odkrywał znaczenia słów i dochodził do jednoznaczności słów, czy też pojęć.¹²⁷

Wielki filozof czasów nowożytnych Leibniz, również widział potrzebę uczynienia z języka narzędzia dzięki któremu ludzie, a w szczególności filozofowie mogliby się porozumiewać w taki sposób by doprowadzić do wzajemnego rozumienia lub rozstrzygnięcia który z adwersarzy ma rację.

Przyjmijmy zatem, jako warunek konieczny pewności językowej – znajomość znaczeń poszczególnych terminów wchodzących w skład danego wyrażenia, które ma być elementem językowego porozumienia. Jest problemem czy jednoznaczność jest warunkiem koniecznym do uzyskania pewności językowej. Wydaje się, że jest tak nawet w języku potocznym. Weźmy następujący przykład: "Zamknąłem zamek.". Jak wiadomo wyrażenie "zamek" jest w języku polskim wieloznaczne, zatem nasze zdanie będzie prowadziło do wątpliwości, a nie do pewności. W pewnych sytuacjach można by było mieć wątpliwość, jak należy je rozumieć. Wydaje się zatem, że jednoznaczność należy do koniecznych warunków uzyskiwania pewności językowej. Mogłoby być tak, że do porozumienia pewnego, wystarczałyby znajomość wszystkich znaczeń terminów wchodzących w skład całego zdania. Porozumienie w tym przypadku mogłoby być pewnym, gdybyśmy posiadali metodę eliminacji możliwych znaczeń. Pomocą służyłyby tutaj językowy i pozajęzykowy kontekst wypowiedzi. Co się stanie wtedy gdy możliwych znaczeń jakiegoś terminu będzie nieskończona mnogość?

Zazwyczaj mówienie o jednoznaczności w przypadku języków formalnych jest zbędne, gdyż warunek ten jest założony już przy konstrukcji języka formalnego. Czy tak jest zawsze? Spróbujemy na to pytanie odpowiedzieć w dalszym ciągu naszych rozważań.

¹²³ por. KOŁAKOWSKI [1987], s. 9; WITTGENSTEIN [1993], nr. 194.

¹²⁴ DESCARTES [1958], s. 22, cytuję za tłumaczeniem polskim.

¹²⁵ por. KOŁAKOWSKI [1987], s. 5.

¹²⁶ KOŁAKOWSKI [1987], s. 5.

¹²⁷ por. znakomitą pracę Gawrońskiego; GAWROŃSKI [1984], ss. 39-64.

Przyjmijmy teraz, że dysponujemy jakimś językiem, w którym znaczenie wszystkich zdań prostych, tzn. takich które nie są złożone, jest jednoznacznie określone. Przyjmijmy również, że dysponujemy w naszym języku możliwością budowania zdań złożonych za pomocą spójników zdaniowych, a w szczególności za pomocą tego co zwiemy okresem warunkowym czy też implikacją. Jak zauważono w poprzednim rozdziale, Quine opowiadał się przeciwko stawianiu równości w rozumieniu dwóch powyższych terminów. Quine uważa, że oba te wyrażenia należą do dwóch zupełnie różnych kategorii semantycznych; okres warunkowy jest, wg. niego, spójnikiem zdaniowym od dwóch argumentów zdaniowych, zaś implikacja jest funktorem zdaniotwórczym od dwóch argumentów nazwowych. Rzeczywiście tak jest, ale tylko dla niektórych ze znaczeń angielskiego "implication". "The American College Dictionary" z roku 1953 podaje osiem znaczeń tego terminu. Wydaje się, że propozycja Quine'a jest bardziej zręcznym unikiem aniżeli dobrym rozwiązaniem. Co znaczy słowo "implikacja" w języku polskim. Słowo to jest obcego pochodzenia. Pochodzi od łacińskiego "implicatio" co znaczy "związanie" lub "połączenie".¹²⁸ Rzeczywiście jest zgodnym ze zwyczajem języka polskiego wypowiedzenie następującego zdania:

"Zdanie 'Pada deszcz' implikuje zdanie 'Jezdnia będzie mokra'".

Wyraz "implikuje" występuje w tym przypadku jako funktor zdaniotwórczy od dwóch argumentów nazwowych. Używamy jednak słowa "implikacja" w następującym sensie: "Oto np. implikacja 'Jeżeli ptaki mają skrzydła, to niedziela jest dniem świątecznym', prawdziwa wobec testu matrycy, ...". Fragment ten pochodzi ze znanego podręcznika historii logiki.¹²⁹

Termin "implikacja" nie występuje tutaj w roli funktora zdaniotwórczego od argumentów nazwowych.

Nie chcemy przesądzać o tym, jakie jest znaczenie okresu warunkowego w języku potocznym.

¹²⁸ por. Słownik wyrazów obcych, (red.) J. Tokarski, PWN, Warszawa 1979, s. 300.

¹²⁹ KOTARBIŃSKI [1990], s. 139.

Przedmiotem naszego zainteresowania jest to znaczenie, które:

- a) czyni z okresu warunkowego "jeżeli...,to..." spójnik zdaniowy,
- b) które koduje w języku rachunku zdań funktor zwany implikacją.

Oba powyższe warunki są dość restrykcyjne. Wydaje się jednak, że rozstrzygnięcie naszego zagadnienia w tak wąskim zakresie, rzuci nieco światła na zagadnienia ogólniejsze.

Termin "znaczenie" sam jest na tyle niejasny, że aby można go w pełni odpowiedzialnie używać, należy warunkowo wyróżnić jedno ze sposobów jego rozumienia i nim się posługiwać konsekwentnie. Tak postąpimy w naszym przypadku wzorując się na naukach dedukcyjnych, które swą pewność zawdzięczają właśnie warunkowości swych wypowiedzi.

Najpierw uczynimy parę zastrzeżeń formułowanych w literaturze przedmiotu odnośnie teorii znaczenia.¹³⁰

a1) znaczenie słów jest pochodne w stosunku do znaczenia zdań,

a2) znaczenie zdań jest ściśle związane z pragmatycznym aktem wyrażania, aby znać znaczenie zdania należy znać rodzaj pragmatyczny aktu lingwistycznego, którym jest dane zdanie, oraz jego zawartość,

a3) ogólna teoria znaczenia powinna być zrelatywizowana do badania znaczenia w konkretnym języku, zaś ta ostatnia powinna zawierać przynajmniej dwie składowe;

- teorię sensu (theory of sens) określającą zawartość aktu lingwistycznego,

- teorię wyrazu (theory of force), zawierającą; komponent aktu mowy, pozwalający na określenie pragmatycznej postawy (uznawania, rozkazywania, pytania, etc.) oraz komponent syntaktyczny pozwalający zidentyfikować postawę pragmatyczną z trybem gramatycznym,

- pojęcie-klucz (key concept), które pozwala na jednorodne użycie słów wchodzących w skład zdania, w terminach tego pojęcia-klucza ujmujemy zawartość wszystkich danych zdań

¹³⁰ por. przeglądowy artykuł SUNDHOLM [1986] oraz PLATTS [1980].

oraz pozwala na transformację różnorodnie użytych zdań do jednego trybu.¹³¹

W naszych rozważaniach uczynimy następujące rozstrzygnięcia, których nie poddajemy pod dyskusję:

