Szanowni Państwo,

niniejsze notatki do wykładu nie są jeszcze gotowym skryptem. Wymagają wielu przeróbek i poprawek, a nawet są nieustannie poprawiane i rozszerzane. Należy zatem sprawdzać, czy posiadana wersja jest wersją aktualną. Proszę o przesyłanie na mój adres (dostępny na mojej stronie Web) wszelkich uwag i spostrzeżeń odnoszących się do aktualnej wersji notatek.
Udostępniam je Państwu, aby ułatwić przygotowanie się do egzaminu. Mają one charakter prywatny. Bardzo proszę aby tych notatek nie udostępniać nikomu poza studentami uczęszczającymi na moje wykłady w roku akademickim 2003/2004.
Obowiązują również zwykłe przepisy odnośnie praw autorskich. W tych notatkach, nie zostały zaznaczone prace na których wzorowałem się w ujęciu niektórych tematów.

Życzę owocnej pracy z niniejszą pomocą.
Pozdrawiam
Ks. Adam Olszewski

PODSTAWY LOGIKI DLA FILOZOFÓW

WYKŁADY Z LOGIKI DLA ROKU PIERWSZEGO..

SPIS TREŚCI

1. OGÓLNIE O LOGICE.

1.1 LOGIKA W PERSPEKTYWIE HISTORYCZNEJ.

DZIEJE TERMINU ‘LOGIKA’.
Termin ‘**logika**’, czy też jego odmiany, pojawia się u **DEMOKRYTA** (460-371), w tytule jego dzieła *O sprawach logicznych, czyli kanon*. Problematyka logiczna. w kwestiach definiowania terminów i rozważań na temat indukcji, występuje u **SOKRATESA** (469-399) i jego ucznia **PLATONA** (427-347).

Pismom logicznym **ARYSTOTELESA** (384-322); *Kategorie* (o nazwach), *O wypowiadaniu się* (o zdaniach), *Analityki pierwsze* (o wnioskowaniu), *Analityki wtóre* (o metodologii nauk), *Topiki* (o wnioskowaniu ‘prawdopodobnym’), *O dowodach sofistycznych* (właściwie o obalaniu dowodu cudzego) nadano wspólny tytuł *Organon* - po polsku ‘narzędzie’ – gdyż zawierały niezbędny zestaw wiadomości i umiejętności, dla filozofowania. Arystoteles miał nazywać *logicznym,* typ dowodzenia, opierający się na wiedzy ogólnej. Logicznie postępuje ten, kto daje sobie radę w przemawianiu, potrafi uzasadniać i prowadzić dociekliwą rozmowę. Ten termin przeciwstawiał terminowi ‘analityczny’- dowodowy; ‘fizyczny’ – rozumowanie o zagadnieniach przyrodoznawstwa; ‘dialektyczny’ – rozumowanie prowadzące do wniosków prawdopodobnych. **STOICY** (III-II wiek p. n. Ch.) posługiwali się terminem *logiczna część filozofii* dla określenia logiki. Logikę stoicką nazywali późniejsi autorzy ‘dialektyką’ i ten właśnie termin pozostawał głównie w użyciu aż do średniowiecza (XII wiek). Od XVII wieku dominuje już termin ‘logika’. Terminem ‘**logika formalna**’ nazywa **KANT** (1724-1804) system logiki Arystotelesa, który uważał mylnie za ostateczny i doskonały. Logika transcendentalna Kanta była rozwinięciem systemu kategorii.

Logika jest dyscyplina naukową mającą bardzo długą historię. Jej początki sięgają Chin (IV-III stulecie p. n. Ch.) i starożytnej Grecji (V wiek p. n. Ch.). Pojawiła się w związku z rozwinięciem, przede wszystkim w obrębie cywilizacji helleńskiej, zdolności do konstruowania abstrakcyjnych pojęć oraz prowadzenia rozumowań o charakterze systematycznym. Rodzące się wówczas, na tej bazie, rozliczne dyscypliny naukowe wymagały opracowania teoretycznych podstaw badania poprawności rozumowań (wnioskowań). Po drugie rozwijająca się filozofia, a w szczególności refleksja nad poznaniem, w niektórych swych rozważaniach produkowała sofizmaty, antynomie i paradoksy. Szczególnie ‘zasłużyły’ się w tym następujące szkoły filozoficzne; **SOFIŚCI**, **ELEACI** oraz **MEGAREJCZYCY.**

SOFIZMAT := (gr. *sophisma* – fałszywy wniosek, wykręt) rozumowanie w którym świadomie popełniono błąd logiczny, który nadaje temu rozumowaniu pozór poprawności. Przykład: *Rogów nie zgubiłeś, a czegoś nie zgubił, to posiadasz; zatem posiadasz rogi.*

ANTYNOMIA := jest to zbiór zdań, których uznanie wydaje się być dozwolone i prowadzi jednak, poprzez poprawne rozumowanie, do uzasadnienia równoważności jakiegoś zdania i jego negacji (czyli do sprzeczności). Przykład: *Zdanie, które teraz wypowiadam jest kłamstwem.* Jest to wersja tzw. antynomii Kłamcy (ang. the Liar) przypisywana Eubulidesowi z IV wieku p. n. Ch., uczniowi Euklidesa.

PARADOKS := (od greckiego *paradoksos* - nieoczekiwany, nieprawdopodobny) rozumowanie pozornie poprawne, które prowadzi do wniosków jawnie niezgodnych z danymi potocznego doświadczenia i przekonaniami zdroworozsądkowymi. Przykład: '*Lecąca strzała jest w każdej chwili swego lotu w pewnym określonym miejscu. To jednak, co w każdej chwili należącej do pewnego okresu czasu jest w określonym miejscu, przez cały ten czas spoczywa. Zatem lecąca strzała przez cały czas spoczywa.'* (Ajdukiewicz, 1948) Jest to jeden z paradoksów Zenona z Elei (V wiek p. n. Ch.).

Już Sokrates i jego uczeń Platon reagowali negatywnie na poczynania sofistów. Dopiero jednak Arystoteles stworzył narzędzie, dzięki któremu można było w sposób intersubiektywny sprawdzać poprawność niektórych rozumowań i eliminować błędy. Owym narzędziem była głównie **SYLOGISTYKA** (rachunek nazw). Arystoteles sformułował również **zasadę sprzeczności** oraz **dwuwartościowości**. Równolegle ze Stagirytą, jednak w opozycji do niego, działali Stoicy (Zenon z Kition, Chryzyp z ?), którzy stworzyli **logikę zdań**.

Okres średniowiecza nie przyniósł logice wielu nowych rozwiązań. Od XII wieku zaczęto dokładniej studiować na uniwersytetach naukę Arystotelesa, a z nią jego logikę. Do jej rozpowszechnienia przyczynił się **św. Albert Wielki** (XIII w.), **św. Tomasz z Akwinu** (XIII w.) oraz współczesny im **Piotr Hiszpan**. Na nowo odkryto prawa rachunku zdań (W. **Ockham** - XIV w.). Należy również wspomnieć o **Rajmundzie Lullusie** (1235-1315), u którego można spotkać idee zautomatyzowania procesu rozumowania. Do 'szalonych' idei Lullusa nawiązał jeden z największych myślicieli ludzkości – **Gottfried W. Leibniz** (1646-1716), który wynalazł *calculus ratiocinator.* Był to rachunek, zastępujący rozumowanie, oparty o system znaków zwany przez Leibniza *characteristica universalis.* Zadaniem znaków było reprezentowanie pojęć. Można tutaj mówić o zaczątkach formalizacji, choć te idee pozostały szerzej nieznane, aż do początków dwudziestego stulecia. Od Leibniza pochodzi logiczna **zasada identyczności** która mówi, że dwa obiekty są identyczne, o ile wszystkie własności jednego z nich, posiada drugi i odwrotnie.

Przypuszczać można, że rozwój nowożytnej nauki opartej na eksperymencie, dokonany w Odrodzeniu, przyniósł obfity materiał logiczny, który stymulował badania logiczne.

Przełom w logice przyniósł wiek dziewiętnasty. Związany był on głównie z logikami angielskimi i niemieckimi Działali wtedy **John Stuart Mill** (1806-1873) – rozwija logikę indukcji; **George Boole** (1815-1864) – twórca algebry logiki wraz z **Augustem De Morgan** (1806-1878); Amerykanin **Charles S. Peirce** (1839-1914) i **E. Schroeder** (1841-1902) rozwinęli algebrę logiki i teorię relacji W oparciu o wyniki tych badaczy można było uzasadnić poprawność następującego wnioskowania: *Każdy koń jest zwierzęciem, zatem głowa konia jest głową zwierzęcia* (De Morgan).

Jeśli przez logikę tradycyjną rozumieć logikę nazw (sylogistykę) oraz rachunek zdań, to XIX wiek rodzi nowoczesną logikę. Oprócz wspomnianej teorii relacji zostają wprowadzone kwantyfikatory (operatory), a nade wszystko rozwinięto metodę aksjomatyczną i formalną.

KWANTYFIKATORY := operatory wiążące zmienne, z których najbardziej znane to: ***dla każdego x***, ... (kwantyfikator ogólny); oraz: ***istnieje takie y, że*** ... (kwantyfikator szczegółowy lub egzystencjalny). Polski logik Andrzej Mostowski uogólnił pojęcie kwantyfikatora.

Ogromne zasługi dla rozwoju logiki położył największy logik dziewiętnastego stulecia - **Gottlob Frege** (1848-1925), który przezwyciężył pokusę psychologizmu, sprowadzającą logikę do psychologii. Zwolennicy psychologizmu uzasadniali swe przekonanie za pomocą następującego, niepoprawnego, wnioskowania:

i. Logika zajmuje się prawami myślenia.
ii. <u>Myślenie jest zjawiskiem psychicznym</u>.
iii. Zatem: Logika jest częścią psychologii.

PSYCHOLOGIZM := prawa logiki są jedynie wyrazem prawidłowości psychologicznych i są do nich sprowadzalne.

Frege, jako pierwszy, przedstawił rachunek zdań i kwantyfikatorów w postaci systemu całkowicie sformalizowanego, w którym ściśle określono nie tylko język, ale także aksjomaty i reguły inferencji. Jako twórca logicyzmu, próbował sprowadzić arytmetykę liczb naturalnych do logiki (drugiego rzędu) oraz jako pierwszy przeprowadził ściśle rozważania na temat oznaczania i znaczenia.

LOGICYZM := pogląd w filozofii matematyki i logiki oraz kierunek badań w podstawach matematyki utrzymujący, że cała matematyka jest sprowadzalna do logiki. Prócz Fregego rozwijali go B. Russell i A. N. Whitehead.

Równolegle działał **Giuseppe Peano** (1858-1932), którego notacja logiczna weszła do powszechnego użycia, w przeciwieństwie do skomplikowanej, dwuwymiarowej notacji Fregego. Przykładowo, dla zapisania okresu warunkowego:

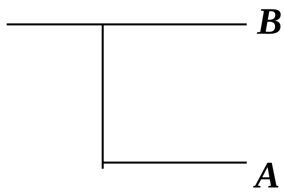
*Jeśli **A**, to **B***,

Peano pisał:

$$\boldsymbol{A \supset B}$$

(była to obrócona litera ‘C’, która przetrwała w symbolice *Principów*). Od Peano również pochodzi symbol $\in$, który oznacza relację należenia elementu do zbioru Jest to stylizowana grecka litera *epsilon*, pierwsza litera greckiego słowa *εστι* , co znaczy po polsku ‘być’.

Zaś Frege schemat zdaniowy ‘Jeżeli *A*, to *B*’ rysował dwuwymiarowo;



Peano jest autorem pięciu aksjomatów arytmetyki liczb naturalnych, które od niego wzięły swą nazwę – arytmetyka Peano.
Podstawowe dzieło logiczne, o bazie logicystycznej - *Principia mathematica* - napisali wspólnie wielcy logicy, i równocześnie filozofowie - **Bertrand Russell** (1872-1970) i **Alfred N. Whitehead** (!861-1947). Przez swoją działalność logiczno-filozoficzną wywarli ogromny wpływ na kształt poszukiwań logicznych dwudziestego stulecia.
Matematyk niemiecki **Dawid Hilbert** (1862-1943) był twórcą formalizmu, konkurencyjnego względem logicyzmu, kierunku badań w podstawach matematyki i filozofii matematyki. Był twórcą teorii dowodu czyli ówczesnej metamatematyki.

FORMALIZM := kierunek w filozofii matematyki i logiki oraz podstawach matematyki utrzymujący, że istotą teorii matematycznych są niezinterpretowane systemy aksjomatyczne, całkowicie sformalizowane.

Twórcą intuicjonizmu, trzeciego głównego nurtu w podstawach matematyki, ale również w filozofii matematyki, jest **Luizen E. J. Brouwer** (1881-1966).

INTUICJONIZM := kierunek w filozofii matematyki i logiki oraz podstawach matematyki głoszący, że punktem wyjścia badań matematycznych jest pierwotna intuicja ciągu liczb naturalnych oraz zasada indukcji. Intuicjonizm nawiązywał do konstruktywizmu.

Początek lat trzydziestych dwudziestego stulecia stał się momentem przełomowym dla rozwoju logiki. Austriacki, młody logik **Kurt Gödel** (1906-1978), rozwiązując zagadnienie postawione przez Hilberta, podał dowód pełności dla logiki 1. rzędu już w roku 1929, a rok później wykazał, że arytmetyka liczb naturalnych jest istotnie niezupełna. W swej sławnej pracy, w której dowodzi niezupełności arytmetyki, definiuje Gödel podstawową klasę funkcji pierwotnie rekurencyjnych.
Alfred Tarski (1901-1983) definiuje ściśle, za pomocą metod matematycznych logiki, semantyczne pojęcie prawdy. Otworzył tym samym drogę dla naukowego traktowania zarówno zagadnień semantyki jak i pragmatyki, które, przede wszystkim w oczach neopozytywistów, uchodziły za nienaukowe. Należy tutaj wspomnieć o rozwoju refleksji nad nauką w postaci rozważań metodologicznych. Wymieć trzeba nazwiska Rudolfa Carnapa i Rajmunda Poppera. Swoimi analizami Tarski zapoczątkował eksplozję filozoficznych analiz różnorodnych pojęć, dokonanych metodami logiki. Niemal równolegle **Alan Turing** (1912-1954) i **Alonzo Church** (1903-1995) rozwiązują negatywnie kolejny problem Hilberta – zagadnienie rozstrzygalności logiki 1. rzędu. Ich badania, szczególnie Turinga, posiadają ogromne znaczenie dla powstania komputerów i języków programowania. Church (1935) stawia przypuszczenie, zwane Tezą Churcha (że klasa funkcji obliczalnych intuicyjnie jest identyczna z klasą funkcji rekurencyjnych), którego prawdziwość pozostaje do dzisiaj nierozstrzygnięta.