1) relatywizujemy nasze rozważania do języka formalnego rachunku zdań,¹³²

2) zdaniami w naszym języku są formuły rachunku zdań,

3) pragmatyczna postawa to postawa asercji,

4) zdania wypowiedziane są w trybie indykatywnym,

5) rolę pojęcia klucza odgrywać będzie, to co zwykle uchodzi za takie pojęcie, mianowicie semantyczne pojęcie prawdziwości.¹³³

Istnieje wśród komentatorów filozofii Wittgensteina poważny problem interpretacyjny dotyczący koncepcji gier językowych, a przede wszystkim określenia znaczenia. Kluczową rolę odgrywają te fragmenty 'Dociekań filozoficznych', gdzie Wittgenstein twierdzi, że znaczeniem słowa jest jego użycie w języku.¹³⁴

Znakomitym wyjaśnieniem błędów interpretacyjnych związanych z tymi zagadnieniami zawiera praca Hintikka "Gry językowe". Hintikka zdecydowanie podkreśla ten fakt iż gry językowe rozgrywają się nie w języku lecz poprzez język.¹³⁵ Użycie wyrażenia nie wyczerpuje się w żaden sposób w języku, lecz dokonuje się również poprzez działania pozajęzykowe.

Przedmiotem naszego zainteresowania jest podanie znaczenia implikacji dla pewnego języka formalnego. Jak już zostało stwierdzone, tym językiem formalnym jest język rachunku zdań z jednym spójnikiem zdaniowym. Dla większego bezpieczeństwa powiemy, że znaczeniem terminu nie jest sposób jego użycia formalnego, lecz że znaczenie terminu jest jednoznacznie wyznaczone poprzez jego językowe użycie.¹³⁶

¹³¹ por. PLATTS [1980], ss. 2-3.

¹³² jest osobnym zagadnieniem, czy język rachunku zdań jest wystarczająco precyzyjnym narzędziem do badania znaczeń spójników zdaniowych. W tej sprawie por. CZERWIŃSKI [1971].

¹³³ są też ujęcia alternatywne, por. na przykład PRAWITZ [1976], ss. 5-6; również SUNDHOLM [1986], ss. 472-473.

¹³⁴ WITTGENSTEIN [1972], ss. 21-22.

¹³⁵ HINTIKKA [1992], s. 465.

¹³⁶ por. PRAWITZ [1976], ss. 3-9.

Skupiając swą uwagę na spójnikach zdaniowych, a w szczególności na spójniku implikacji mówimy, że znaczenie spójnika implikacji jest jednoznacznie wyznaczone przez ogół jego możliwych formalnych kontekstów.

Argumentując za powyższym rozumieniem znaczenia spójnika zdaniowego przytoczymy następujący przykład:

Nierówność algebraiczna o postaci $x + 1 \geq 3$ zwiera dobrze znane symbole liczbowe 1 oraz 3, które są liczbami naturalnymi. Owa nierówność zawiera symbol "x", który oprócz tego, że jest znakiem, nie posiada żadnego znaczenia. Jeśli powiemy, że zmienna reprezentuje liczby, to symbol "x" reprezentuje elementy zbioru liczb naturalnych, które są większe lub równe 2. Symbol "x" w naszej nierówności jest wieloznaczny. Jeżeli do tej nierówności dorzucimy drugą nierówność o postaci $x \leq 3$, to symbol "x" w dalszym ciągu nie jest jednoznaczny, dopiero równanie $x : 2 = 1$ ujednoznacznia rozumienie symbolu "x".

Wiemy dopiero z trzech powyższych "użyć", że $x = 2$. Na gruncie liczb naturalnych i działań w nich określonych, jedyne znaczenie jakie może mieć "x" to znaczenie przypisane symbolowi 2. Użycie znaku jednoznacznie wyznaczyło jego znaczenie, które, jak się wydaje, jest czymś różnym od samego użycia.¹³⁷

Oczywiście te powyższe rozważania odbiegają od tradycyjnego rozumienia roli zmiennej w naukach formalnych.

Pokazano w ten sposób jak użycie, w tym przypadku językowe przyczynia się do ujednolicenia rozumienia symbolu.

Weźmy teraz następujący symbol @. Nie posiada on żadnego znaczenia w tym momencie. Sposób jego rozumienia ma zostać ustalony. Można to uczynić co najmniej na dwa sposoby:

a) pierwszy sposób polegać będzie na użyciu tego symbolu;

$\vdash @@\alpha-\beta@-@@\alpha-\beta@@$,

$@\alpha-\beta@$, $\alpha \vdash \beta$,

$\vdash @\alpha-\alpha@$,

gdyby w ten sposób używać tego symbolu wystarczająco długo, to okazałoby się, że ów symbol pełni rolę nawiasu,

¹³⁷ por. PRAWITZ [1976], ss. 5-6.

b) znaczenie tego symbolu można wprowadzić przez określenie go wprost jako nawiasu.

Przy drugim sposobie odwołał się do języka potocznego, w którym występuje słowo "nawias" i ma jakieś potoczne znaczenie. Przykład nawiasu pokazuje, że istnieją w naukach formalnych takie symbole, które nie zostały osobno zdefiniowane w sposób formalny, a ich znaczenie zostało niejako wzięte z języka potocznego. Wprawdzie nawiasy nie rodzą nieporozumień np. w logice, gdyż prawdopodobnie mają również w języku potocznym w miarę ustalone znaczenie.

Okres warunkowy, zwany przez nas zamiennie implikacją, jako spójnik zdaniowy posiada znaczenie w języku naturalnym. To znaczenie jest bardzo różnorodne. Zadaniem rachunków zdaniowych jest próba uchwycenia znaczenia spójnika implikacji. W rozdziale pierwszym niniejszej pracy zaprezentowano próby uchwycenia znaczenia spójników zdaniowych na dwa sposoby. Z jednej strony ustalano sposób rozumienia spójników przez odwołanie się do operacji konsekwencji, z drugiej strony do wartościowań prawdziwościowych. Słabe strony metodologiczne obu tych określeń zostały wskazane wcześniej. W istocie oba te określenia, jeśli chodzi o spójnik implikacji są bardzo podobne do charakterystyki w klasie logik porządku. We wszystkich trzech przypadkach sposoby rozumienia spójników zdaniowych przybliżone zostają poprzez pojęcia metalogiczne, odpowiednio; operacji konsekwencji, wartościowań prawdziwościowych, relacji konsekwencji. Zarówno bowiem, jak zostało wskazane wcześniej, te trzy pojęcia metalogiczne, komplementarnie charakteryzują ten sam przedmiot. Filozoficznie jednak, dla uchwycenia znaczenia jakiegoś spójnika zdaniowego, trzeba takiego ujęcia, które w sposób maksymalnie jasny pozwalałoby zrozumieć jak dany spójnik działa. Określenie spójników poprzez operację konsekwencji oraz przez zbiór wartościowań nie spełnia tego warunku, jest nieczytelne. Nie znaczy to jednak, że całościowa charakterystyka spójników zdaniowych na którejs z wymienionych dróg nie jest możliwa.

W tym miejscu przypomnimy zagadnienia związane z tzw. Tezą Churcha. Można ją sformułować następująco:¹³⁸

Klasa funkcji określonych w zbiorze liczb naturalnych zwanych intuicyjnie efektywnie obliczalnymi pokrywa się z klasą funkcji rekurencyjnych dla liczb naturalnych.

Teza ta, zwana czasem tezą Churcha-Turinga, wyraża spostrzeżenie, iż klasa tych funkcji, określonych w zbiorze liczb naturalnych, które są obliczalne w sensie intuicyjnym jest identyczna z klasą funkcji rekurencyjnych. Wspominamy o tym z ważnego powodu. Oto okazało się, że klasa funkcji zwanych rekurencyjnymi pokrywa się zakresowo z klasą funkcji obliczalnych w sensie maszyny Turinga, z definicją Posta oraz z określeniem za pomocą rachunku lambda Churcha. Dowód równoważności tych określeń ma charakter matematyczny. Interesujące jest tutaj to, że jeden przedmiot jakim są funkcje efektywnie obliczalne, w sensie intuicyjnym, zostaje przybliżony za pomocą definicji mających charakter ściśle matematyczny. Mówiąc inaczej, "pojęcie" potoczne zostaje sformalizowane. Podobnie jak zostało zauważone w rozdziale trzecim, trzy różne matematyczne byty, charakteryzujący jeden przedmiot, którym w tym przypadku są funkcje efektywnie obliczalne. Teza Churcha, jak to zostało wielokrotnie wykazane, nie jest dowodliwa w sposób matematyczny. Przynajmniej w matematyce będącej na obecnym etapie rozwoju. Powyższe spostrzeżenia są argumentem za słusznością platońskiego stanowiska odnośnie istnienia bytów matematycznych.

Inkluzja klasy funkcji rekurencyjnych w klasie funkcji efektywnie obliczalnych nie została, o ile mi wiadomo, nigdzie poddana w wątpliwość. Wątpliwa, a przynajmniej niedowodliwa w sensie matematycznym obecnie, jest inkluzja odwrotna. Gdyby się okazało kiedyś, że ta druga inkluzja nie zachodzi, to mógłby być to argument za tym iż "Rzeczywistość", uchwytywana za pomocą umysłu, jest istotnie bogatsza od możliwości wyrażania w języku którym dysponujemy. Mówiąc krótko, "Rzeczywistość" przekracza język.

¹³⁸ por. CHURCH [1959], s. 333; STAHL [1981], s. 63.

Zupełnie analogicznie, jak w wypadku efektywnej obliczalności, tak samo w wypadku okresu warunkowego z języka potocznego, (w tym rozumieniu o które nam chodzi), możemy wypowiedzieć następującą tezę (T):

Klasa logik implikacyjnych I w klasie logik porządku pokrywa się zakresowo z klasą możliwych znaczeń, czy też sposobów rozumienia, okresu warunkowego z języka potocznego, jako spójnika zdaniowego.

Wspomniana klasa logik implikacyjnych, co jest naszym przypuszczeniem, może zostać również scharakteryzowana za pomocą metod przedstawionych w rozdziale pierwszym niniejszej pracy. Metody te nie zostały jeszcze wystarczająco rozwinięte w podobny sposób jak logiki porządku, a dokładnie, jak relacja inferencji, wydaje się jednak, że skuteczność tych metod może być podobna.

Jeżeli w przypadku tezy Churcha, inkluzja funkcji obliczalnych w sensie intuicyjnym w zbiorze funkcji rekurencyjnych, nie jest całkowicie pewna, tak w przypadku naszej tezy sprawa przedstawia się nieco inaczej.

Człowiek jest w stanie wymyśleć w skończonym czasie, jedynie skończony zbiór różnych znaczeń określonego terminu. To ostatnie stwierdzenie nie jest całkowicie oczywiste. Mogłoby być tak, że w danym skończonym czasie człowiek generowałby nieskończone klasy znaczeń. Jeśli jednak założymy, że każde ze znaczeń należy podać kolejno i osobno to wtedy konstruowałby jedynie skończony zbiór znaczeń jakiegoś ustalonego słowa. Na gruncie logik porządku uzyskano zdumiewający wynik. Okazało się iż logik implikacyjnych jest nieskończenie wiele. Jeśli nasza teza miałaby zachować prawdziwość, to musiałoby być również nieskończenie wiele możliwych rozumień okresu warunkowego w języku potocznym. Należy tu z całą mocą podkreślić, że chodzi o rozumienia możliwe, a nie aktualnie dokonywane, czy też kiedykolwiek pomyslane. Jeśli takie zastrzeżenie poczynimy, to pozostanie jeszcze jeden problem do rozważenia. W klasie logik implikacyjnych mamy co najwyżej przeliczalnie wiele logik, które posiadają skończoną bazę inferencyjną, zaś pozostałe logiki mają bazę inferencyjną przeliczalną. Rodzi to py-

tanie o to czy człowiek może swe rozumienie okresu warunkowego, w języku potocznym, charakteryzować poprzez nieskończony zbiór warunków.

Być może człowiek nie może aktualnie, w sensie rzeczywistej realizacji, charakteryzować za pomocą nieskończonej ilości warunków swego rozumienia okresu warunkowego, ale owo rozumienie może posiadać, to znaczy może posiadać takie rozumienie, które wymagałoby nieskończonej charakterystyki. Trudno jest właściwie w miarę jasno wyobrazić sobie wyjaśnienie sposobu rozumienia okresu warunkowego w terminach należących do języka potocznego. Wspomniane w poprzednim rozdziale, usiłowanie rozwiązania zagadnienia tak zwanego "paradoksu implikacji" dokonane przez Kazimierza Ajdukiewicza, jest szczególnym przypadkiem naszej tezy (T). Zbigniew Czerwiński, w artykule "O paradoksie implikacji", odniósł się krytycznie do koncepcji Ajdukiewicza, wskazując na niejasny sens terminu "stwierdza" odnoszonego przez Ajdukiewicza do zdań.

Zasadniczo zgadzam się z krytycznymi uwagami Czerwińskiego. Chciałbym zwrócić uwagę na to co przez Czerwińskiego nie zostało poddane w wątpliwość. Píše on: "argumentacja prof. Ajdukiewicza opiera się na założeniu:

(1) zdanie " $p \rightarrow q$ " (strzałka oznacza potoczny okres warunkowy) jest na gruncie mowy potocznej równoważne zdaniu "nie p lub q", ..." i nieco dalej "przyjmuję założenie (1)".¹³⁹

Otóż wydaje się, że również na gruncie języka potocznego, założenie to jest nie do utrzymania. Stwierdzona przez Ajdukiewicza równoważność ma tutaj charakter metajęzykowy, jednak równoważność jest spójnikiem zależnym od okresu warunkowego. Dla jej wykazania w tym przypadku, należałoby podać sposób rozumienia samego okresu warunkowego. Jeśli założymy, jak to wykazuje Ajdukiewicz, że okres warunkowy stwierdza to samo co implikacja materialna, choć co innego wyraża, to dla wykazania niezachodzenia równoważności trzeba dać przykład gdy " $p \rightarrow q$ " jest prawdziwa, zaś alternatywa "nie p lub q" przyjmie inną wartość lub gdy okres

¹³⁹ CZERWIŃSKI [1958], s. 267.

warunkowy będzie fałszywy, zaś alternatywa przyjmie inną wartość.