Od tego czasu logika przeżywa okres niebywale bujnego rozwoju. Pojawiają się tysiące wyników o charakterze formalnym. Profituje z tego filozofia analityczna, która korzysta z metod wypracowanych przez logików. Badania logiczne, w sensie ścisłym, rozchodzą się na trzy główne działy: teoria dowodu (syntaktyka, Hilbert), teoria modeli (semantyka, Tarski) i teoria rozstrzygalności (pragmatyka(?) Church, Turing, Gödel). Materiał logiczny jest dzisiaj tak duży (dotyczy to zarówno logiki matematycznej jak i filozoficznej), że, praktycznie, nikt nie jest w stanie go objąć. Dość powiedzieć, ze wydany w latach osiemdziesiątych *Handbook of Philosophical Logic* składał się z czterech kilkusetstronicowych tomów. *Handbook of Philosophical Logic* wydawany obecnie, od roku 2002, ma już tomów osiemnaście. Wygląda więc na to, że badania logiczne stoją przed kolejnym przełomem. Należy jednak pamiętać, że logika (szczególnie formalna) jest nauką zbliżoną do matematyki i wszystkie jej ścisłe osiągnięcia pozostają ważne już na zawsze. Znaczy to, że zakres wiedzy logicznej nieustannie przyrasta.

Parę słów o logice w Polsce. Po okresie zaborów i pierwszej wojnie światowej do Polski przybywa **Kazimierz Twardowski** (1866-1938), od którego rozpoczyna swe istnienie szkoła filozoficzna zwana później szkołą **Lwowsko-warszawską**. Skrótowo można powiedzieć, że w skład tej szkoły wchodzili również matematycy. Największe nazwiska:

Jan Łukasiewicz (1878-1956)**, Stanisław Leśniewski** (1886-1939)**, Adolf Lindenbaum** (1904-1941?)**, Alfred Tarski, Zygmunt Janiszewski, Stefan Banach, Stanisław Jaśkowski** (1906-1965)**, Andrzej Mostowski** (1913-1975)**, Mordchaj Wajsberg** (1902-?)**,** żeby wymienić najważniejszych. Ludzie ci dokonali odkryć logicznych o światowym znaczeniu, jak choćby Tarski (teoria prawdy) czy Łukasiewicz (logika trójwartościowa).

1.2 CO TO JEST LOGIKA I JAKI JEST CEL JEJ NAUCZANIA.

My będziemy logikę rozumieć tak, jak się ją określa w wielu podręcznikach logiki:

LOGIKA := nauka badająca warunki poprawności wnioskowań**.**

W tym określeniu nie została podana metoda badania. Jeśli będzie to metoda filozoficzna, to będziemy mieli do czynienia z **logiką filozoficzną**, jeśli zaś będzie to metoda formalna, to można mówić o **logice matematycznej.**

Dla porównania przytaczam kilka określeń logiki, które pochodzą od prominentnych filozofów. Określenia te znalazły uznanie również ze strony niektórych logików.[1]

Ogólna lecz czysta logika ... stanowi kanon intelektu i rozumu, ale jedynie, co do formalnych aspektów jego używania. I. Kant, *Krytyka czystego rozumu.* T. I, s.141.

Ten natomiast, kto opanował jakiś język, zna jednocześnie inne języki i porównuje je z nim – może odczuć ducha i kulturę narodu w gramatyce jego języka; same te reguły i formy mają teraz żywą, pełną treść i wartość. Poprzez gramatykę może on poznać sposób wyrażania się ducha w ogóle – logikę. (...) Dopiero z głębszej znajomości innych nauk, wyłania się dla podmiotowego ducha moment logiczny nie tylko jako ogólność abstrakcyjna, lecz jako ogólność zawierająca w sobie bogactwo szczegółowości. G. W. F. Hegel, *Nauka logiki*, t. I, s.56.

Podstawowe sądy, na których opiera się arytmetyka ... musza dotyczyć wszystkiego co może zostać pomyślane. I z pewnością mamy rację zaliczając takie bardzo ogólne sądy do logiki. – Wyprowadzę teraz kilka wniosków z tej logicznej, czy też formalnej, natury arytmetyki. G. Frege, 1885, *O formalnych teoriach arytmetyki*, s.112.

W oparciu o obrazy językowe towarzyszące podstawowym prawdom matematycznym rzeczywistych matematycznych struktur, możliwe jest czasem tworzenie struktur językowych, sekwencji zdań, zgodnie z prawami logiki. L. E. J Brouwer, 1907, *Matematyka a logika,* Collected Works, s.75.

Odkrywanie prawd jest zadaniem wszelkiej nauki; zadaniem logiki jest odkrywanie praw prawdziwości. G. Frege, *1918,* Pisma semantyczne, *s. 101.*

Logika mówi o każdej możliwości i wszystkie możliwości są jej faktami. L. Wittgenstein, 1922, *Tractatus logico-philosophicus,* 2.0121.

[1] Przytaczam za H. Wang, *Czym jest logika?*, [w:] *Filozofia logiki*, (ed. J. Woleński), Aletheia, Warszawa 1997, ss. 9-27.

A wszystko, co opisuje grę językową, należy do logiki. L. Wittgenstein, 1950, *O pewności*, kwestia 56.

Logika jest teorią czystych pojęć; zawiera teorię mnogości, jako swoją właściwą część. K. Gödel, 1971 i 1975.

CELE NAUCZANIA LOGIKI := umiejętność przestrzegania umów terminologicznych, umiejętność określenia struktury logicznej wypowiedzi, umiejętność sprawdzania tautologiczności formuł logiki pierwszego rzędu, definiowanie jednych terminów za pomocą drugich, precyzyjne formułowanie poglądów, odróżnianie zdań uzasadnionych od nieuzasadnionych i umiejętność przeprowadzenia analizy dowolnej argumentacji.

Na koniec tego akapitu przytoczymy poradę logika **Arnolda Geulincx (1625-1669)** , którą kierujemy do studentów:

Ad extremum moneo, ne cursim haec legas. Euripus Logicus non patitur se navigari tam plenis velis.

(Najusilniej doradzam, abyś tego nie czytał pobieżnie. Przez cieśninę logiki nie można płynąć z rozwiniętymi żaglami.)

.

1.3 O KONWENCJACH W LOGICE.

Studiowanie logiki jest zadaniem żmudnym. Stosowanie przez logików metod formalnych zbliża ich dyscyplinę do matematyki. Konsekwencją tego stanu rzeczy jest pewnego rodzaju konwencjonalizm, który jest charakterystyczny dla tych obu formalnych nauk. Tenże konwencjonalizm jest jedną z najważniejszych (praktycznych) przeszkód w studiowaniu logiki (i matematyki) przez studentów innych kierunków niż matematyka, a w szczególności filozofii.

Wspomniany konwencjonalizm jest nawiązaniem do odpowiedniego stanowiska w zakresie metodologii nauk, który polegał na uznaniu pewnej ‘swobody logicznej’ w procesie tworzenia teorii naukowych. Owa swoboda polegać miała na dowolności doboru hipotez mających, po empirycznym badaniu, zająć miejsce praw nauki. Ważnym jego reprezentantem jest znakomity francuski matematyk Henri Poincaré.

KONWENCJONALIZM LOGIKI := [*łac. conventionalis; fran. convention – ugoda, umowa*] zasadza się głównie na tym, że wiele definicji logiki, które ustalają znaczenia podstawowych terminów, mają charakter umów terminologicznych (konwencji). O prawdziwości tych konwencji nie decyduje ich zgodność z rzeczywistością, lecz niesprzeczność i wola tego, kto je stanowi. Innym terminem na tego typu konwencje, który pochodzi od Ajdukiewicza, to ***postulat znaczeniowy***. Jeszcze inny to ***definicja projektująca***.

Jeśli tego typu definicje zostaną przyjęte, to ich zapamiętanie oraz przestrzeganie jest od tego momentu najważniejszym obowiązkiem i rzeczą ‘świętą’ dla logika. Złamanie jakiejkolwiek tego typu umowy, jest największym ‘grzechem’ logicznym, skutkującym bardzo często logicznym ‘piekłem’, czyli sprzecznością.

2. METODY METALOGICZNE

2.1 O INDUKCJI.

Można śmiało powiedzieć, że jedną z najważniejszych (o ile nie najważniejszą) metod dowodzenia i definiowania w logice i matematyce jest metoda **indukcji**.

Metoda indukcji występuje również na terenie innych nauk (przyrodniczych), gdzie jest zawodną i jedynie prawdopodobną metodą rozumowania. Tamta metoda indukcji zwana jest indukcją niezupełną. Metoda indukcji logicznej – zwana czasem indukcją zupełną - jest pewną (dedukcyjną!) metodą wnioskowania.

Głównym celem metody indukcji jest uzasadnienie prawdziwości zdania ogólnego typu: *dla każdego obiektu (z pewnej dziedziny) zachodzi tak i tak.*

PRZYKŁAD 1.

Jako dziedzinę weźmy zbiór wszystkich liczb naturalnych N. Chcemy dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n>0 zachodzi:

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

***DOWÓD*:**

Dla przypadku $n=1$ mamy: $1=\frac{1(1+1)}{2}=1.$

Załóżmy teraz, że badane twierdzenie zachodzi dla jakiegoś n = k:

$$1+2+...+k=\frac{k(k+1)}{2}.$$

Chcemy na tej podstawie wykazać, że twierdzenie zachodzi również dla n = k+1, czyli:

$$1+2+...+k+(k+1)=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}.$$

Mamy:

$$(L)\qquad 1+2+...+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

.

$$(P)\qquad \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

To kończy dowód, ponieważ (*L)* strona równa się stronie prawej *(P)*.

.

PRZYKŁAD 2.
Jako dziedzinę weźmy wszystkich ludzi. Chcemy wykazać, że:

KAŻDY CZŁOWIEK MA IMIĘ.

DOWÓD:

Wszyscy ludzie, oprócz Adama i Ewy, mieli rodziców.
Rodzice, którzy sami mają imiona, nadają imię swemu dziecku.
Adam i Ewa mieli imiona.
Załóżmy, że ktoś kogo nazwiemy Osobą, jest pierwszym człowiekiem, który nie ma imienia..
Osoba nie jest ani Adamem, ani Ewą, gdyż oni mają imiona.
Osoba ma rodziców.
Rodzice Osoby mieli imiona, gdyż Osoba jest pierwszym człowiekiem bez imienia.
Zatem rodzice Osoby musieli jej nadać imię.
Nie może być więc człowieka bez imienia.

WNIOSEK: ***KAŻDY CZŁOWIEK MA IMIĘ*** .

W tym rozumowaniu została użyta, w sposób szczególny i całkowicie nieformalny, właśnie metoda indukcji.

PRZYKŁAD 3.

G. W. Leibniz (siedemnastowieczny niemiecki filozof) udowodnił, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n, $n^3 - n$ jest podzielne przez 3; $n^5 - n$ jest podzielne przez 5 oraz, że $n^7 - n$ jest podzielne przez 7. Chciał ten wynik uogólnić bez dowodu, ale sam zauważył, że $2^9 - 2 = 510$ i nie jest podzielne przez 9. L. Euler zajmował się wielomianem o postaci $x^2 + x + 41$, który pozornie generował wyłącznie liczby pierwsze, bo tak było dla $x = 0, 1, 2, 3$, itd. Jednak tylko pozornie, ponieważ dla $x=41$ uzyskujemy liczbę złożoną: $41^2 + 41 + 41 = 43 \times 41$.

Przykłady te pokazują, że uogólnienie jest uprawomocnione tylko na podstawie dowodu. Twierdzenie może zachodzić dla niektórych, nawet licznych, szczegółowych przypadków, ale nie może być równocześnie ogólnie fałszywe.

PRZYKŁAD 4.

Co jest nieprawidłowego w następującym ‘dowodzie’?

TWIERDZENIE: Elementy dowolnego zbioru (niepustego) są identyczne.

DOWÓD: Indukcja biegnie po liczności (liczbie elementów) zbioru.
$n = 1$. W tym przypadku zbiór ma jeden element, który jest identyczny sam ze sobą.
Załóżmy, że twierdzenie zachodzi dla $n = k$. Na tej podstawie chcemy wykazać, że zachodzi ono dla $n = k+1$. Weźmy zbiór $k+1$ – elementowy $\{a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$. Na mocy założenia indukcyjnego twierdzenie zachodzi dla k - elementowych zbiorów $\{a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}\}$ oraz $\{a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k\}$. Elementy obu zbiorów są identyczne z elementem a_1.

Twierdzenie zachodzi dla zbioru k+1 - elementowego. Zatem twierdzenie zachodzi dla dowolnego zbioru n - elementowego.

Dowód jest niepoprawny i twierdzenie jest jawnie fałszywe. Błąd leży w tym, że dla n=2 warunek indukcyjny nie zachodzi, gdyż odpowiednimi podzbiorami zbioru dwuelementowego są zbiory jednoelementowe.
Przykład ten ma za zadanie pokazać, że narzędzia dowodowego, którym jest zasada indukcji, należy używać ostrożnie.

PRZYKŁAD 5.

Alfabetem nazwijmy skończony zbiór wzajemnie różnych znaków zwanych *literami* $s_1, \ldots ,s_k$. *Słowem* nazywamy dowolny skończony ciąg *liter* alfabetu. *Długością* słowa *S* – *d(S)* - nazywamy liczbę wystąpień liter alfabetu, z których składa się *S*. Jest to przykład bardzo prostego języka o skończonym alfabecie. Nadaliśmy mu strukturę indukcyjną, przez zadanie na słowach funkcji długości *d*. Do takiego języka można stosować metodę indukcji po długości słów[2].

Powyższe rozważania pokazują, że zbiór o którego elementach chcemy wypowiedzieć i udowodnić jakąś ogólną prawdę za pomocą zasady indukcji, musi mieć określoną strukturę. Najlepszym i pierwotnym przykładem takiego zbioru jest zbiór liczb naturalnych.

DZIEDZINA ROZWAŻAŃ (UNIWERSUM) := zbiór obiektów, wraz z relacjami i funkcjami w nim określonymi, który stanowi przedmiot zainteresowania jakiejś teorii matematycznej lub logicznej.

Termin ‘universe of discourse’ – uniwersum dyskursu, wszedł na stałe do użycia w logice dzięki G. Boole’owi około roku 1847. [Corcoran 2003].

Wspomnianą wcześniej strukturę tworzy (zadaje) się określając następujące dwa zbiory:

(1) BAZA: jest to zbiór obiektów (danych a priori), które wyróżniamy w dziedzinie przez wskazanie. Zbiór takich obiektów oznaczamy symbolem *B*.

(2) REGUŁY (operacje): są to metody (dane a priori), które pozwalają z obiektów danych wcześniej tworzyć nowe obiekty. Zbiór takich reguł oznaczamy symbolem *R*.

Zbiór wszystkich obiektów utworzonych z elementów *B* za pomocą reguł *R* oznaczmy symbolem *C(B,R)*.