Weźmy następujące dwa zdania jako przykład:

"Jeżeli rozwinięcie dziesiętne liczby π zawiera następujący ciąg cyfr 123456789, to rozwinięcie dziesiętne liczby π zawiera ciąg cyfr o postaci 12345." oraz "Nieprawda, że rozwinięcie dziesiętne liczby π zawiera następujący ciąg cyfr 123456789, lub rozwinięcie dziesiętne liczby π zawiera ciąg cyfr o postaci 12345."

Na gruncie języka potocznego uznamy za prawdziwe zdanie pierwsze z użyciem okresu warunkowego, zaś zdanie alternatywne pozostanie nierozstrzygnięte. Będzie tak w tym przypadku, gdy prawdziwość alternatywy utożsamimy z dowodem jednego z jej członów. Argument ten ma intuicjonistyczną proveniencję. Nie przeszkadza to jednak w jego uznaniu, również na gruncie języka potocznego, mimo występowania w nim liczby niewymiernej π .¹⁴⁰

Powracamy obecnie do dalszej dyskusji nad tezą (T). Teza ta, jest analogiczna do tezy Churcha oraz innych formalnych ujęć rozmaitych "pojęć potocznych". Ten ostatni termin dlatego pojawia się w cudzysłowie, gdyż nie wiadomo do końca czym jest pojęcie. Dla większego bezpieczeństwa intelektualnego, mówić będziemy o terminach języka potocznego, czyli naturalnego. Znaczna część matematyki i logiki są próbą językowego przedstawienia, a zatem w miarę jednoznacznego rozumienia i posługiwania się terminami potocznymi. W tym nurcie leżą; teoria mnogości, arytmetyka liczb naturalnych, podstawowe rachunki logiczne, zdaniowy i predykatów, teoria modeli, teoria obliczalności i inne. Podręczniki matematyki zawierają na przykład takie terminy jak; przestrzeń, węzeł, koło, okrąg, ciąg, szereg, granica i wiele innych. Wszystko są to terminy potoczne, mające w matematyce swe dobrze ustalone znaczenia. Terminy matematyczne i logiczne nie są jednorodne tym sensie, że niektóre z nich są definiowane za pomocą innych. Przedmiotem naszego zainteresowania są terminy mające charakter pierwotny, to znaczy te, których zna-

¹⁴⁰ dziękuję Panu Dr. Tomaszowi Plackowi za dyskusję na ten temat.

czenia nie da się sprowadzić do innych znaczeń terminów formalnych.

Dobłą ilustracją tych zagadnień jest problem pochodzenia liczb naturalnych. Znane powiedzenie Kroneckera: "liczby naturalne stworzył Pan Bóg, wszystkie inne są wytworem ludzkim"¹⁴¹, zgodne jest zasadniczo z nurtem intuicjonistycznym w filozofii matematyki, według którego liczby naturalne są wytworem pra-intuicji wywodzącej się z apriorycznej formy czasu.¹⁴² Zaś zgodnie ze znanym podejściem logicystycznym Fregego, liczby naturalne da się zdefiniować sprowadzając je do pojęć teorii zbiorów. Pierwotny aplauz tyżący się wyniku Fregego, oczywiście po przyswojeniu sobie jego rezultatu, został przyhamowany przez znane problemy, które w związku z tym zaczęły się pojawiać.¹⁴³ Okazało się, że obiekty skonstruowane przez Fregego są dobrym modelem arytmetyki Peano. Nie jest to jedyny model. Na mocy twierdzenia Skolem-Loewenheima arytmetyka Peano posiada nieskończenie wiele modeli nieizomorficznych i niestandardowych.¹⁴⁴ Możliwe jest jeszcze inne sformułowanie powyższego spostrzeżenia. W nawiązaniu do krytyki Tarskiego definicji prawdy, która to definicja stała się podstawą działu logiki zwanego teorią modeli, powiemy, że model w sensie logicznym, jako pewna struktura relacyjna, nie jest rzeczywistością w sensie filozoficznym jako Rzeczywistość. Model jest właściwie pewnym specyficznym przedstawieniem określonego języka, a dokładnie przedstawieniem pewnego zbioru zdań atomowych. Interpretacja danej teorii logicznej w modelu jest w istocie interpretacją w innym języku. Relacja spełniania, zachodząca pomiędzy wyrażeniami danej teorii formalnej a modelem, może być rozumiana jako sposób nadawania znaczenia symbolom języka formalnego.

¹⁴¹ MOSTOWSKI [1948], s. 173.

¹⁴² por. BROUWER [1986]. Rozumiem, że liczba jeden i liczba dwa są uchwytowane w ten sposób.

¹⁴³ por. MOSTOWSKI [1948], ss. 172 i następne.

¹⁴⁴ to interesujące zagadnienie ma swoje rozwinięcie, por. GRZEGORCZYK [1971].

W tym sformułowaniu nie istnieją modele niestandardowe dla danej teorii, lecz istnieją inne znaczenia znaków pierwotnych teorii. W szczególności, na mocy wspomnianego twierdzenia Skolema-Loewenheima, owych znaczeń może być dowolnie nieskończenie wiele. Chodzi o istotnie różne znaczenia¹⁴⁵, w sformułowaniu semantyczno-logicznym chodzi o teorie niekategoryczne.

Przeczyłoby to podstawowemu celowi i sensowi procesu formalizacji jakim jest uściślenie terminów potocznych. Okazuje się, biorąc pod uwagę znane inne ograniczenia wynikające z samej istoty formalizmów, że w przeciwieństwie do systemów nieformalnych filozoficznych, logika sama jest świadoma swoich wewnętrznych "słabości", wyrażając je w postaci ściśle sformułowanych twierdzeń. Marzenie Leibniza dotyczące ścisłości w jego charakteristica universalis nie może zostać spełnione na drodze dotychczasowego rozwoju logiki formalnej. Być może zamierzenie Leibniza zostanie w przyszłości przez kogoś w jakiś sposób zrealizowane. Jednak obecnie znane metody formalne zawodzą pod wyżej wymienionym względem.

Program Fregego i Russella dotyczący sprowadzenia matematyki do logiki, zwany logicyzmem nie powiódł się w niektórych punktach. Dzięki tym myślicielom, będącym jednymi z twórców logiki formalnej wiemy dzisiaj, że pojęcia logiczne, szczególnie logika pierwszego rzędu, czy też rachunek zdań, wchodzą w skład wielu, o ile nie każdej nauki. Na przykład rachunek zdań pozwala na precyzyjne określenie sposobu budowania zdań złożonych oraz dopuszczalnych inferencji występujących w danej nauce. Każda bowiem nauka, która wyniki swych badań formułuje w zdaniach jakiegoś języka musi z konieczności oprzeć swe reguły budowania zdań złożonych na, w sposób świadomy metodologicznie, wybranej logice zdaniowej. Jeśli tej świadomości nie ma, natychmiast pojawiają się przeróżnego rodzaju komplikacje, włącznie z możliwością zbudowania jakiejś antynomii. Dobrą egzemplifikacją takiego "niebezpieczeństwa" może być odmienny kształt matematyki intuicjonistycznej i klasycznej. W szczególności odmienność

¹⁴⁵ por. GRZEGORCZYK [1971], s. 296.

arytmetyki w jednym i drugim wydaniu. Jak można właściwie stwierdzić na podstawie prac twórców intuicjonizmu, choć sami explicite tego tak nie formułowali, odmienność ujęć matematyki jest spowodowana między innymi odmiennością znaczeń niektórych spójników zdaniowych.¹⁴⁶

Wszystkie te uwagi dotyczą w większym jeszcze stopniu języka potocznego. Jeśli świadomość wyboru znaczenia spójników zdaniowych w poszczególnych naukach może być tak istotna, to tym bardziej w języku potocznym. Odmienność znaczeń okresu warunkowego, użytego jako spójnika zdaniowego prowadzić może do odmiennych "obrazów świata". W przytoczonym powyżej ujęciu Ajdukiewicza zawarty jest pogląd, że w języku potocznym funkcjonuje tylko jedno rozumienie okresu warunkowego. Skonstruowany kontrprzykład pokazuje, jak się wydaje, że jest inaczej. Z językiem potocznym związany jest jeszcze dodatkowo inny problem. W naukach szczegółowych da się łatwo wyróżnić pewien sposób rozumienia okresu warunkowego i go na przeciąg rozważań ustalić. Nie sposób tego uczynić jednak do końca. Jeśli bowiem możemy, na zasadzie analogii, mówić o swoistym "metajęzyku" w poszczególnych naukach, to również w owym "metajęzyku" nie sposób uniknąć okresu warunkowego. Jak widać problem pojawia się na nowo. Został jedynie przesunięty. Jeśli chodzi o język potoczny to, jak na to wskazał już Alfred Tarski, zawiera on swój własny "metajęzyk", a co za tym idzie jest antynomiotwórczy. Jest w tym języku praktycznie niemożliwym uprzednie wskazywanie sposobu rozumienia okresu warunkowego.

Jeśli przyjmiemy prawdziwość tezy (T), to klasę logik implikacyjnych w klasie logik porządku nazwać moglibyśmy przestrzenią logiczną znaczeń okresu warunkowego. Dokładnie rzecz ujmując klasa logik implikacyjnych we wspomnianej klasie, wyznacza przestrzeń możliwych znaczeń okresu warunkowego. Logika klasyczna we fragmencie implikacyjnym, jest jak wiadomo koatomem w klasie logik porządku. Znaczenie implikacji klasycznej jawi się z tego względu jako naj-

¹⁴⁶ por. HEYTING [1986], ss. 73-74 i 91-93.

szersze, najszczególniej określone. Logika klasyczna jest maksymalna w tym sensie, że dołączenie dowolnej reguły usprzecznia ją. Wyjaśnia to od strony logicznej, wypowiediane czasem filozoficzne przekonanie, że jeśli zachodzi okres warunkowy "jeżeli p, to q" w dowolnym jego rozumieniu, to zachodzi odpowiednia implikacja materialna.

Teza (T) wyraża zakresową równość pomiędzy klasą znaczeń okresu warunkowego w języku potocznym oraz klasą logik implikacyjnych. Znaczy to, że poszczególnemu znaczeniu okresu warunkowego odpowiada znaczenie zakodowane formalnie przez jakąś logikę implikacyjną porządku. Również odwrotnie, każdemu znaczeniu kodowanemu przez logikę implikacyjną odpowiada jedno znaczenie okresu warunkowego w języku potocznym. Ponieważ zbiór znaczeń okresu warunkowego z języka potocznego jest skończony mowa jest nie o istniejących sposobach rozumienia, lecz o możliwych. Jak zostało wcześniej wspomniane, problem z naszą tezą (T) jest innego rodzaju aniżeli z tezą Churcha. W tym drugim przypadku inkluzja w jedną stronę jest oczywista, zaś inkluzja klasy funkcji obliczalnych w sensie intuicyjnym w klasie funkcji obliczalnych w sensie matematycznym, nie została dotąd obalona choćby przez podanie kontrprzykładu. W naszym przypadku wydaje się, że inkluzja wszystkich, możliwych intuicyjnie, sposobów rozumienia spójnika implikacji w klasie implikacyjnych logik porządku jest jasna i prawdziwa. Dla wykazania jej fałszywości należałoby podać takie rozumienie implikacji, które da się rozumieć czy też wyrazić na gruncie języka potocznego, którego zaś nie można wyrazić metodami formalnymi rachunku zdań użytych w konstrukcji logik porządku. Wydaje się to być trudnym.

Spróbujmy w tym miejscu jeszcze inaczej przemyśleć zasadność powyższej inkluzji. Bazowa konsekwencja spójnika porządku, poznana w poprzednich rozdziałach, została scharakteryzowana przez zbiór czterech reguł inferencyjnych. Jak podano wcześniej, owe cztery reguły kodują formalnie w języku rachunku zdań własności relacji częściowego porządku. Zbieżność z relacją częściowego porządku nie jest przypadkowa. Wydaje się, że częściowy porządek jest mocno obecny w

naszym ujmowaniu Rzeczywistości, szczególnie na sposób językowy. Być może tajemnicze pojęcie racjonalności wiąże się z jakąś postacią porządku. Częściowy porządek wydaje się być minimalnym warunkiem dla pojmowania Rzeczywistości. Innymi słowy, aby coś z korzyścią mogło być pojmowane, to znaczy, by z tego co pojęte mogło w ogóle coś wynikać, owo "coś" musi posiadać jakąś strukturę porządkową. Logiki porządku pokazują w pewnym sensie, że częściowy porządek jest najsłabszym warunkiem jaki nałożyć należy na Rzeczywistość, szczególnie na język.

Dokładne przyjrzenie się wprowadzonemu pojęciu reduktu identycznościowego pozwala stwierdzić, że taki sam redukt identycznościowy posiadają logiki słabsze od bazowej konsekwencji spójnika porządku. Najsłabszą pośród nich jest logika złożona z odpowiednika prawa zwrotności oraz reguły odrywania. Poniżej bazowej konsekwencji spójnika porządku semantyka dla takich rachunków staje się zbyt "chaotyczna".¹⁴⁷ Prowadzono jednak badania nad słabszymi logikami uwiecznione częściowymi sukcesami.¹⁴⁸

Co kodują cztery reguły inferencyjne tworzące bazową konsekwencję spójnika porządku? Kodują one niezbędne warunki tego, aby spójnik określony przez nie mógł w ogóle sensownie być nazwany implikacją. Ponieważ rozumienie okresu warunkowego w języku potocznym "zawiera" prawo tożsamości, przechodniości, dlatego też bazowa logika porządku je koduje w postaci reguły wyrażającej zwrotność implikacji oraz reguły wyrażającej przechodniość. Pozostałe dwie reguły, mianowicie reguła odrywania oraz reguła ekstensjonalności są nieco mniej oczywiste. Reguła odrywania wyraża ten moment w rozumieniu okresu warunkowego, że uznanie implikacji i jej poprzednika prowadzi do uznania następnika. Reguła ekstensjonalności wyraża zaś ten fakt, iż zdania które się wzajemnie implikują mogą być wymieniane w dowolnym kontekście. Można by twierdzić, iż są to warunki wystarczające dla określenia implikacji. Koncepcja logik porządku poka-

¹⁴⁷ podobną uwagę wypowiedział podczas prywatnej rozmowy Pan Jacek K. Kabziński.

¹⁴⁸ por. na przykład KOTAS [1971].

zuje, że tak nie jest. Owe cztery reguły są bowiem wspólne dla spójnika implikacji i równoważności. Odpowiednie wzbogacenie logiki bazowej porządku pozwala na uzyskanie bazowej konsekwencji spójnika identyczności oraz równoważności, jak i całej gamy logik implikacyjnych. Rozważano w rozdziale trzecim problem istnienia bazowej konsekwencji spójnika implikacji. Odpowiedź na to pytanie nie jest jednak znana. Ujęcie sensu spójników zdaniowych na gruncie logik porządku wydaje się być bardzo płodnym nie tylko od strony technicznej, logicznej, lecz również od strony filozoficznej.