Taką strukturę nazywać będziemy strukturą **indukcyjną**, a zbiory mające taką strukturę zbiorami ***indukcyjnymi***.

Typowym przykładem wprowadzenia takiej struktury jest określenie dziedziny liczb naturalnych *N*. Mamy dane ‘a priori’ 0, oraz operację dodania jedności +1.

(1) BAZA: 0 należy do zbioru *N*.

(2) REGUŁA: jeśli *n* należy do zbioru *N*, to do *N* należy również *n*+1.

[2] Ten podkreślony zwrot będzie się zawsze powtarzał tam, gdzie pojawiać się będzie dowód indukcyjny. Zwrot ten wyjaśnia, w skrótowej formie, w jaki sposób została zadana struktura indukcyjna na zbiorze.

Zgodnie z powyższym sposobem notowania tego typu struktur mamy: $C(0,+1) = N$.

Niektórzy autorzy, jak np. S. C. Kleene, odróżniają pomiędzy definicjami indukcyjnymi a definicjami przez indukcję (rekurencyjnymi). Te pierwsze dzielą się dodatkowo na dwie klasy – definicje indukcyjne fundamentalne i definicje indukcyjne nie-fundamentalne. Fundamentalne definicje określają dziedzinę obiektów podstawowych dla całej dziedziny badań, zaś nie-fundamentalne stosują się do dziedziny określonej wcześniej przez definicję fundamentalną, określając (wyróżniając w niej) podklasę obiektów. Definicje rekurencyjne zaś, są metodami definiowania funkcji i predykatów nad podzbiorami indukcyjnie zdefiniowanej dziedziny.

Dla naszych celów wystarcza określenie zasady indukcji dla zbioru *N*, który posiada strukturę indukcyjną..

ZASADA INDUKCJI MATEMATYCZNEJ DLA *N* := aby wykazać, że wszystkie liczby zbioru *N* posiadają pewną własność *W* wystarczy pokazać, że:
(1) Liczba 0 ma własność *W*; [symbolicznie $W(0)$].
(2) Wykorzystując założenie, że liczba *k* ma własność *W* [symbolicznie $W(k)$] wykazać, że liczba $k+1$ ma własność *W* [symbolicznie $W(k+1)$].

Wyprzedzając dalsze rozważania podajemy ogólną postać zasady indukcji w postaci formuły. Niech A(x) będzie dowolną formułą ze zmienną x jako wolną:

$$(A(0) \land \forall k(A(k) \to A(k+1))) \to \forall k A(k)$$

Istnieje jeszcze inna wersja zasady indukcji, która jest równoważna zasadzie indukcji matematycznej. Oto jej sformułowanie również w postaci nieformalnej:[3]

ZASADA INDUKCJI PORZĄDKOWEJ DLA *N* := aby wykazać, że wszystkie elementy zbioru *N* posiadają własność *W* wystarczy pokazać, że:
(*) dla dowolnego *k*, jeśli wszystkie elementy mniejsze od *k* mają własność *W*, to *k* ma również własność *W*.

Podajemy również sformułowanie zasady indukcji porządkowej w postaci formuły:

$$\forall k\, (\forall y\, (\, y< k \to A(y)) \to A(k)) \to \forall k\, A(k)$$

2.1 UŻYCIE A WYMIENIANIE WYRAŻEŃ.

W wykładzie logiki dość często będziemy przechodzić od ***użycia*** wyrażeń do ich ***wymieniania*** i odwrotnie. Dziać się tak będzie bez specjalnej informacji o tym, gdyż zakładać się będzie, że zauważenie tego przez słuchacza jest zrozumiałe samo przez się. Stąd poniższe wyjaśnienie.

[3] Mając ścisłe sformułowania obu zasad można dowieść ich równoważności.

W logice średniowiecznej (William z Shyreswood, Piotr Hiszpan, Ockham) odróżniano relacje pragmatyczne zachodzące pomiędzy nazwą, przedmiotem, który dana nazwa nazywa i podmiotem. Do czasów dzisiejszych przetrwało zarówno nazewnictwo z czasów średniowiecza i sama dystynkcja. Otóż odróżnia się dwie podstawowe *supozycje*, czyli pragmatyczne nastawienia w posługiwaniu się wyrażeniami, w szczególności nazwami:

(1) ***suppositio materialis*** (2) ***suppositio formalis***

Gdy jakieś wyrażenie jest rozumiane jako nazwa samego siebie, to wtedy mówi się o nim, że jest *wymieniane* lub występuje *in suppositione materialis*. Słowo *materialis* wskazuje na zainteresowanie materią słowa (wyrażenia), którym jest dźwięk, napis itp. W tej supozycji mówimy na przykład: '*Logika' składa się z sześciu liter*. Słowo *logika* jest w tym zdaniu wymienione i występuje *in suppositione materialis*. Druga supozycja, jest zwykłym odniesieniem do wyrażeń. Wtedy wyrażenie użyte jest w swoim zwykłym znaczeniu. Na przykład: *Logika jest nauką o warunkach poprawności wnioskowań.*

Podczas wykładów często skupiać będziemy uwagę na czysto syntaktycznych cechach niektórych wyrażeń i wtedy *suppositio materialis* będzie często stosowane. Jest tak, gdyż jedno z najważniejszych pojęć logiki – pojęcie systemu formalnego (i dowodu) – ma charakter syntaktyczny.

2.3 KATEGORIE SEMANTYCZNE.

Już Arystoteles rozróżniał dziesięć podstawowych **kategorii** ontologicznych: *substancję*, i dziewięć przypadłości: *ilość, jakość, stosunek, miejsce, czas, położenie, stan, działanie, doznawanie*. Odpowiadały im kategorie wypowiedzi (orzeczników). W XIX wieku Husserl zdecydowanie przesunął akcent z ontologii na język i wyraźnie wprowadził termin *kategorie znaczeniowe* w swej gramatyce czystej (Bedeutungskategorien). Wprowadził zasadę, którą formułuję tutaj swobodnie:

ZASADA WYMIENIALNOŚCI := dwa dowolne wyrażenia jakiegoś języka należą do tej samej kategorii semantycznej wtw wynik zastąpienia jednego z tych wyrażeń drugim, w jakimś trzecim wyrażeniu sensownym, nie niszczy sensowności tego wyrażenia.

Teorię tych kategorii, zwanych inaczej *semantycznymi*, *syntaktycznymi* lub *składniowymi*,[4] rozwinęli polscy logicy – S. Leśniewski. A. Tarski i K. Ajdukiewicz. Ten trzeci, w pracy z 1935 (!) roku, zatytułowanej *O spójności syntaktycznej*, stworzył wygodne narzędzie opisywania kategorii semantycznych wyrażeń za pomocą specjalnego systemu indeksów.

Teoria kategorii semantycznych jest ściśle związana z russellowską teorią typów, której zadaniem było pokonanie antynomii w podstawach matematyki. Teoria typów dzieliła wszystkie obiekty matematyki na rozłączne *typy*, których bez popadnięcia w sprzeczność nie wolno było mieszać.

Poszczególnym kategoriom semantycznym wyrażeń przyporządkowane są kategorie ontologiczne obiektów matematyki (logiki). Tę odpowiedniość nazywa się za amerykańskim logikiem W. V. O. Quinem (1908-2002) *ontologicznym zaangażowaniem*

[4] Tych terminów będziemy używać zamiennie.

logiki. Mówiąc inaczej, użycie wyrażeń pewnej kategorii semantycznej wymusza uznanie istnienia obiektów ontologicznych, które im odpowiadają.

Podział na kategorie semantyczne, w ujęciu zaprezentowanym przez Ajdukiewicza, jest rozwijany dzisiaj intensywnie w tzw. *gramatyce kategorialnej*.
Należy podkreślić, że zastosowanie teorii kategorii semantycznych do języka naturalnego napotyka poważne przeszkody.

JĘZYK NATURALNY := każdy język składający się ze *zbioru wyrażeń sensownych*, *reguł syntaktycznych* i *postulatów znaczeniowych*; różniący się od języków sztucznych tym, że powstaje w sposób spontaniczny w dłuższym przedziale czasowym; ma cechę uniwersalności, która pozwala w nim mówić o nim samym; dopuszcza wyrażenia okazjonalne i wyrażenia wprowadzone za pomocą definicji ostensywnych[5]; kontekst wypowiedzi i ich sytuacyjność zmieniają funkcje semiotyczne i kategorie semantyczne wyrażeń.

Dla nieformalnego omówienia teorii kategorii semantycznych potrzebny jest pewien zabieg, którego dokonamy na języku naturalnym. Język naturalny, taki jak na przykład język polski, jest zazwyczaj językiem fleksyjnym.[6] Znaczy to, że większość wyrazów podlega odmianie – koniugacji i deklinacji. Na przykład mamy: *pies, psa, psu, psie, psom,* itd. Prócz tego niektórych wyrażeń sensownych nie da się bez utraty sensu rozłożyć na części, choć mają czasem syntaktycznie złożoną postać. Na przykład idiomatyczne wyrażenie *uderzyć w kalendarz* jest nierozkładalne na części w wyrażeniu; *Zenek uderzył w kalendarz, pogrzeb w piątek*. Ten sam zwrot w zdaniu; *Przyciskiem do papieru Zenek uderzył w kalendarz stojący na biurku*[7] jest rozkładalny. Tak samo zwroty *jeżeli..., to*; czy *ani...ani* są nierozkładalne. Dlatego dla ułatwienia rozważań wprowadzamy pojęcie leksemu.

LEKSEM := jest to nierozkładalne na części, sensowne wyrażenie języka, które abstrahuje od konkretnej formy fleksyjnej.

Leksem jest jakby bytem abstrakcyjnym i idealnym, którego konkretnymi formami lub realizacjami są wyrażenia języka w dowolnej formie. W literaturze anglosaskiej dokonuje się podobnego odróżnienia na wyrażenia *type* i wyrażenia *tokens*. Pierwsze odpowiadają naszym leksemom, zaś drugie konkretnym realizacjom leksemu. Jak pisze Tokarz *Leksemy mają się tak do swoich rzeczywistych form językowych, jak geometryczne pojęcie kwadratu czy trójkąta do materialnych kwadratów i trójkątów wykonanych z blachy, betonu, drewna,* [8] Przyjmijmy, że leksemy czasowników notować będziemy używając ich bezokoliczników, leksemy rzeczowników i zaimków używając mianownika liczby pojedynczej, zaś przymiotników – w pierwszym przypadku rodzaju męskiego liczby pojedynczej. Leksemy są jakby reprezentantami klasy swoich form konkretnych. Jeśli zaliczymy leksem do jakiejś określonej kategorii semantycznej, to należy on do niej wraz ze wszystkimi swymi formami. Wspomniane ułatwienie polega na tym, że zajmując się leksemami, pośrednio mówimy coś o ich formach. Leksemy będziemy pisać pogrubioną kursywą.

[5] Definicja ostensywna lub inaczej dejktyczna polega na wyjaśnieniu słownym terminu i dodatkowo pokazaniu typowych przedmiotów, które podpadają pod termin definiowany.
[6] Niektóre języki jak np. chiński uchodzą za niefleksyjne.
[7] Przykłady te pochodzą od M. Tokarza [Tokarz 1993].
[8] [Tokarz 1993; 21].

PRZYKŁADY.

1. Leksem ***studiować***, ma jako swoje formy konkretne; *studiuję, studiowałem, studiują, studiować* i wiele innych.
2. Leksemem formy *Jasnej Góry* będzie ***Jasna Góra***; zaś dla *jasnej góry* będę dwa leksemy; ***jasny*** oraz ***góra***.

Wedle Ajdukiewicza istnieją tylko dwie kategorie podstawowe – kategoria semantyczna nazw (oznaczana przez *n*) oraz zdań (oznaczana przez *z*). Wszystkie pozostałe wyrażenia (nie będące ani nazwami ani zdaniami) należą do klasy funktorów, która rozpada się na nieskończoną rodzinę kategorii semantycznych. Praktyczna metoda ustalania kategorii semantycznej wyrażenia sensownego wyglądać może następująco: po pierwsze pytamy, czy wyrażenie badane jest nazwą, jeśli tak, to kategoria jest ustalona; jeśli nie jest nazwą, to sprawdzamy, czy jest zdaniem, jeśli tak, to kategoria jest ustalona; jeśli nie jest zdaniem to musi być funktorem.

Olbrzymia i nieokreślona liczba kategorii semantycznych funktorów sprawia, że należy dodatkowo ustalić kategorię semantyczną funktora o który chodzi. Dlatego zapytujemy, ile argumentów ma wyrażenie będące funktorem; następnie jakie są kategorie semantyczne jego argumentów, by w końcu ustalić kategorię semantyczną wyrażenia, które ów funktor tworzy wraz ze swoimi argumentami.

PRZYKŁADY.

1. Chcemy ustalić do jakiej kategorii semantycznej należy wyrażenie *dobry*. Nie jest ono ani nazwą, ani zdaniem, zatem jest funktorem. Używamy go w języku polskim w następujących zwrotach: *dobry człowiek*, *dobry lekarz* itp. Termin *dobry* tworzy wraz z nazwą nazwę, ale złożoną. Podstawą do takiego stwierdzenia jest tutaj niewątpliwie nasze wyczucie językowe, jako użytkowników języka polskiego. Funktor ten tworzy nazwę, wraz z jednym argumentem o kategorii semantycznej nazwy, co zapisujemy (za Ajdukiewiczem) w postaci ułamka $\frac{n}{n}$; gdzie licznik określa kategorię syntaktyczną, którą tworzy funktor ze swoim argumentem, zaś mianownik koduje liczbę argumentów (w naszym przypadku mamy jeden argument) oraz ich kategorie semantyczne.
2. Weźmy teraz słowo *kocha* i typowe konteksty naszego języka w których się pojawia. Mówimy na przykład *Jaś kocha Małgosię*, *Żołnierz kocha ojczyznę* itp. Oto symbol kategorii semantycznej rozważanego funktora: $\frac{z}{n\ n}$. Jest to funktor zdaniotwórczy od dwóch argumentów nazwowych.
3. Niektóre wyrażenia należą równocześnie do dwóch i więcej kategorii. Typowym przykładem jest słowo *i*, które raz pojawia się w kontekście *Ala i Ola*, gdzie pełni rolę funktora nazwotwórczego od dwóch argumentów nazwowych ($\frac{n}{n\ n}$), zaś drugi raz w zdaniu złożonym *Ala ma kota i Ola ma kota*, gdzie odgrywa rolę funktora zdaniotwórczego od dwóch argumentów zdaniowych, o indeksie $\frac{z}{z\ z}$.

Notacja kategorii semantycznych według Ajdukiewicza zwana jest czasem systemem indeksów. Za ich pomocą można, podpisując w wyrażeniu złożonym z wielu wyrazów pod każdym z nich jego kategorię semantyczną, określić kategorię semantyczną całego wyrażenia złożonego. Wykorzystuje się to w badaniu poprawności syntaktycznej wypowiedzi, czy też np. programów komputerowych.