Natomiast inkluzja odwrotna, klasy znaczeń wyznaczonych przez logiki implikacyjne w klasie potocznych znaczeń okresu warunkowego może się wydać wątpliwą.

Szczególnie istotny jest formalnie stwierdzony fakt, że klasa logik implikacyjnych zawiera podklasę logik implikacyjnych scharakteryzowanych przez nieskończoną liczbę reguł inferencyjnych. Fakt ten nie przekreśla ostatecznie naszej tezy. Można argumentować w ten sposób, że umysł ludzki jest w stanie rozumieć coś, jak na przykład wyrażenie językowe, wymagające nieskończonej charakterystyki. Jest to jednak zagadnienie w tym sensie uboczne względem naszych rozważań, że odsyła nas na pogranicze logiki i psychologii. Uczynimy w związku z tym spostrzeżenie, że dotychczasowa negacja psychologizmu, wywodząca się od Husserla, Fregego i choćby Łukasiewicza, zaowocowała również niekorzystnie w postaci odrzucenia zagadnień leżących na terenie psychologii. Logika pozbawiona filozofii i psychologii staje się martwa¹⁴⁹.

Podany w rozdziale trzecim przykład logiki Pogorzelskiego dla której zachodzi twierdzenie o dedukcji choć nie jest to logika implikacyjna, jest przykładem konsekwencji scharakteryzowanej przez nieskończony zbiór reguł. Został on zapisany w skończony sposób w metametajęzyku. I to wystarczyło, abyśmy mogli go jakoś rozumieć w sposób wystarczający.

Niezwykłe i zadziwiające bogactwo logik implikacyjnych, jak również przyjęcie naszej tezy (T) prowadzi do następującego wniosku:

¹⁴⁹ por. MACNAMARA [1993].

liczba kardynalna zbioru możliwych znaczeń okresu warunkowego z języka potocznego jest równa liczbie kardynalnej zbioru implikacyjnych logik porządku.

Na tej podstawie stwierdzimy, że dowolna wypowiedź języka potocznego o postaci okresu warunkowego staje się automatycznie wieloznaczna, jeśli nie zostanie sprecyzowane jakie znaczenie przypisujemy użytemu okresowi warunkowemu. Powyższe stwierdzenie dotyczy również tekstów matematycznych, czy też naukowych, w których użyto okresu warunkowego, nie precyzując wyraźnie o jakie znaczenie chodzi. Jak zostało już wcześniej wskazane, może to prowadzić do poważnych nieporozumień.¹⁵⁰

We wstępie wspomniano, że wynik pracy jest negatywny. Znaczy to, że nie istnieje jakiś zdecydowanie jeden sposób rozumienia okresu warunkowego w języku potocznym, jak również jedyny sposób rozumienia implikacji w matematyce czy logice. Naturalnie zachodzi to w tym przypadku, gdy ów sposób nie zostanie explicite wyjaśniony. Prowadzi to, do dosyć pesymistycznych wniosków. Okazałoby się, że nie tylko w dziedzinie teorii poznania nie ma prawdy absolutnej, ale, co więcej, już na poziomie języka nie ma absolutnie zafiksowanych znaczeń.

Wydać się jednak, iż wniosek taki byłby zbyt pochopny. Po pierwsze, aby uniknąć niejasności należy jasno precyzować znaczenia użytych terminów. Co jest, w wypadku okresu warunkowego, możliwe ze względu na wyróżnioną klasę rozumień tego zwrotu. Po drugie, owe znaczenia, są ze sobą porównywalne. Tworzą bowiem określoną strukturę kraty algebraicznej.

¹⁵⁰ por. tekst z książki Grzegorzcyka „Zarys arytmetyki teoretycznej”, gdzie aksjomatyka liczb podstawowych została dokonana z użyciem pewnego sensu implikacji nie sprecyzowanego do końca. Może to doprowadzić do odmiennych arytmetyk, GRZEGORCZYK [1971], s. 8.

ZAKOŃCZENIE

W zakończeniu niniejszej pracy chciałbym krótko prześledzić tok wywodu całej rozprawy.

Wyruszyliśmy od pytania o możliwość porozumienia między ludźmi w języku potocznym. Rozpatrujemy to ogólne zagadnienie na przykładzie okresu warunkowego. Przedstawiliśmy sposoby jego ujęcia na terenie logiki. Skupiliśmy swą uwagę na koncepcji logik porządku, pochodzącej od Jacka K. Kabzińskiego. Zaprezentowaliśmy ją dosyć szczegółowo, rozbudowując nieznacznie związane z nią formalne wnioski. W rozdziale czwartym, mającym charakter bardziej filozoficzny, postawiliśmy tezę, podobną do tezy Churcha, że klasa możliwych sposobów rozumienia okresu warunkowego w języku potocznym pokrywa się z klasą implikacyjnych logik porządku. Zaprowadziło nas to do wniosku, o konieczności uprzedniej precyzacji znaczenia zarówno implikacji jak i okresu warunkowego. Konieczność ta, zachodzić ma ze względu na wymaganie jednoznaczności dla uzyskania pewności językowej - czyli porozumienia pewnego.

Jak już zostało wspomniane, wynik pracy jest negatywny, ponieważ negatywna jest odpowiedź na pytanie leżące u podstaw niniejszej pracy. Można wyrazić tę odpowiedź następująco:

Zaskakującym jest to, że porozumienie, szczególnie w języku potocznym, jest w ogóle możliwe.

Na koniec niniejszej rozprawy, spróbujmy zarysować możliwe rozwiązanie tego "paradoksu".¹⁵¹

Jeżeli, jak stwierdzono wyżej, zaskakującym jest fakt porozumienia pomiędzy ludźmi, to na podstawie rozważań niniejszej rozprawy, należy stwierdzić, iż powodem jest "zaburzenie" jednoznaczności terminów. Kiedy wyrażenie jest wieloznaczne, przestaje być jednoznacznie rozumiane przez

¹⁵¹ częściowo pomysł ten pochodzi od Profesora Hellera.

rozmówcę. Oczywiście mówimy o takich przypadkach, gdy nie jest możliwe ujednoznacznienie wyrażenia na podstawie pozajęzykowych okoliczności. Tradycyjnie zakłada się, że jednoznaczność jest współ-celem aktywności językowej. Koncepcja logik porządku pokazuje, że tak liczna przestrzeń znaczeniowa okresu warunkowego uniemożliwia zachowanie jego jednoznaczności. Pozostaje jedynie posługiwać się którymś z wyróżnionych znaczeń, jak na przykład tym, które wyznacza -koatomiczna w klasie logik implikacyjnych - implikacja materialna.

Uwaga ta tłumaczy fakt, że gdy przychodzi do sprecyzowania sposobu rozumienia okresu warunkowego, czyni się to najczęściej na sposób implikacji materialnej.

Z codziennego doświadczenia wiemy, że w języku potocznym rzadko czynimy uprzednie zastrzeżenie odnośnie sposobu rozumienia danego wyrażenia, na przykład okresu warunkowego, a jednak porozumienie jest możliwe. Dlaczego tak się dzieje?