2.4 SEMIOTYKA LOGICZNA I METAJĘZYK

SEMIOTYKA (LOGICZNA) := ogólna teoria znaku. Gdy jest uprawiana metodami charakterystycznymi dla logiki, wtedy jest działem logiki - stąd ‘logiczna’. Dzieli się na trzy działy: semantykę (logiczną), syntaktykę (logiczną) oraz pragmatykę (logiczną) [Ch. Morris (1938)].

SEMANTYKA (LOGICZNA) := ogólna teoria relacji zachodzących pomiędzy **znakiem** i **rzeczywistością** do której znak się odnosi. Najważniejsze terminy semantyki: *oznaczanie, prawdziwość, wynikanie*.

SYNTAKTYKA (LOGICZNA) := ogólna teoria relacji zachodzących pomiędzy **znakami** jakiegoś języka. Podstawowe terminy: *formuła sensowna, dowód, dedukowalność, reguła.*

PRAGMATYKA (LOGICZNA) := ogólna teoria relacji zachodzących pomiędzy **podmiotem** (jako użytkownikiem tzn. nadawcą i odbiorcą znaku) a **znakiem**. Podstawowe terminy: *treść, znaczenie, uznawanie, kontekst wypowiedzi.*

Termin *teoria* użyty w powyższych określeniach, nie ma znaczenia technicznego, lecz potoczne. Mam tutaj na myśli uporządkowaną refleksję, posługującą się określonym typem pojęć.

Język naturalny lub sztuczny służyć ma w swej podstawowej funkcji do komunikowania i przechowywania zdobytej wiedzy. W języku wypowiadamy zdania (wyrażające sądy) odnoszące się do jakiejś rzeczywistości.

SĄD W SENSIE LOGICZNYM := znaczenie zdania. Odróżnia się ten sąd, od ***sądu w znaczeniu psychologicznym***, którym jest myśl wyrażana przez dane zdanie.

Od czasów A. Tarskiego i jego definicji prawdy dla języków sztucznych wiadomo, że aby mówić w sposób wolny od sprzeczności, o jakimś języku opisującym rzeczywistość (języku przedmiotowym), należy tego dokonać w ***metajęzyku*** (języku podmiotowym) tego języka. Metajęzyk, który jest zawsze zrelatywizowany do jakiegoś języka przedmiotowego lub klasy takich języków, jest językiem, w którym mówimy o języku. Metajęzyk posiada wszystkie środki wyrazu języka przedmiotowego, ale prócz tego może całkiem swobodnie mówić o wszystkich relacjach (syntaktycznych, semantycznych i pragmatycznych) wyrażeń języka przedmiotowego. Między innymi, jak zobaczymy to w późniejszej partii wykładu, opis sytemu formalnego dokonuje się w metajęzyku. Metajęzyk ma swoje własne zmienne, których zakresem zmienności są wyrażenia języka przedmiotowego, zwane

metazmiennymi. Dla opisania i mówienia w sposób niesprzeczny o metajęzyku trzeba wprowadzić metametajęzyk itd.

3. LOGICZNA TEORIA ZDAŃ.

Spośród wszystkich wyrażeń języka polskiego interesować nas będzie obecnie pewna grupa wyrażeń, której przysługuje cecha charakterystyczna pozwalająca owe wyrażenia odróżnić od wszystkich innych wyrażeń. Wyrażenia tej grupy nazywamy zdaniami, a wyróżniająca je cecha to możliwość przypisania im wartości logicznej prawdy lub fałszu. Od strony gramatycznej zdaniom w sensie logicznym odpowiadają zdania oznajmujące.

ZDANIE W SENSIE LOGICZNYM := wypowiedź języka, której można przypisać jedną z dwu wartości logicznych **prawdy** lub **fałszu.**

Oczywiście stwierdzona w tym określeniu 'możliwość' ma wyrazić tę intuicję, że niekoniecznie musimy aktualnie ową wartość logiczną zdania znać. Wystarczy, że taką wartość w zasadzie przypisać można. Zwrot 'w zasadzie' znaczy, że przy spełnionych dodatkowych warunkach idealizujących da się taką wartość przypisać. To przypisanie wartości logicznych polega na tym, że, jeśli jest tak, jak dane zdanie mówi, to przyporządkujemy mu wartość logiczną prawdy, jeśli jest przeciwnie, to fałszu. Ta intuicja odnośnie prawdziwości pochodzi już od Arystotelesa, który pisał w swej *Metafizyce*:

Powiedzieć o czymś, że jest i jest; lub, że nie jest i nie jest, to prawda. Powiedzieć o czymś, ze jest i nie jest; lub, że nie jest i jest, to fałsz.

Odnośnie wartości logicznych ***prawdy*** i ***fałszu*** nie czynimy żadnych założeń oprócz tego, że są to dwa ***różne*** obiekty. W dalszym wykładzie będziemy wartość logiczną prawdy oznaczać symbolem **1**, zaś wartość logiczną fałszu symbolem **0**. Ten sposób oznaczania przyjął się w wykładzie logiki, czasem jednak używa się innych symboli np. dla prawdy T (angielskie *truth*) i F dla fałszu (angielskie *false*).

ZAŁOŻENIE PIERWSZE KLASYCZNEJ TEORII ZDAŃ.

$$\mathbf{0 \neq 1}$$

Wyjaśnienie natury tych dwóch obiektów nie należy do badań logicznych, lecz do filozofii logiki. Zagadnieniem tym nie będziemy się zajmować.

ZAŁOŻENIE DRUGIE KLASYCZNEJ TEORII ZDAŃ:

DLA DOWOLNEGO ZDANIA *Z*, ALBO ZDANIE *Z* JEST PRAWDZIWE, ALBO JEST FAŁSZYWE.

Drugie założenie nazywa się czasem *zasadą dwuwartościowości*. Założenie to ma charakter idealizujący klasę zdań z języka naturalnego. Wynika z niego, że nie ma zdań, które nie były ani prawdziwe, ani fałszywe równocześnie. Oto jednak przykład zdania, któremu trudno przypisać jedną z tych dwu wartości logicznych, a jednak z intuicyjnego punktu widzenia wydaje się ono być całkiem dobrym zdaniem;

TO ZDANIE JEST FAŁSZYWE.

Założenie, że jest ono prawdziwe, prowadzi natychmiast do wniosku, że jest tak, jak zdanie to stwierdza, czyli, że jest fałszywe. Jeśli założymy przeciwnie, że jest fałszywe, to nie jest tak jak zdanie stwierdza, czyli zdanie nie jest fałszywe, zatem jest prawdziwe. Pojawiła się sprzeczność. W tym rozumowaniu w sposób istotny skorzystaliśmy z zasady dwuwartościowości. Gdyby tej zasady nie przyjąć, powyższego rozumowania nie dałoby się przeprowadzić.

Logicy do dzisiaj nie poradzili sobie w sposób ostateczny z powyższym paradoksem. Jedno z rozwiązań opiera się właśnie na odrzuceniu zasady dwuwartościowości. Ciekawym przeciwstawieniem powyższego zdania jest następujące: *To zdanie jest prawdziwe.* Jeśli założymy, że jest ono prawdziwe, to jest tak jak ono samo mówi, czyli jest prawdziwe.

WNIOSKOWANIE := dowolny skończony, co najmniej dwuwyrazowy ciąg zdań. Ostatnie zdanie w tym ciągu nazywamy *wnioskiem*, zaś wszystkie inne *przesłankami* wnioskowania.

Weźmy następujące przykłady wnioskowań:

PRZYKŁADY.

1. *Jeśli pada deszcz, to jezdnia będzie mokra.*
2. *Pada deszcz.*

---

3. *Jezdnia będzie mokra.*

1. *Jeśli pada deszcz, to jezdnia będzie mokra.*
2. *Nie padał deszcz.*

---

3. *Jezdnia nie będzie mokra.*

1. *Jeśli pada deszcz, to jezdnia będzie mokra.*
2. *Jezdnia jest mokra.*

---

3. *Padał deszcz.*

1. *Jeśli pada deszcz, to jezdnia będzie mokra.*
2. *Jezdnia nie będzie mokra.*

---

3. *Nie padał deszcz.*

Podane zostały cztery przykłady wnioskowań. Zadaniem obecnego etapu wykładu logiki jest wyposażenie studenta w intersubiektywne i efektywne narzędzie logiczne, które pozwoli mu na odróżnienie wnioskowania poprawnego logicznie, od wnioskowań niepoprawnych logicznie. Owo narzędzie będzie miało wartość ogólną, polegającą na tym, że student będzie umiał odróżniać ***dowolne*** wnioskowania (pewnego typu) poprawne logicznie, od wnioskowań niepoprawnych logicznie. Spośród podanych powyżej wnioskowań: pierwsze i czwarte są poprawne, ponieważ nie może być tak, by równocześnie przesłanki (czyli zdania występujące nad kreską) były prawdziwe w jakiejś możliwej do pomyślenia sytuacji, zaś wniosek (zdanie pod kreską) było w tej samej sytuacji fałszywe. Pozostałe dwa wnioskowania są niepoprawne logicznie, gdyż taka sytuacja jest do pomyślenia, gdzie przesłanki będą prawdziwe, a równocześnie wniosek będzie fałszywy. Ową sytuacją może być taka, gdzie deszcz nie padał, ale mogła jechać polewaczka i jezdnia jest mokra. Jeśli głębiej się zastanowić, to ‘wyczujemy’ ową poprawność sami. Zadaniem logiki jest uniezależnić się w ocenie poprawności wnioskowań od subiektywnego 'wyczucia' i zobiektywizować metodę oceny poprawności.

SCHEMAT := wyrażenie pewnego języka, w którym występują (w jakiś sposób zaznaczone) puste miejsca do wypełnienia.

Schematy języka polskiego dzielą się na trzy grupy w zależności od kategorii syntaktycznej wyrażenia, które ze schematu można uzyskać przez odpowiednie podstawienie:

a) schematy zdaniowe,
b) schematy nazwowe,
c) schematy funktorowe.

Rozumienie terminu *schemat* będzie się zmieniało w zależności od języka, o którym mowa w definicji – czyli języka badanego lub tzw. języka przedmiotowego. Obecnie ustalmy, że badanym językiem jest potoczny język polski.

PRZYKŁADY.

- *Ala ma __ .*
- *idzie drogą.*
- α *i --- kopią piłkę.*
- ℵ *jest* $\therefore$ *pilny.*

W powyższych przykładach występują puste miejsca do wypełnienia, które zaznaczone są w sposób bardzo różnorodny i skomplikowany, odpowiednio za pomocą znaków: __ , , α , --- , ℵ , $\therefore$. Każde z tych wyrażeń jest zatem schematem, gdyż występują w nim zaznaczone puste miejsca do wypełnienia. Gdyby puste miejsca nie były w żaden sposób oznaczone, to nie wiedzielibyśmy ile ich jest, lub czy w ogóle występują w wyrażeniu. Przykładowo porównajmy pierwszy z powyższych schematów z wyrażeniem niesamodzielnym *Ala ma*. W tym drugim przypadku nie potrafimy powiedzieć niczego o ewentualnych wolnych miejscach ani o ich liczbie. Należy zauważyć, że oznaczenie pustych miejsc może dokonać się za pomocą wyróżnionych znaków samego języka lub za pomocą znaków 'obcych', pochodzących spoza języka. W naszych przykładach wszystkie znaki, które zaznaczają puste miejsca, pochodzą spoza alfabetu języka polskiego. Jeśli mamy do czynienia z dużą liczbą schematów i potrzebujemy wiele różnych znaków na oznaczenie pustych miejsc, należy wtedy poczynić umowę odnośnie tego, jakie znaki będą służyły do oznaczania pustych miejsc w schematach. Zazwyczaj potrzebujemy ich potencjalnie nieskończenie wiele, gdyż schematy mogą mieć dowolną, choć skończoną, długość.
W puste miejsca można wstawiać dowolne wyrażenia języka. Może się tak zdarzyć, że po wstawieniu jakiegoś wyrażenia w puste miejsce w schemacie uzyskamy wyrażenie języka badanego. Tak będzie wtedy, gdy w jedyne puste miejsce schematu __ *ma kota.* wstawimy wyrażenie *Ala*. Uzyskamy zdanie *Ala ma kota.*. Może być jednak tak, że po wstawieniu okaże się, że uzyskane wyrażenie nie jest zdaniem sensownym języka polskiego. Będzie tak gdy do tego samego schematu w puste miejsce wstawimy słowo *więc*. Uzyskamy wtedy w wyniku *więc ma kota.*, które choć składa się z sensownych wyrażeń języka polskiego, to jednak samo nie jest zdaniem.

ZMIENNA := specjalnie zaznaczone puste miejsce do wypełnienia w schemacie, któremu to miejscu przypisany jest zbiór wyrażeń zwany *zakresem zmienności zmiennej*.

Zbiór wyrażeń zwany *zakresem zmienności zmiennej* jest tak dobrany, że podstawienie do schematu za zmienną dowolnego elementu zakresu jej zmienności, daje w wyniku wyrażenie sensowne języka mające ustaloną wcześniej kategorię semantyczną.

Ponieważ zazwyczaj chcemy dysponować dowolnie wieloma różnymi znakami dla zaznaczania pustych miejsc do wypełnienia, dlatego należy z góry ustalić efektywny sposób tworzenia wyróżnionych znaków, które będą temu celowi służyć.

Rozróżniamy pomiędzy zmienną, a ***wystąpieniem zmiennej***. Jakaś dowolna jedna zmienna może mieć w konkretnym schemacie wiele wystąpień. Na przykład w schemacie: *x jest większe od x*; występuje zmienna *x*, która ma w tym schemacie dwa wystąpienia. W schemacie $x+y = z$ występują trzy zmienne, z których każda ma tylko jedno wystąpienie. Zaś w schemacie $x+x = y$ występują dwie zmienne *x* oraz *y*, ale zmienne *x* ma dwa wystąpienia, natomiast zmienna *y* tylko jedno wystąpienie. Wystąpienie zmiennej możemy zawsze dokładnie określić, ponieważ musimy zawsze wiedzieć gdzie dowolne wyrażenie języka ma swój początek, a gdzie koniec. Można powiedzieć, że wystąpienie zmiennej wymaga więcej informacji, gdyż oprócz kształtu znaku (jego postaci) informuje nas o miejscu na którym występuje w danym wyrażeniu.

UMOWA.
Terminem ***zmienna*** będziemy odtąd nazywać zarówno puste miejsca w schematach jak i znaki, które będą te miejsca oznaczały. W matematyce szkolnej termin ten używa się właśnie w drugim znaczeniu.

Dla naszych dalszych rozważań szczególnie ważną rolę będą odgrywały schematy zdaniowe:

SCHEMAT ZDANIOWY := schemat pewnego języka, który po poprawnym podstawieniu za zmienne, w nim występujące, wyrażeń należących do zakresu zmienności zmiennych, przechodzi w zdanie sensowne tego języka.

Schemat zdaniowy, w którym występują wyłącznie zmienne typu nazwowego, nazywać będziemy ***formą zdaniową***.

Formę zdaniową nazywano *funkcja propozycjonalna* i z tym terminem można spotkać się szczególnie w starszych podręcznikach logiki. Jeszcze inny termin, który można spotkać w literaturze, to *funkcja zdaniowa*. Koncepcja formy zdaniowej pojawiła się w nawiązaniu do arystotelesowskiej koncepcji zdania kategorycznego, wedle którego własność wyrażona w orzeczniku przysługuje podmiotowi. Na przykład zdanie kategoryczne *Sokrates jest śmiertelny* przyjęto w logice rozważać jako podstawienie schematu *x jest śmiertelny*. Ostatecznie ten schemat formalizowano w postaci $P(x)$. Znak P w tym symbolicznym wyrażeniu traktowany jest jako stała, będąca skrótem dla własności *być śmiertelnym*, zaś x jest zmienną typu nazwowego.

Samo podstawianie za zmienne lub inaczej, wstawianie w puste miejsca do schematu dopuszczalnych wyrażeń, ma być operacją efektywną tzn. po skończonej liczbie kroków, wykonanych zgodnie z instrukcjami, operacja musi się zakończyć. Po drugie przyjmujemy następującą:

UMOWA

(i) Do dowolnego schematu wolno podstawiać za zmienne tylko wyrażenia z zakresu ich zmienności.

(ii) Za różne wystąpienia **tej samej** zmiennej w jednym schemacie, należy wstawiać **to samo** wyrażenie.

SPÓJNIK ZDANIOWY := funktor zdaniotwórczy od argumentów zdaniowych.

Spójnik nazywamy **ekstensjonalnym**, gdy wartość logiczna zdania zbudowanego z użyciem tego spójnika zależy tylko i wyłącznie od wartości logicznych zdań będących jego argumentami.
Spójnik nazywamy **intensjonalnym**, gdy wartość logiczna zdania zbudowanego z użyciem tego spójnika, zależy od wartości logicznych, jak również od treści zdań będących jego argumentami.

Liczba zdań, z którymi dany spójnik tworzy zdanie, nazywa się **liczbą argumentów** tego spójnika.

Głównym przedmiotem naszego zainteresowania będą następujące spójniki.[9]

Spójnik	Nazwa spójnika	Symbol	Liczba argumentów i kategoria syntaktyczna	Warunki prawdziwości
... i ...	koniunkcja [*inne* odpowiedniki: oraz; a; zaś; przy czym]	$\wedge$ [*inne czasem spotykane*: &; $\cdot$; $\cap$]	2 ; $\frac{z}{z\ z}$	Zdanie 'Z_1 i Z_2' jest prawdziwe wtw zdanie Z_1 jest prawdziwe i zdanie Z_2 jest prawdziwe.
... lub ...	alternatywa	$\vee$ [*inne spotykane*: $\cup$;]	2 ; $\frac{z}{z\ z}$	Zdanie 'Z_1 lub Z_2' jest prawdziwe wtw przynajmniej jedno ze zdań Z_1 , Z_2 jest prawdziwe.
Jeżeli ... , to ...	implikacja [Jeśli ... , to ...; ... zatem ...; ...a więc ...]	Jeśli ... , to ...; ... zatem ...; ...a więc ...	2 ; $\frac{z}{z\ z}$	Zdanie 'Jeżeli Z_1, to Z_2' jest fałszywe wtw zdanie Z_1 jest prawdziwe, a zdanie Z_2 jest fałszywe. W pozostałych przypadkach prawdziwe.
... wtedy i tylko wtedy, gdy ...	Równoważność [...jest równoważne ...; zawsze wtedy, gdy]	...jest równoważne ...; zawsze wtedy, gdy.	2 ; $\frac{z}{z\ z}$	Zdanie 'Z_1 jest równoważne Z_2' jest prawdziwe wtw oba zdania mają tę samą wartość logiczną.
Nieprawda, że ...	Negacja [Nie ...;]	Nie ...;	1 ; $\frac{z}{z}$	Zdanie 'Nieprawda, że Z' jest prawdziwe wtw zdanie Z jest fałszywe.

[9] W tabeli znaki Z, Z_1 oraz Z_2 oznaczają dowolne zdania w sensie logicznym.

Należy wspomnieć, iż dokonuje się tutaj pewnego rodzaju idealizacja polegająca na utożsamieniu pewnych zdań złożonych, utworzonych z wymienionymi spójnikami, z innymi zdaniami złożonymi języka naturalnego, które w języku naturalnym polskim nie do końca są równoznaczne. Na przykład zdanie *Nieprawda, że Ala ma kota* jest negacją zdania *Ala ma kota*. Ale również negacją tego zdania jest *Ala nie ma kota*. Będziemy te zdania utożsamiać jako mające to samo znaczenie. Choć już na pierwszy rzut oka widać, że nie mają tego samego znaczenie. Uproszczenie, prowadzące do idealizacji jest ceną jaką się płaci za możliwość operacyjnego określenia spójników. Podobnie jest z innymi zdaniami złożonymi z odpowiednikami spójników z powyższej tabeli.

Powyższy zabieg idealizacyjny na języku naturalnym, oprócz utożsamienia pewnych zdań, niesie też konsekwencję w postaci szczególnego (odmiennego niż intuicyjny) rozumienia zdań złożonych. To, co jest zdaniem złożonym w intuicyjnym pojmowaniu, nie musi być zdaniem złożonym, z punktu widzenia przyjętego zespołu spójników.

PRZYKŁAD.
Zdanie *Ale ma kota i Ola ma kota* jest zdaniem złożonym. Jednak zdanie *Uważam, że Ala ma kota i Ola ma kota* jest z naszego punktu widzenia zdaniem prostym.

Obecnie przejdziemy do nieco ściślejszego sformułowania teorii zdań.

W powyższej tabeli ustalone zostały symbole jakich będziemy używać jako znaki sztuczne na rozważane przez nas spójniki zdaniowe, czyli funktory zdaniotwórcze od argumentów zdaniowych.

Na zmienne kategorii zdaniowej () używać będziemy następujących znaków sztucznych:

ZNAKI NA ZMIENNE ZDANIOWE (w skrócie mówimy **zmienne zdaniowe**) mają postać: p_1, p_2, p_3, ... p_n , ... **.** Zbiór wszystkich tych zmiennych zdaniowych jest nieskończony i oznaczać go będziemy symbolem V.

UMOWA
W dalszej części notatek wyłącznie ze względów ekonomicznych, o ile nie będzie prowadziło to do nieporozumień, na zmienne zdaniowe będziemy używali znaków p, q, r, s, t.

System formalny, który ujmuje podstawowe zachowania zdań złożonych nazywa się **rachunkiem zdań**. Formalna teoria zdań, którą obecnie omawiamy nazywa się **Klasyczny Rachunek Zdań (KRZ)**.

Każda **system formalny (SF)** traktujemy jako obiekt o charakterze syntaktycznym. Aby zbudować jakiś SF należy:

(i) Zdefiniować sztuczny język SF;
- podać alfabet,
- zbiór wyrażeń sensownych.

(ii) Zdefiniować aparat dedukcyjny SF;
- podać aksjomaty,
- określić zbiór reguł inferencyjnych .

PRZYKŁAD[10]
W poniższych przykładach symbol A jest metazmienną, której zakresem zmienności jest zbiór wyrażeń sensownych odpowiedniego języka.

SF1. Alfabet: *a*, *b* (dwa symbole).
Wyrażenie sensowne: są to wszystkie skończone ciągi liter *a* oraz *b*.
Aksjomaty: 1. *a*.
Reguły: R1. $\frac{A}{Ab}$;

R2. $\frac{A}{aAa}$;

SF2. Alfabet: *a* , *b*.
Wyrażenie sensowne jak w systemie SF1.
Aksjomaty: 1. *a*.
2. *ab*.

Reguły: R1. $\frac{Aa}{Aab}$;

R2. $\frac{Ab}{Aba}$;

SF3. Język tak jak w SF1 i SF2.
Aksjomaty: 1. *a*.
Reguły: R1. $\frac{A}{aAa}$;

R2. $\frac{aA,\ Aa}{bAb}$;

SYSTEM FORMALNY KLASYCZNEGO RACHUNKU ZDAŃ

1. ALFABET. Składa się trzech grup symboli:

- Przeliczalnie nieskończony zbiór zmiennych zdaniowych V,
- Spójniki: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\equiv$;
- Nawiasy: (,).

1. ZBIÓR WYRAŻEŃ SENSOWNYCH oznaczamy FORM. Jest to najmniejszy[11] zbiór wyrażeń spełniający następujące warunki:
   (i) Każda zmienna zdaniowa jest formułą, symbolicznie $V \subset$ FORM.

[10] Te przykładowe systemy pochodzą z książki P. Lorenzena, *Einfuehrung in die operative Logik und Mathematik*, Berlin 1955, ss. 14-15; zob. również Z. Pawlak, *Automatyczne dowodzenie twierdzeń*, Warszawa 1965, ss. 15-17.
[11] Określenie ‘najmniejszy’ znaczy to samo co warunek: (iv) Nic innego nie jest formułą (wyrażeniem sensownym KRZ) co nie zostało dołączone do zbioru FORM na podstawie warunków wymienionych w punktach (i), (ii), (iii) definicji

(ii) Jeśli A i B są formułami, to formułami są $(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\to B)$, $(A\equiv B)$. Symbolicznie: $A, B \in FORM \Rightarrow (A\wedge B), (A\vee B), (A\to B), (A\equiv B) \in FORM$.

(iii) Jeśli A jest formułą, to $\neg A$ jest także formułą. $A \in FORM \Rightarrow \neg A \in FORM$.[12]

2. AKSJOMATY:[13]

[1] $(p\to q)\to((q\to s)\to(p\to s))$.
[2] $(p\to(p\to q))\to(p\to q)$.
[3] $p\to(q\to p)$.
[4] $p\wedge q\to p$.
[5] $p\wedge q\to q$.
[6] $(p\to q)\to((p\to s)\to(p\to q\wedge s))$.
[7] $p\to p\vee q$.
[8] $q\to p\vee q$.
[9] $(p\to s)\to((q\to s)\to(p\vee q\to s))$.
[10] $(p\equiv q)\to(p\to q)$.
[11] $(p\equiv q)\to(q\to p)$.
[12] $(p\to q)\to((q\to p)\to(p\equiv q))$.
[13] $(\neg q\to\neg p)\to(p\to q)$.

3. REGUŁY INFERENCJI.

$$\frac{A\to B,\ A}{B}$$ [Reguła Odrywania (RO) – Modus Ponens];

$$\frac{A(p_1,\ldots,p_n)}{A(p_1/B_1,\ldots,p_n/B_n)}$$ [Reguła Podstawiania (RP)].

Opis powyższy wymaga jednak paru komentarzy.
Po pierwsze jest on sformułowany w **metajęzyku** języka KRZ. Dlatego też zmienne A, B w nim występujące są zmiennymi metajęzyka i noszą nazwę **metazmiennych**. Znak $\Rightarrow$ jest implikacją metajęzykową.
Po drugie w opisie systemu zastosowano pewną umowę dotyczącą nawiasów.

UMOWA
1. Spójniki wiążą swe argumenty według następującej kolejności: negacja, potem równorzędnie koniunkcja i alternatywa, implikacja i na końcu równoważność.
2. Zewnętrzne nawiasy opuszczamy.
3. Opuszczamy te nawiasy, których opuszczenie nie powoduje wieloznaczności w jednoznacznym sposobie odczytania formuły (wiąże się to z umowami z punktów 1. i 2.).

PRZYKŁAD. Na zastosowanie umowy.

[12] Jest to definicja indukcyjna formuły. Warunek (i) – baza oraz warunki indukcyjne (ii) i (iii).
[13] Aksjomaty te pochodzą od aksjomatyk zbudowanych przez D. Hilberta oraz Jana Łukasiewicza.

Zgodnie z definicją formuły, formułami są: $((p_1 \to p_2) \to ((p_2 \to p_3) \to (p_1 \to p_3)))$; $((p_1 \wedge p_2) \to p_1)$. Na podstawie powyższej umowy możemy napisać obie formuły tak jak są one zapisane na liście aksjomatów jako odpowiednio aksjomaty [1] i [4].
PRZYKŁAD. Na zastosowanie reguły podstawiania. Jej stosowanie jest dość skomplikowane, dlatego podamy kilka przykładów jej zastosowania. Niech symbol *A*(p) oznacza formułę sensowną języka KRZ w której zmienna p ma co najmniej jedno wystąpienie, zaś *B* oznacza dowolną formułę KRZ. Symbolem *A*(p/B) oznaczamy formułę sensowną KRZ będącą wynikiem operacji polegającej na zastąpieniu zmiennej p na wszystkich miejscach, na których występowała w *A*(p) przez formułę *B*.

Po trzecie aksjomatów naszego systemu jest tylko skończenie wiele, ale dlatego to musimy przyjąć regułę podstawiania w systemie. Można zastosować zabieg, polegający na tym, że możemy przyjąć nieskończony zbiór aksjomatów, ale wypisanych w postaci schematów aksjomatów. Schematy te wyglądają tak samo jak nasze aksjomaty z tym, że na miejscach zmiennych zdaniowych występują metazmienne. Pod każdy taki schemat podpada nieskończenie wiele aksjomatów. Na przykład pod schemat: $A \to (B \to A)$ podpada nasz aksjomat [3] jak i na przykład formuła: $p \wedge q \to ((r \to r) \to p \wedge q)$. W takim przypadku można zrezygnować z reguły podstawiania i system będzie miał tylko jedną regułę – regułę odrywania.

Po czwarte komentarza wymagają reguły inferencji. W KRZ mamy dwie reguły. Na mocy RO mając implikację i jej poprzednik, można dołączyć następnik tej implikacji. Reguła podstawiania pozwala uzyskać formułę, która jest wynikiem podstawienia **równoczesnego** za niektóre (lub wszystkie) zmienne zdaniowe występujące w formule dowolnych wyrażeń poprawnie zbudowanych. Każda reguła inferencji jest pewnego rodzaju efektywnym przepisem, który pozwala na wykonanie pewnej ściśle określonej operacji na zbiorze wyrażeń danych.

TWIERDZENIE SF := Formułę A nazywamy twierdzeniem określonego SF wtw istnieje dowód A w SF.

DOWÓD A W SF := Skończony ciąg formuł $<A_1, \dots , A_n>$ nazywamy dowodem A w systemie formalnym SF wtw spełnia następujące warunki:

- $A_n = A$,
- Każda formuła A_i [gdzie $1 \leq i \leq n$] jest albo aksjomatem, albo została uzyskana z formuł wcześniejszym w tym ciągu za pomocą którejś z reguł inferencyjnych SF.