Dla zaradzenia tym problemom, zakładamy, że jednoznaczność jest własnością wyjątkową porozumienia językowego. Jest ona własnością niestabilną w tym sensie, że dowolnie mała zmiana znaczenia jednego z terminów wchodzących w skład zdania (jak wcześniej stwierdzono, zdania są podstawowymi nośnikami znaczeń), powoduje utratę wcześniej zafiksowanego znaczenia. Należy tutaj rozróżnić, zmiany "małe" od zmian "dużych" znaczenia. Te pierwsze zachodzą wtedy, gdy zamierzone porozumienie nastąpiło. Jeśli zmiana znaczenia jest "duża", to następuje brak oczekiwanego porozumienia. Jakie środki matematyczne, byłyby najbardziej użyteczne dla wyrażenia powyższych intuicji? Wydaje się, że chodzi o środki topologiczne. Znane jest w topologii pojęcie "stabilności", które mogłoby mieć zastosowanie w naszym przypadku.¹⁵² Posiadanie znaczenia podobnego, czyli "mało" się różniącego od innego znaczenia, byłoby własnością "stabilną". Zaś posiadanie jednego, określonego znaczenia,

¹⁵² por. NOWIŃSKI [1982], s. 14.

byłoby własnością "niestabilną".¹⁵³ Jeszcze inną możliwością byłoby utworzenie relacji równoważności na podstawie podziału zbioru I, uzyskanego z rodziny przeciwobrazów logik identycznościowych. Należenie do tej samej klasy równoważności byłoby, w tym ujęciu, własnością 'posiadania podobnego znaczenia'.¹⁵⁴

Powyższe rozważania byłyby argumentem za tym, że precyzacja znaczenia terminów, w szczególności zwrotu "okres warunkowy", zmierza w kierunku wyróżnienia zbioru znaczeń podobnych, ze względu na jakieś dodatkowe wymagania. Z tego właśnie powodu porozumienie jest możliwe.

Ta ogólna idea wymaga oczywiście należytego opracowania. Jej analiza czy ewentualne rozwiązanie, wydaje się być czymś obiecującym i płodnym filozoficznie.

Na tym kończymy niniejszą rozprawę.

¹⁵³ problemem o podstawowym znaczeniu, jest topologia, którą należy wprowadzić w klasie logik porządku. Jedną z możliwości jest klasa przeciwobrazów operacji reduktowania identycznościowego. Topologia taka byłaby jednak zbyt bogata. Inną możliwością jest wzięcie klasy logik słabszych od infimum przeciwobrazu operacji reduktowania.

¹⁵⁴ matematyczne zbadanie tych intuicji wymagałoby osobnych badań.

LITERATURA

AJDUKIEWICZ K.

[1965] Język i poznanie, t.I, PWN, Warszawa.

ANDERSON A.R., BELNAP N.D.

[1962] The pure calculus of entailment, "Journal of Symbolic Logic", 27, ss.19-52.

[1975] Entailment, The logic of relevance and necessity, Princeton University Press, Princeton-London.

BROUWER L.E.J.

[1986] Intuitionisme en formalisme, Amsterdam 1912.[w:] Brouwer L.E.J., Collected Works; A.Heyting (red), vol.1, ss. 123-138, 1975, North-Holland Publishing Company, Amsterdam-Oxford; Intuicjonizm i formalizm, tłum. R. Murawski [w:] Filozofia matematyki, R.Murawski (red.), Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.

CHURCH A.

[1935] An unsolvable problem of elementary number theory. Preliminary report, "Bulletin of the American Mathematical Society", 41, ss.332-333.

CZELAKOWSKI J.

[1980] Model-theoretic methods in methodology of propositional calculi, The Polish Academy of Sciences, Institute of Philosophy and Sociology, Warszawa.

CZELAKOWSKI J., MALINOWSKI G.

[1985] Key Notions of Tarski's Methodology of Deductive Systems, "Studia Logica", 44, ss. 321-351.

CZERWIŃSKI Z.

[1958] O paradoksie implikacji, "Studia Logica", 7, ss. 265-271.

DESCARTES R.

[1958] Medytacje o pierwszej filozofii, tłum. M. i K. Ajdukiewiczowie, PWN.

[1988] Discours de la methode; Rozprawa o metodzie właściwego kierowania się rozumem i poszukiwania prawdy w naukach, tłum. W.Wojciechowska, PWN, Warszawa.

ETCHEMENDY J.

[1988] Tarski on truth and logical consequence, "Journal of Symbolic Logic", 53, ss.51-79.

[1990] The Concept of Logical Consequence, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, London, England.

FREGE G.

[1970] Ueber Sinn und Bedeutung, "Zeitschrift fuer Philosophie", t.100,1892, ss.25-50; tłum. B.Wolniewicz, Sens i znaczenie [w:] Pisma semantyczne,PWN, Warszawa.

GAWROŃSKI A.

[1984] Dlaczego Platon wykluczył poetów z Państwa?, Biblioteka "Więzi", Warszawa.

GENTZEN G.

[1980] Untersuchungen ueber das logische Schliessens, [w:] Mathematische Zeitschrift 39, (1934-1935), ss.176-210, 405-431; Badania nad nioskowaniem logicznym, tłum. K. Trzęsicki, Sekcja Wydawnicza Filii UW, Białystok.

GRZEGORCZYK A.

[1971] Zarys arytmetyki teoretycznej, PWN, Warszawa.

[1972] An approach to logical calculus, "Studia Logica", 30, ss.33-41.

HEYTING A.

[1986] Intuitionism. An Inroduction, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1971; Elementy intuicjonizmu (fragment), tłum. B.Baran [w:] Filozofia matematyki, J.Misiak (red.), Uniwersytet Jagielloński, Kraków.

HINTIKKA J.

[1992] Language-Games [w:] Essays on Wittgenstein in Honour of G.H.von Wright, "Acta Philosophica Fennica", 28, (1976) ss. 105-125; Gry językowe, tłum. A.Grobler [w:] J.Hintikka, Eseje logiczno-filozoficzne, PWN, Warszawa, ss.447-485.

HIŻ H.

[1959] Extendible sentential calculus, "Journal of Symbolic Logic", 24,ss.193-202.

KABZIŃSKI J.K.[JKK] O modelach porządkowych dla implikacji i równoważności, maszynopis, bez daty.

[JKKa] O pewnych konsekwencjach równoważnościowo nierozróżnialnych, maszynopis, bez daty.

[1980] Investigation into the equivalence connective, Rozprawy Habilitacyjne nr.48, Uniwersytet Jagielloński, Kraków.

[1981] On equivalential fragment of the implicative extensional consequence, "Bulletin of the Section of Logic", 10, ss. 135-139.

[1982] Basic properties of the equivalence, "Studia Logica" 41, ss.17-40.

[1984] An Axiomatization of the Equivalential Fragment of the Three-Valued Logic of Łukasiewicz, "Notre Dame Journal of Formal Logic", 25, ss.354-355.

KABZIŃSKI J.K., POREBSKA M., WRÓŃSKI A.

[1981] On the $\{=, \neg\}$ -reduct of the Intuitionistic Consequence Operation, "Studia Logica", 40, ss.55-66.

KICZUK S.

[1994] O niektórych rodzajach implikacji, "Roczniki filozoficzne", KUL, 42, ss. 5-35.

[1995] Związek przyczynowy a logika przyczynowości, Redakcja Wydawnictw Katolickiego Uniwersytetu Lubelskiego, Lublin.

KIJANIA-PLACEK K.

[1991] Zagadnienie najkrótszych aksjomatów dla równoważnościowego rachunku zdań, maszynopis, Kraków.

KNEALE W., KNEALE M.

[1962] The Development of logic, Oxford University Press, London.

KOŁAKOWSKI L.

[1987] Husserl i poszukiwanie pewności, Biblioteka 'Aletheia', Warszawa.

KOTARBIŃSKI T.

[1990] Wykłady z dziejów logiki, Ossolineum, Wrocław.

KOTAS J.

[1971] Logical systems with implications, "Studia Logica", 28, ss. 101-115.

LEMMON E.J., MEREDITH C.A., MEREDITH D., PRIOR A.N., THOMAS I.

[1969] Calculi of pure strict implication, Phil. Dep.Canterbury University College, Christchurch, New Zealand 1957; [w:] Philosophical Logic, (red.) J. W. Davis, D. J. Hockney, W. K. Wilson, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, ss. 215-250.

LOGIKA FORMALNA.

[1987] Logika formalna, (red.) W.Marciszewski, PWN, Warszawa.

ŁOŚ J., SUSZKO R.

[1958] Remarks on sentential logics, "Indagationes Mathematicae", 20, ss. 177-183.

MACNAMARA J.

[1993] A Border Dispute. The Place of Logic in Psychology, The Massachusetts Institute of Technology, 1986; tłum. M. Zagrodzki, Logika i psychologia, PWN, Warszawa.

MALINOWSKI G.

[1990] Logiki wielowartościowe, PWN, Warszawa.

MATES B.

[1971] Stoic logic, University of California Press, Berkeley, 1961; Logika stoików, Akademia Teologii Katolickiej, Warszawa.

MEREDITH C.A., PRIOR A.N.

[1964] Investigation into implicational S5, "Zeitschrift fuer mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik", 10, ss. 203-220.

MOSTOWSKI A.

[1948] Logika matematyczna, Monografie matematyczne, Warszawa-Wrocław.

MURAWSKI R.

[1986] Filozofia matematyki, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.

NOWIŃKI K.

[1982] Nietypowe, osobliwe, wyjątkowe, "Biblioteczka Delta", Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.

OMYŁA M.

[1986] Zarys logiki niefregeowskiej, PWN, Warszawa.

PLATTS M.

[1980] Introduction; [w:] Reference, truth and reality, (red.) M. Platts, Routledge i Kegan Paul, London.

POGORZELSKI W.A.

[1962] Adekwatność teorii systemów dedukcyjnych względem rachunków zdaniowych, "Studia Logica", 12, ss. 103-125.

[1973] Klasyczny rachunek zdań, PWN, Warszawa.

POGORZELSKI W.A., SŁUPECKI J.

[1960] Podstawowe własności systemów dedukcyjnych opartych na nieklasycznych logikach. cz.I, "Studia Logica", 9, ss. 163-170.

[1960a] Podstawowe własności systemów dedukcyjnych opartych na nieklasycznych logikach, cz.II, "Studia Logica", 10, ss. 77-91.

POGORZELSKI W.A., WOJTYLAK P.

[1982] Elements of the theory of completeness in propositional logic, Silesian University, Katowice.

PRAWITZ D.

[1977] Meaning and Proofs: on the conflict between classical and intuitionistic logic, "Theoria", 43, ss. 2-40.

QUINE W.V.O.

[1974] Mathematical Logic, Harvard University Press, Cambridge, 1955; tłum. L.Koj, Logika matematyczna, PWN, Warszawa.

RASIOWA H.

[1955] O pewnym fragmencie implikacyjnego rachunku zdań, "Studia Logica", 3, ss. 208-226.

[1974] An algebraic approach to non-classical logics, PWN, Warszawa.

ROUTLEY R., MEYER R.K.

[1976] Every sentential logic has a two-valued worlds semantics, "Logique et Analyse", 74-75-76, ss.345-365.

SADY W.

[1993] Wittgenstein. Xycie i dzieło, Daimonion, Lublin.

STAHL G.

[1981] Character and acceptability of Church's thesis, "Reports on Mathematical Logic", 11, ss. 63-68.

SUNDHOLM G.

[1983] Systems of deduction, [w:] D. Gabbay, F. Guenther (red.), Handbook of Philosophical Logic, vol.I, Reidel Publishing Company, ss. 133-188.

[1986] Proof theory and meaning, [w:] D. Gabbay, F. Guenther (red.), Handbook of Philosophical Logic, vol.III, Reidel Publishing Company, ss. 471-506.

SUSZKO R.

[1961] Concerning the method of logical schemes, the notion of logical calculus and the role of consequence relations, "Studia Logica", 11, ss. 185-214.

[1974] A note on intuitionistic sentential calculus (ISC), "Bulletin of the Section of Logic", 3, ss. 20-21.

[1974a] Equational logic and theories in sentential languages, "Colloquium Mathematicum", 29, ss. 19-23.

[1977] The Fregean axiom and Polish mathematical logic in the 1920, "Studia Logica", 36, ss. 377-380.

TARSKI A.

[1930] Ueber einige fundamentale Begriffe der Metamathematik, Comptes rendus des seances de la Societe des Sciences et des Lettres de Varsovie, 23; [w:] Tarski [1956], ss. 30-37.

[1930a] Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften.I, "Monatshefte fuer Mathematik und Physik", 37, ss. 361-404; [w:] Tarski [1956], ss. 60-109.

[1933] Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych, Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III, nr.34, Warszawa.

[1936] O pojęciu wynikania logicznego, "Przegląd Filozoficzny", 39, ss. 58-68.

[1956] Logic, Semantics, Metamathematics, Clarendon Press, Oxford.

[1995] Wprowadzenie do logiki, Philomath, Filia Uniwersytetu Warszawskiego, tłum. M.Sujczyńska. Tytuł oryginalny; Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences, Oxford University Press 1994.

TAX R.E.

[1973] On the intuitionistic equivalential calculus, "Notre Dame Journal of Formal Logic", 14, ss. 448-456.

THOMSON J.F.

[1990] In defense of "⊃", "The Journal of Philosophy", 87, ss.57-70.

TOKARZ M.

[1980] Essays in matrix semantics of relevant logics, The Polish Academy of Sciences, Institute of Philosophy and Sociology, Warszawa.

WITTGENSTEIN L.

[1972] Philosophical Investigations, Basil Blackwell, Oxford, 1953; tłum. B.Wolniewicz, Dociekania filozoficzne, PWN, Warszawa.

[1993] Ueber Gewissheit/On Certainty, Harper Torchbook, London 1972; tłum. M. Sady, W. Sady, O pewności, Biblioteka "Aletheia", Warszawa.

WÓJCICKI R.

[1984] Lectures on propositional calculi, Ossolineum, Wrocław.

Spis treści

Wstęp	5
Rozdział pierwszy	9
Rozdział drugi	27
Podrozdział pierwszy - Spójnik porządku	28
Podrozdział drugi - Spójnik identyczności	32
Podrozdział trzeci - Spójnik równoważności	36
Rozdział trzeci	41
Rozdział czwarty	63
Zakończenie	83
Literatura	86