Zbiór wszystkich twierdzeń KRZ oznaczmy symbolem Dow_{KRZ}.

PRZYKŁAD.
Formuła $p \to p$ jest twierdzeniem KRZ [symb: $p \to p \in Dow_{KRZ}$].
Następujący ciąg formuł jest jej dowodem: $< (p \to (p \to q)) \to (p \to q), (p \to (p \to p)) \to (p \to p), p \to (q \to p), p \to (p \to p), p \to p >$. Jest tak ponieważ: (i) ciąg ten jest skończony; (ii) każda z formuł jest albo aksjomatem albo została uzyskana z formuł wcześniejszych w tym ciągu (formuła czwarta z trzeciej przez podstawianie, zaś piąta

przez odrywanie z drugiej i czwartej); (iii) ostatnia formuła jest identyczna z dowodzoną tezą

KRZ jest systemem formalnym określonym metodami syntaktycznymi. Należy zwrócić uwagę, ze pojęcie dowodu ma również charakter syntaktyczny.

Oto dodatkowe definicje, które będą przydatne w dalszej części pracy. Definicja długości formuły nadaje zbiorowi $FORM_{KRZ}$ strukturę indukcyjną. W dalszych wykładach podczas dowodzenia wielu twierdzeń, posługiwać się będziemy indukcją biegnącą po **długości formuły** lub zamiennie **po stopniu złożenia formuły**.

DŁUGOŚĆ (STOPIEŃ ZŁOŻENIA) FORMUŁY KRZ := funkcja d : $FORM_{KRZ}$ $\square$ N nazywa się *długością formuły języka* KRZ o ile spełnione są warunki:

(1) $d(A) = 0$, gdy $A \in V$,
(2) $d(A \wedge B) = d(A \vee B) = d(A \rightarrow B) = d(A \equiv B) = d(A) + d(B) + 1$, gdy $A,B \in FORM_{KRZ}$,
(3) $d(\neg A) = d(A) + 1$, gdy $A \in FORM_{KRZ}$.

PODFORMUŁA := (nieformalnie) Dowolną część formuły A, która sama jest formułą, nazywamy podformułą formuły A. Formalnie wyrażają to następujące trzy warunki:

(1) Jeśli A jest zmienną zdaniową, to jej jedyną podformułą jest ona sama,
(2) Jeśli A ma którąś z postaci $(B \vee C)$, $(B \wedge C)$, $(B \rightarrow C)$, $(B \equiv C)$, to podformułami A są: ona sama oraz wszystkie podformuły formuły B i wszystkie podformuły formuły C,
(3) Jeśli A ma postać $\neg B$, to jej podformułami są: ona sama oraz wszystkie podformuły formuły B.

W dalszej części wykładu będziemy bardzo starannie odróżniać pomiędzy zmienną a **wystąpieniem zmiennej**. Wyjaśnimy to na przykładzie.

PRZYKŁAD.
Mamy formułę KRZ: $(((p \rightarrow q) \wedge (r \vee \neg p)) \rightarrow (p \rightarrow q))$.
W tej formule występują zmienne p, q oraz r. Zmienna p ma trzy wystąpienia, zmienna q dwa wystąpienia, zaś zmienna r ma tylko jedno wystąpienie. Każde wystąpienie ma swój numer porządkowy. Posuwając się od lewej strony formuły (od jej początku) w prawo przypisujemy kolejne numery wystąpieniom danej zmiennej.

Przejdziemy obecnie do ujęcia formuł KRZ od strony semantycznej.

Formuły te można pojmować jako abstrakcyjne wypowiedzi o zdaniach logicznych przyjmujących tylko dwie wartości logiczne prawdy i fałszu. A nawet można rzec iż są to wypowiedzi pewnej ubogiej arytmetyki dla której istnieją tylko dwie liczby **0** i **1**.

Ponieważ wszystkie zdania dzielą się na dwie rozłączne klasy, klasy zdań prawdziwych, którą oznaczamy symbolem **1** oraz klasy zdań fałszywych, którą oznaczamy symbolem **0**, można z .

WARTOŚCIOWANIE LOGICZNE := jest to każda funkcja v przyporządkowująca formułom KRZ jedną z dwóch wartości logicznych [$v: FORM_{KRZ} \to \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$].

Jeśli A jest formułą KRZ, to symbol v(A) nazywać będziemy **wartością logiczną formuły A dla wartościowania logicznego v**, lub w skrócie **wartością A dla v**.

Jak widać klasa wszystkich wartościowań jest bardzo liczna. Można udowodnić, że wartościowań jest tyle ile jest liczb rzeczywistych.

Ponieważ formuły KRZ dzielą się na proste (zmienne zdaniowe) i złożone chcemy znać sposób w jaki wartość logiczna v(A) zależeć będzie od wartości logicznych podformuł formuły A. Dokładnie chcemy umieć wyliczyć wartość formuły A mając zadane wartości logiczne zmiennych zdaniowych w niej występujących.

WARTOŚCIOWANIA BOOLOWSKIE[14] := wartościowanie logiczne v nazywać będziemy wartościowaniem boolowskim wtw spełnione są następujące warunki:

(1) $v(\neg A) = \mathbf{1}$ wtw $v(A) = \mathbf{0}$,

(2) $v(A \wedge B) = \mathbf{1}$ wtw $v(A) = v(B) = \mathbf{1}$,

(3) $v(A \vee B) = \mathbf{0}$ wtw $v(A) = v(B) = \mathbf{0}$,

(4) $v(A \to B) = \mathbf{0}$ wtw $v(A) = \mathbf{1}$ i $v(B) = \mathbf{0}$,

(5) $v(A \equiv B) = \mathbf{1}$ wtw $v(A) = v(B)$.

W zrozumieniu powyższej definicji należy pamiętać, że zachodzi następująca własność metalogiczna: dla zdań Z, Z_1 jeśli Z wtw Z_1, to nieprawda, że Z wtw nieprawda, że $Z_{1.}$

TAUTOLOGIA KRZ := formuła A języka KRZ jest tautologią KRZ wtw v(A) = **1** dla dowolnego wartościowania boolowskiego.

Zbiór wszystkich tautologii KRZ oznaczamy symbolem $TAUT_{KRZ}$.

Odpowiedź na ogólne pytanie dotyczące liczby różnych ekstensjonalnych spójników logicznych dwu- i jednoargumentowych jest znana. Istnieje tylko szesnaście różnych spójników boolowskich dwuargumentowych. Wszystkie one są ekstensjonalne i zachodzi dla nich taka własność, że wartość zdania złożonego zależy tylko od wartości logicznych zdań będących argumentami. Różnych spójników boolowskich jednoargumentowych jest cztery. Wynika to natychmiast z poniższej tabeli.

v(A)	v(B)	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13	F14	F15	F16
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**

[14] Od nazwiska angielskiego logika George'a Boole'a.

Każdy symbol Fi dla $1 \leq i \leq 16$, oznacza wartość logiczną formuły złożonej zbudowanej z formuł A oraz B połączonej spójnikiem zdefiniowanym przez wartości występujące w tej kolumnie tabeli, która w pierwszym wierszu ma Fi. Na przykład F5 ma postać v(A→B); F8 to v(A∧B); F7 to v(A≡B); F2 to v(A∨B).

Tabela dla spójników jednoargumentowych.

v(A)	f1	f2	f3	f4
1	**1**	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**0**	**1**	**0**

Mamy: f3 to nasza negacja; f1 można interpretować jako funktor asercji, f2 jako potwierdzania, zaś f4 jako funktor odrzucania.

Niech X będzie zbiorem formuł języka KRZ. Powiemy, że zbiór X jest **spełnialny** gdy istnieje takie wartościowanie boolowskie v, że: v(A) = **1**, dla każdej formuły A ze zbioru X.

Czasami dla wygody Czytelnika będzie się pisać np. v(X) = **1**, gdzie X jest zbiorem formuł. Napis ten należy rozumieć następująco: wszystkie formuły zbioru X przyjmują równocześnie dla wartościowania boolowskiego v wartość logiczną prawdy.

Przypominam, że wnioskowaniem nazywamy dowolny, skończony co najmniej dwuwyrazowy ciąg zdań.

REGUŁA WNIOSKOWANIA := regułą wnioskowania nazywamy dowolny co najmniej dwuwyrazowy ciąg formuł.

Regułę wnioskowania oznaczać będziemy następująco:

$$\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{n-1} \\ \hline A_n \end{array} \qquad \text{lub} \qquad \frac{A_1, \ldots, A_{n-1}}{A_n}.$$

Formuły nad kreską nazywamy przesłankami reguły, zaś formułę pod kreską wnioskiem.

Jak widać z powyższego określenia pojęcie reguły wnioskowania jest zrelatywizowane do systemu formalnego. Jeśli będziemy rozważać system KRZ z właściwym dla niego pojęciem formuły, to regułą wnioskowania jest skończony, co najmniej dwuwyrazowy ciąg formuł KRZ. Choć w dalszej części wykładu pojęcie reguły ulegnie istotnemu rozszerzeniu, to jednak obecnie ograniczymy się do KRZ.

REGUŁA NIEZAWODNA (DEDUKCYJNA) := regułę nazywamy niezawodną, czyli dedukcyjną wtw dla żadnego wartościowania boolowskiego v nie może być tak, że przesłanki przyjmą wartość logiczną prawdy, zaś wniosek przyjmie wartość logiczną fałszu.

Powiemy, że dane wnioskowanie $\dfrac{Z_1, \ldots, Z_{k-1}}{Z_k}$ jest **oparte na regule wnioskowania** $\dfrac{A_1, \ldots, A_{n-1}}{A_n}$ gdy n=k oraz gdy dla każdego $1 \leq i \leq n$ zdanie Z_i zostało uzyskane z formuły A_i przez podstawienie zdań za zmienne zdaniowe do A_i (różnych zdań za różne zmienne i tych samych zdań za wystąpienia tej samej zmiennej w formułach reguły).

WNIOSKOWANIE NIEZAWODNE (DEDUKCYJNE) := wnioskowanie $\dfrac{Z_1, \ldots, Z_{n-1}}{Z_n}$ nazywamy niezawodnym, czyli dedukcyjnym wtw jest oparte na niezawodnej regule wnioskowania $\dfrac{A_1, \ldots, A_{n-1}}{A_n}$.

Jak łatwo sprawdzić, koniunkcja ma własności łączności i przemienności. Następujące formuły są tautologiami KRZ:

$$p \wedge q \equiv q \wedge p\ ,$$
$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r.$$

Dzięki temu można wprowadzić pojęcie **uogólnionej koniunkcji**, które dotyczy zarówno zdań jak i formuł: wyrażenie $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ (lub odpowiednio $Z_1 \wedge Z_2 \wedge \ldots \wedge Z_n$) nazywamy uogólnioną koniunkcją tych formuł (zdań). Uogólniona koniunkcja przyjmuje wartość logiczną prawdy wtw wszystkie formuły (zdania) zwane **członami koniunkcji** przyjmą wartość logiczną prawdy.

Zachodzi następujące twierdzenie, zwane **TWIERDZENIEM O DEDUKCJI:**

Reguła wnioskowania $\dfrac{A_1, \ldots, A_{n-1}}{A_n}$ jest niezawodna (dedukcyjna) wtw formuła $A_1 \wedge \ldots \wedge A_{n-1} \rightarrow A_n$ jest tautologią KRZ.

Analogiczne twierdzenie obowiązuje dla wnioskowań.

Tautologia z twierdzenia o dedukcji, która ma w poprzedniku uogólnioną koniunkcję formuł, jest równoważna każdej formule różniącej się od niej tylko kolejnością członów uogólnionej koniunkcji. Wynika to natychmiast z wyżej sformułowanych własności koniunkcji. Zatem na mocy twierdzenia o dedukcji można abstrahować od kolejności przesłanek reguły wnioskowania. Jeśli oznaczymy zbiór przesłanek reguły literą X, to bardzo często stosowany przez logików napis $X \vdash A_n$ czytać będziemy: formuła A_n jest dedukcyjnym wnioskiem ze zbioru przesłanek X; albo inaczej: A_n **wynika dedukcyjnie (lub wynika logicznie)** ze zbioru X. Analogicznie dla wnioskowań. Jeśli X jest zbiorem zdań będących przesłankami wnioskowania, a Z_n jest wnioskiem tego wnioskowania, to napis $X \vdash Z_n$ czytamy: zdanie Z_n **wynika dedukcyjnie (lub wynika logicznie)** ze zbioru zdań X.

TWIERDZENIE O ROZSTRZYGALNOŚCI ZBIORU $\mathbf{TAUT_{KRZ}}$. Istnieje metoda efektywna – algorytm, która zastosowana do dowolnej formuły KRZ da w skończonej liczbie kroków odpowiedź na pytanie, czy dana formuła jest, czy też nie jest tautologią KRZ.

Szkic dowodu:

Dla dowodu wystarczy podać algorytm postępowania dla dowolnej formuły A.
Uczynimy to krokach.
Krok1. Napisz formułę.
Krok2. Oblicz ile w niej występuje rożnych zmiennych zdaniowych.
Krok3. Oblicz $2^n + 1$, gdzie n to liczba różnych zmienny w A; 2^n to liczba <u>różnych</u> wartościowań boolowskich n zmiennych zdaniowych.
Krok4. Zrób drzewko formacyjne[15] i oblicz ile A ma różnych podformuł.
Krok5. Narysuj tabelę, która ma $2^n + 1$ wierszy i tyle kolumn ile Ci wyszło w kroku 4.
Krok6. W pierwszym wierszy tabeli opisz wszystkie kolumny za pomocą podformuł. Tak jednak, żeby zmienne znalazły się w n pierwszych kolumnach tabeli, a w ostatniej kolumnie formuła A.
Krok7. W pierwszych n kolumnach wpisz 2^n wszystkich możliwych, różnych wartościowań n zmiennych zdaniowych.
Krok8. Oblicz wartości podformuł złożonych w dalszych kolumnach względem odpowiednich wartościowań zmiennych.
Krok9. Sprawdź co ostatnią kolumnę. Jeśli w każdym wierszu występuje symbol **1**, to A jest tautologią KRZ, jeśli występuje tam chociaż jeden raz symbol **0**, to badana formuła nie jest tautologią KRZ.

Opisany algorytm jest właściwie sformułowaniem poznanej na lekcjach matematyki w szkole średniej tzw. metody zero-jedynkowej sprawdzania tautologiczności formuł KRZ.

[15] Ścisłe pojęcie drzewka formacyjnego można wprowadzić dopiero po wprowadzeniu pewnych wiadomości z teorii mnogości.

4. NIEFORMALNA TEORIA ZBIORÓW

Polski logik Stanisław Leśniewski zwrócił uwagę na to, ze w języku naturalnym używamy terminu *zbiór* w dwu znaczeniach:

- *zbiór* w sensie ***kolektywnym*** inaczej ***mereologicznym***[16] **–** jest to obiekt przestrzenny, który składa się z części; relacja bycia częścią jest zwrotna, przechodnia i słabo antysymetryczna,

Mereologia jest mało znanym systemem aksjomatycznym. Jej pozalogicznym pojęciem pierwotnym jest pojęcie ‘części’ w następującym kontekście ‘ przedmiot c jest częścią przedmiotu d’. Dlatego warto tutaj zaprezentować jej aksjomaty. W sensie logicznym (a nie historycznym) mereologia Leśniewskiego jest teorią nadbudowaną na dwiema innymi teoriami – logiką zdań zwaną *prototetyką* oraz *ontologią* (nauką o spójniku *jest*). Dlatego poniższe przedstawienie aksjomatów mereologii za Kotarbińskim ma charakter przybliżający jedynie, a nie ścisły.
Aksjomaty Mereologii Leśniewskiego:
M1. Jeśli c jest częścią przedmiotu d, to d nie jest częścią przedmiotu c.
M2. Jeśli c jest częścią przedmiotu d, oraz d jest częścią przedmiotu e, to c jest częścią przedmiotu e.
M3. Jeśli c jest klasą przedmiotów x, oraz d jest klasą przedmiotów x, to c jest d.
M4. Jeśli pewien przedmiot jest x, to pewien przedmiot jest klasą przedmiotów x.
Def.1. c jest *ingrediensem* przedmiotu d wtw c jest tym samym przedmiotem co d lub c jest częścią d.
Def.2. c jest klasą przedmiotów x wtw a) c jest przedmiotem; b) każde x jest ingrediensem przedmiotu c; c) dla dowolnego d, jeśli d jest ingrediensem przedmiotu c, to pewien ingrediens przedmiotu d jest ingrediensem pewnego x.

- *zbiór* w sensie ***dystrybutywnym*** inaczej ***abstrakcyjnym*** – jest to obiekt idealny, pozaprzestrzenny, który posiada elementy; relacja należenia do takiego zbioru nie jest relacją przechodnią.

Pojęcie ***zbioru*** (w sensie abstrakcyjnym) jest podstawowym pojęciem matematyki. Podstawy matematyczne teoria tego pojęcia zostały stworzone w latach 1871-1883, przez genialnego matematyka niemieckiego **Georga Cantora (1845-1918)**. Sam Cantor i jego następcy posługiwali się tym pojęciem w sposób intuicyjny i takie używanie doprowadziło do pojawienia się antynomii w podstawach teorii zbiorów, zwanej również ***teorią mnogości***. Jedną z najbardziej znanych antynomii pojęcia zbioru, jest ***antynomia Russella*** odkryta przez B. Rusella w 1902 roku.

ANTYNOMIA RUSSELLA := klasę wszystkich zbiorów podzielimy na dwa rozłączne zbiory; X oraz R. Elementami zbioru X niech będą te wszystkie zbiory, które są swoimi własnymi elementami. Elementami zbioru R niech będą te wszystkie zbiory, które nie są swoimi własnymi elementami. Pytamy: czy zbiór R należy do zbioru X, czy też do zbioru R? Gdyby należał do zbioru X , to musiałby należeć do zbioru R, bo do zbioru X należą zbiory, które są swoimi elementami. Załóżmy zatem, że R należy do zbioru R, czyli jest swoim własnym elementem. Jeśli tak, to musi należeć do zbioru X, ponieważ do niego należą wszystkie zbiory będące swoimi własnymi elementami. Sprzeczność.

Zaprezentowana antynomia została zakomunikowana przez Russella Fregemu. Pokazała ona, że system Fregego zawiera w sobie sprzeczność. Antynomia ta jest najbardziej znana. Spośród innych należy wymienić antynomię Burali-Forti (1897).

[16] Teoria tych zbiorów została opracowana przez Leśniewskiego i nazywa się *mereologią* (od greckiego słowa *meros* – część, w sensie odłamu, fragmentu; dopełniacz - *mereos*).

Ze względu na wspomnianą ogólność pojęcia zbioru, nie jest możliwe sformułowanie definicji o tradycyjnej budowie, która oddawałaby dobrze sens tego pojęcia. Dlatego matematycy, zaniepokojeni pojawiającymi się antynomiami w obrębie teorii tego pojęcia, postanowili opracować jego precyzyjną teorię. Dla tego celu matematycy wykorzystali, znaną zresztą od czasów Euklidesa (IV wiek p. n. E.), aksjomatyczną metodę charakteryzowania pojęć. Dokonał tego w 1904 roku niemiecki matematyk E. Zermelo, w postaci *aksjomatycznej teorii mnogości*. Oto aksjomaty:

1. AKSJOMAT RÓWNOŚCI (IDENTYCZNOŚCI) ZBIORÓW. *Jeśli zbiory* X *i* Y *mają te same elementy, to zbiory* X *i* Y *są równe.*
2. AKSJOMAT SUMY. *Dla dowolnych dwóch zbiorów* X *i* Y *istnieje zbiór, którego elementami są wszystkie elementy zbioru* X *i wszystkie elementy zbioru* Y.
3. AKSJOMAT RÓŻNICY. *Dla dowolnych zbiorów* X *i* Y *istnieje zbiór, którego elementami są te elementy zbioru* X*, które nie są elementami zbioru* Y.
4. AKSJOMAT ISTNIENIA. *Istnieje co najmniej jeden zbiór.*
5. AKSJOMAT NIESKOŃCZONOSCI. *Istnieje co najmniej jeden zbiór nieskończony.*
6. AKSJOMAT PODZBIORÓW (dla formuły A(x)). *Dla każdego zbioru* X *i każdej formy zdaniowej* A(x)*, gdzie* X *jest zakresem zmienności* x*, istnieje zbiór złożony z tych i tylko tych elementów zbioru* X*, które spełniają tę formę zdaniową.*
7. AKSJOMAT ZBIORU POTĘGOWEGO. *Dla każdego zbioru* X *istnieje rodzina zbiorów* ***X****, której elementami są wszystkie podzbiory zbioru* X *i tylko one. [Rodzina ta nazywa się zbiorem potęgowym zbioru* X*]*
8. AKSJOMAT WYBORU. *Dla każdej rodziny zbiorów niepustych i rozłącznych istnieje zbiór, który z każdym ze zbiorów tej rodziny ma jeden i tylko jeden wspólny element.*
9. AKSJOMAT ZASTĘPOWANIA DLA FORMUŁY A (zmienna Y nie występuje jako wolna w A). *Jeśli dla każdego* x *istnieje dokładnie jeden taki* y*, że* A(x,y)*, to dla każdego zbioru* X *istnieje zbiór* Y*, którego elementami są te i tylko te elementy* y*, dla których – dla pewnego* $x \in X$ *– spełniony jest warunek* A(x,y).

Aksjomaty od pierwszego do czwartego wystarczają do udowodnienia z nich, za pomocą reguł logicznych, wszystkich własności tak zwanej **algebry zbiorów**. Wszystkie dziewięć aksjomatów pozwalają udowodnić znaczą część twierdzeń matematyki. Niektóre z aksjomatów są zależne od pozostałych w tym sensie, że da się je z pozostałych wyprowadzić. Na przykład aksjomat 4 można wyprowadzić bezpośrednio z aksjomatu 5, czy też aksjomat 3 z aksjomatu 6.

Analizując powyższe aksjomaty łatwo zauważyć, że teoria mnogości ma dwa pojęcia pierwotne (niezdefiniowane): pojęcie *zbioru* oraz *należenia elementu do zbioru*, co symbolicznie notujemy za Peano, $a \in X$[17]. Zbiory oznaczmy dużymi literami (ewentualnie z indeksami dolnymi) z końca alfabetu łacińskiego X, Y, Z. Określone elementy zbiorów oznaczmy małymi literami a, b, c, (ewentualnie z indeksami dolnymi). Zaś małe litery x, y, z, rezerwujemy jako zmienne indywiduowe kategorii nazwowej, reprezentujące dowolne

[17] Wzór ten czytamy następująco: *element* a *należy do zbioru* X, albo: a *jest elementem zbioru* X; albo w skrócie: a *należy do* X.

elementy zbiorów (ewentualnie z indeksami). Tłustymi literami **X**, **Y**, **Z**, oznaczamy rodziny zbiorów. **Rodzina zbiorów** jest to zbiór, którego elementy są zbiorami.

Dodatkowo używamy wszystkich symboli logicznych: $\neg$, $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\equiv$, (spójniki logiczne); $\forall$, $\exists$, (symbole kwantyfikatora odpowiednio ogólnego i szczegółowego) = (symbol identyczności o kategorii syntaktycznej $\frac{z}{n\ n}$)

Na mocy aksjomatu 1., zwanego często aksjomatem *ekstensjonalności* dla zbiorów, każdy zbiór jest jednoznacznie scharakteryzowany przez swe elementy. Aby zatem określić jakiś zbiór X należy i wystarcza wymienić jego elementy. Przyjęto czynić to w taki sposób, że elementy zbioru wypisuje się pomiędzy nawiasami klamrowymi. Na przykład: {a, b, c}. Jedynymi elementami zbioru X, są, a, b, c. Może się jednak tak zdarzyć, że zbiór jest nieskończony, to wtedy używa się w matematyce takiego sposobu: {x: A(x)}. Ten zapis czytamy tak: jest to zbiór takich x-ów, które spełniają warunek A(x). Jakiś x spełnia formę zdaniową A(x) wtedy, gdy w wyniku podstawienia nazwy *x* do formy zdaniowej A(x) otrzymamy zdanie prawdziwe. Na przykład: {x: x jest liczbą pierwszą} jest zbiorem wszystkich liczb pierwszych; {x: x jest mężczyzną i *x* pali papierosy} jest zbiorem wszystkich mężczyzn palących (wstrętne) papierosiska.

Konsekwencją aksjomatu (I) są następujące prawa:

{a} jest różne od a.
{a, b} jest identyczne (równe) z {b, a}
{a, a} jest identyczne (równe) z {a}

Jak widać ani powtórzenie jakiegoś elementu w opisie zbioru, ani porządek w jakim wymienione są elementy nie mają wpływu na sam zbiór.

Dla uchwycenia intuicji, która każe uznać obiekt {a} za różny od {a, a} wprowadzone zostało pojęcie *multizbioru* (po angielsku: *multiset*). Dwa obiekty {a} oraz {a, a} są identyczne jako zbiory, ale różne jako multizbiory.

Symbolicznie:

$$\neg(\{a\} = a)$$ [18]
$$\{a, b\} = \{b, a\}$$
$$\{a, a\} = \{a\}.$$

I ogólnie dla zbiorów X i Y, gdy są identyczne:

$$X = Y$$

oraz gdy są różne:

$$X \neq Y.$$

Aksjomat ekstensjonalności można zatem zapisać tak:

$$X=Y \text{ wtw } \forall x\,(x\in X \equiv x\in Y)\ \bullet$$

[18] Skrótem tego wyrażenia jest $\{a\} \neq a$.

Na mocy aksjomatu istnienia i aksjomatu różnicy istnieje co najmniej jeden zbiór $X - X$, nazywany **zbiorem pustym**, który oznacza się zazwyczaj symbolem $\varnothing$. Definicja tego zbioru może być taka: $X=\varnothing$ wtw $\neg\exists x\ (x\in X)$. Zachodzi następujące twierdzenie o tym zbiorze:

TWIERDZENIE.
Istnieje jeden zbiór pusty.

Dowód:
Załóżmy niewprost, że istnieją dwa zbiory puste $\varnothing_1$ oraz $\varnothing_2$. Na mocy własności implikacji (tej własności, ze implikacja o fałszywym poprzedniku ma wartość logiczną prawdy) prawdziwe jest następujące zdanie, dla dowolnego x:

$$x \in \varnothing_1 \equiv x \in \varnothing_2.$$

Stąd na mocy aksjomatu (I) mamy:

$$\varnothing_1 = \varnothing_2.$$

Zatem istnieje jedyny zbiór pusty i jest to ‘najmniejszy’ zbiór. O tym decydują aksjomaty. Można postawić pytanie o ‘największy’ zbiór. Nie jest nim na pewno *zbiór wszystkich zbiorów*, gdyż taki zbiór nie istnieje. Założenie o jego istnieniu prowadzi do antynomii. Można jednak mówić o zbiorze, który byłby rodzajem dziedziny rozważań wspomnianej wcześniej w rozdziale na temat indukcji. Ten największy zbiór, jeśli zostanie ustalony, oznaczamy symbolem U i nazywamy **uniwersum**. Należy zwrócić uwagę na to, że o uniwersum, należy wykazać, że jest zbiorem.

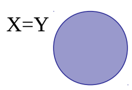
Istnieje wiele aksjomatycznych sformułowań teorii mnogości. To, przez nas omawiane, pochodzi Zermelo-Fraenkla. Znane są sformułowania w których oprócz (zamiast) pierwotnego pojęcia zbioru przyjmuje się pojęcie klasy. Przykładem pierwszego rodzaju jest teoria von Neumanna-Bernaysa-Gödla, zaś drugiego rodzaju teoria Kelleya-Morse’a.

Prócz identyczności pomiędzy dwoma dowolnymi zbiorami mogą zachodzić następujące **relacje**:

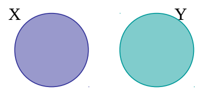
- $X \supset\subset Y$ wtw $\neg\exists x\ (x\in X \wedge x\in Y)$ - zbiory X i Y są rozłączne.
- $X \# Y$ wtw $\exists x\ (x\in X \wedge x\notin Y) \wedge \exists x\ (x\in X \wedge x\in Y) \wedge \exists x\ (x\notin X \wedge x\in Y)$ – zbiory się krzyżują.
- $X \subset Y$ wtw $\forall x\ (x\in X \rightarrow x\in Y)$ - zbiór X zawiera się w zbiorze Y. Zbiór X nazywamy **podzbiorem** zbioru Y, zaś zbiór Y **nadzbiorem** zbioru X. Jeśli zachodzi dodatkowo $X \neq Y$, to X nazywamy **podzbiorem właściwym** zbioru Y.

Oto reprezentacja graficzna czterech podstawowych relacji pomiędzy zbiorami w postaci tzw. kół Eulera. Każdy zbiór jest przedstawiony w postaci koła na płaszczyźnie.

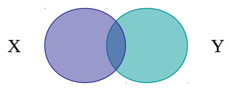
- X=Y



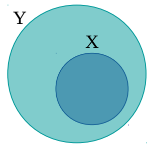
- $X \supset\subset Y$ wtw $\neg\exists x\ (x\in X \wedge x\in Y)$ - zbiory X i Y są rozłączne.



- $X \# Y$ wtw $\exists x\,(x \in X \wedge x \notin Y) \wedge \exists x\,(x \in X \wedge x \in Y) \wedge \exists x\,(x \notin X \wedge x \in Y)$ – zbiory się krzyżują.



- $X \subset Y$ wtw $\forall x\,(x \in X \rightarrow x \in Y)$ - zbiór X zawiera się w zbiorze Y.



Na zbiorach można wykonać **operacje**:

- $X \cap Y = \{x: x \in X \wedge x \in Y\}$ (iloczyn zbiorów).
- $X \cup Y = \{x: x \in X \vee x \in Y\}$ (suma zbiorów).
- $X - Y = \{x: x \in X \wedge x \notin Y\}$ (różnica zbiorów).
- $X' = U - X$ (dopełnienie zbioru X do uniwersum U).

Należy zwrócić uwagę na odmienny charakter relacji pomiędzy zbiorami, a operacjami na zbiorach. Wynikiem operacji na zbiorach jest zbiór. Dlatego kategoria syntaktyczna wyrażenia np. $X \cup Y$ (wyniku operacji na zbiorach) jest nazwą. Zaś kategoria syntaktyczna wyrażenie stwierdzającego zachodzenie relacji pomiędzy zbiorami jest zdaniem np. $X \subset Y$.

W tym miejscu jesteśmy przygotowani do poznania dodatkowych aksjomatów teorii zbiorów:

3'. UOGÓLNIONY AKSJOMAT SUMY. *Dla dowolnej rodziny zbiorów* **X** *istnieje zbiór* Y *złożony z tych i tylko tych elementów, które należą do jakiegoś zbioru* X *należącego do* **X.**
10. AKSJOMAT REGULARNOŚCI. *Dla dowolnej niepustej rodziny zbiorów* **X** *istnieje tak, zbiór* Y*, że* $Y \in \mathbf{X}$ i $Y \cap \mathbf{X} = \varnothing$.
11. AKSJOMAT PARY. *Dla dowolnych dwóch przedmiotów* a *oraz* b *istnieje zbiór, którego jedynymi elementami są* a *i* b.
12. AKSJOMAT ZBIORU PUSTEGO. *Istnieje taki zbiór* $\varnothing$ *, że dla żadnego* x *nie zachodzi* $x \in \varnothing$.

Systemem aksjomatycznym Zermelo-Fraenkla, który oznacza się symbolem ZFC gdzie literka 'C' bierze się od angielskiej nazwy Aksjomatu Wyboru – Axiom of Choice, jest system oparty o następujące aksjomaty: ekstensjonalności, zbioru pustego, sumy (3'), zbioru potęgowego, nieskończoności, wyboru, zastępowania (osobny aksjomat dla każdej formuły) oraz aksjomat regularności. W systemie ZFC pierwszego rzędu przyjmuje się założenie, że 'każdy x jest zbiorem'.[19]

[19] Por. w sprawie aksjomatów teorii mnogości prace; [Kuratowski, Mostowski; 1978] oraz [Fraenkel, Bar-Hillel, Levy; 1973].

PARA UPORZADKOWANA := parą uporządkowaną <a, b> nazywamy zbiór {{a}, {a, b}}.

Dla par uporządkowanych zachodzi:

$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \;\Rightarrow$[20] $a = c$ oraz $b = d$.

Uogólnieniem pojęcia pary uporządkowanej jest pojęcie uporządkowanej n-tki, gdzie 2 < n.

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle := \langle x_1, \langle x_2, \ldots, x_n\rangle\rangle .$$

UWAGA

W dalszej części skryptu będzie się używać zamiennie z terminem *n-tka uporządkowana* terminu *ciąg n-elementowy*, choć z punktu widzenia teorii mnogości są to różne obiekty.

PRODUKT KARTEZJAŃSKI ZBIORÓW X **i** Y **:=** zbiór wszystkich takich par <x, y>, gdzie $x\in X$ i $y\in Y$. Symbolicznie $X \times Y = \{\langle x, y\rangle: x\in X \wedge y\in Y\}$.

Zapisujemy $X \times Y \times Z = X \times (Y \times Z)$, $X \times (Y \times Z \times X_1) = X \times Y \times Z \times X_1$.

KWADRAT KARTEZJAŃSKI ZBIORU X **:=** symbolicznie: $X \times X = \{\langle x, y\rangle: x\in X \wedge y\in X\}$.

Kwadrat kartezjański zbioru X zapisujemy również w postaci X^2.

Produkt więcej niż dwuargumentowy zapisujemy w postaci $\underbrace{X \times \ldots \times X}_{n-razy} = X^n$.

RELACJA BINARNA OKREŚLONA W ZBIORZE $U \neq \emptyset$ **:=** dowolny podzbiór $U \times U$.

Termin 'binarna' znaczy dwuargumentowa.

RELACJA n-**ARGUMENTOWA OKREŚLONA W ZBIORZE** $U \neq \emptyset$:= dowolny podzbiór iloczynu U^n.

Zazwyczaj w zapisie relacji n-argumentowych powinna się pojawić informacja o tym, ilu argumentowa jest owa relacja. Dlatego, gdy będzie to niezbędne, oznaczając relację n-argumentową (n>2) będziemy używali czasami symbolu R^n, gdzie górny indeks wskazuje liczbę argumentów relacji.

UMOWA.

[20] Przypominam, że symbol $\Rightarrow$ jest metajęzykowa implikacją.

Relacje binarne oznaczamy literami R, S, T.
Ponieważ relacja binarna R jest zbiorem par dlatego należy pisać $<x, y> \in R$, co wyraża zachodzenie relacji R pomiędzy x oraz y. Zamiennie będzie się również używać, na fakt zachodzenia relacji R pomiędzy x i y, wygodniejszego zapisu postaci xRy. Wtedy będziemy mówić, że *element* x *poprzedza* y lub, że *element* y *następuje po* x. Ta umowa dotyczy jednak, ze zrozumiałych względów, tylko relacji binarnych.

Powyższe definicje jasno precyzują, że, z punktu widzenia matematycznego, utożsamia się relację z pewnym zbiorem. Dlatego tak, jak ze zbiorami zostały związane formy zdaniowe o jednej zmiennej wolnej, tak z relacjami binarnymi wiążemy formy zdaniowe np. A(x, y) o dwóch zmiennych wolnych i ogólnie z relacjami o n argumentach związujemy formy zdaniowe n-argumentowe postaci $A(x_1,..., x_n)$. Relacje n-argumentowe są zbiorami n-tek uporządkowanych.

Niech będzie, na przeciąg dalszych rozważań, ustalone niepuste uniwersum U. Wszystkie relacje binarne będą w nim określone. Dlatego nie będzie się pisało kwantyfikatora ograniczonego w postaci np. $\forall x \in U$, kiedy to będzie oczywiste jakie uniwersum jest zakresem zmienności x, lecz po prostu $\forall x$.

WŁASNOŚCI RELACJI BINARNYCH R :=
R jest zwrotna wtw $\forall x\ (xRx)$ **.**
R jest przechodnia wtw $\forall x \forall y \forall z\ (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$.

- R jest symetryczna wtw $\forall x \forall y\ (xRy \rightarrow yRx)$.
- R jest spójna wtw $\forall x \forall y\ (xRy \vee x=y \vee yRx)$.[21]

Ważnymi odmianami tych własności są:

R jest niezwrotna wtw $\exists x\ \neg(xRx)$.
R jest przeciwzwrotna wtw $\forall x\ \neg(xRx)$.
R jest nieprzechodnia wtw $\forall x \forall y \forall z\ (xRy \wedge yRz \rightarrow \neg xRz)$.
R jest antysymetryczna wtw $\forall x \forall y\ (xRy \rightarrow \neg(yRx))$.
R jest słaboantysymetryczna wtw $\forall x \forall y\ (xRy \wedge x \neq y \rightarrow \neg(yRx))$.
R jest silnie spójna wtw $\forall x \forall y\ (xRy \vee yRx)$.

Dla lepszego zrozumienia podaje się równoważne sformułowania:

R jest spójna wtw $\forall x \forall y\ (x \neq y \rightarrow xRy \vee yRx)$.
R jest słaboantysymetryczna wtw $\forall x \forall y\ (xRy \wedge yRx \rightarrow x=y)$.

RELACJA RÓWNOWAŻNOŚCI (TYPU RÓWNOWAŻNOŚCI) := jest to relacja binarna R, która jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

[21] Jest to przypadek uogólnionej alternatywy. Ma ona analogiczne własności do uogólnionej koniunkcji o której była mowa wcześniej.

Niech ustalone będzie uniwersum U oraz $n > 0$.

STRUKTURA RELACYJNA (MODEL) := jest to uporządkowana n+1-tka postaci $\left\langle U;\, R_1^{k_1}, \ldots, R_n^{k_n} \right\rangle$, gdzie każde k_i $(1 \leq i \leq n)$ jest liczbą argumentów i-tej relacji.

Strukturę o postaci ogólnej $\langle \boldsymbol{U}; \boldsymbol{R} \rangle$ gdzie U jest niepustym zbiorem zaś R relacją binarną porządkującą zbiór U nazywać będziemy:

- zbiorem **quasi-uporządkowanym,** gdy R zwrotna i przechodnia,
- zbiorem **częściowo uporządkowanym**, gdy R jest zwrotna, przechodnia i słaboantysymetryczna,
- zbiorem **liniowo uporządkowanym,** gdy R jest zwrotna, przechodnia, słaboantysymetryczna i spójna.
- zbiorem **słabo uporządkowanym,** gdy R jest zwrotna, przechodnia i silnie spójna.

Niech struktura $\langle \boldsymbol{U}; \boldsymbol{R} \rangle$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym, zaś **a** elementem uniwersum tej struktury. To wtedy:

- **a** nazywa się **minimalnym** wtw $\neg\exists x\, (x \neq \mathbf{a} \wedge xR\mathbf{a})$;
- **a** nazywa się **maksymalnym** wtw $\neg\exists x\, (x \neq \mathbf{a} \wedge \mathbf{a}Rx)$.[22]

Przy takich samych założeniach ja w określeniu elementu minimalnego i maksymalnego:

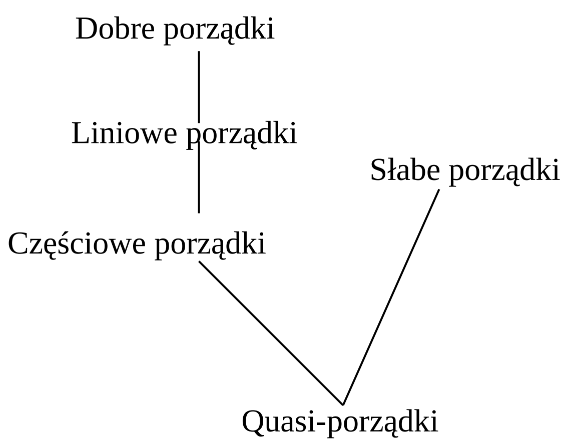
- **a** nazywa się **największym** wtw $\forall x\, (xR\mathbf{a})$,
- **a** nazywa się **najmniejszym** wtw $\forall x\, (\mathbf{a}Rx)$.

Strukturę $\langle \boldsymbol{U}; \boldsymbol{R} \rangle$ będącą zbiorem liniowo uporządkowanym nazywać będziemy:

- zbiorem **dobrze uporządkowanym** wtw każdy niepusty podzbiór uniwersum ma element najmniejszy.

Mówić też będziemy, że zbiór U jest dobrze uporządkowany przez relację R albo po prostu mówić będziemy o dobrym porządku. Analogicznie w skrócie mówić się będzie o: quasi-porządku, liniowym porządku czy słabym porządku itp.

Graficznie tak można przedstawić zależności pomiędzy porządkami.



[22] Wyjątkowo element **a** piszemy tłustym drukiem aby w tym kontekście odróżnić go od zwykłej litery a lub wyrazu a.

Niech $\langle U; R\rangle$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym oraz niech X będzie niepustym podzbiorem U. Punkt $x \in U$ nazwiemy **ograniczeniem górnym (dolnym) zbioru** X **względem relacji** R wtw aRx (xRa) dla każdego $a \in X$. **Kresem górnym (kresem dolnym)** zbioru X (symbolicznie supX (infX)) nazwiemy najmniejsze ograniczenie górne (największe ograniczenie dolne) zbioru X o ile ono istnieje. Jak wiadomo takie ograniczenie najmniejsze (resp. największe ograniczenie) w ogólnym przypadku nie musi istnieć.

Z powyższych definicji widać jasno, że z logicznego punktu widzenia relacja jest pewnym szczególnym zbiorem. Tak jest zarówno z logicznego jak i *logicystycznego* punktu widzenia. Ojciec logicyzmu Frege twierdził, że: *cała matematyka, a w szczególności arytmetyka da się sprowadzić do logiki*. Tego programu nie udało się przeprowadzić, pomimo wysiłku nie byle jakich następców, jak Russell i Whitehead. Jak twierdzą (i twierdzili) niektórzy matematycy, czy filozofowie, udało się sprowadzić matematykę do teorii mnogości. Jednak dzisiaj niektórzy wybitni logicy, jak na przykład Georg Kreisel, są zdania, że niektóre zagadnienia matematyki wykraczają poza teorię mnogości. Ten ostatni pogląd jest jednak rzadko uznawany w społeczności logików i matematyków.

DRZEWO $T = \langle U; R\rangle$ **:=** zbiór U wraz z relacją binarną R określoną w U, gdy spełnione są następujące własności:

- R jest relacją częściowego porządku,
- w U istnieje element najmniejszy względem R.
- Zbiór $G_x = \{y: yRx\}$ jest dobrze uporządkowanym przez relację R.

Takie zawężone pojęcie drzewa jest potrzebne w dalszej części naszych rozważań. Ogólniejsze pojęcie teoriomnogościowe można znaleźć na przykład w [Kuratowki, Mostowski 1978; 303-304]. Tam też jest dowiedziona ogólna postać lematu Königa (zobacz niżej).

GAŁĄŹ DRZEWA T **:=** zbiór $X \subset U$ dobrze uporządkowany przez R taki, że nie istnieje zbiór dobrze uporządkowany w T zawierający X jako swój podzbiór właściwy.

Niech dane będzie drzewo $T = \langle U; R\rangle$.
Punktem drzewa T nazywamy element zbioru U.

Niech xRy oraz nie istnieje punkt z leżący na drzewie pomiędzy punktami x, y, to element y nazywamy **bezpośrednim następnikiem** punktu x; zaś punkt drzewa x nazywamy **bezpośrednim poprzednikiem** punktu y. Z definicji drzewa widać, że dany punkt x może mieć więcej niż jeden bezpośredni następnik, ale tylko jeden bezpośredni poprzednik.

Punkt y drzewa nazwiemy **następnikiem** punktu x wtw zachodzi xRy. Dany punkt drzewa może mieć wiele następników (również nieskończenie wiele). Zatem szczególnym przypadkiem następnika jakiegoś punktu drzewa jest jego bezpośredni następnik.

Przodkiem drzewa T nazywamy punkt drzewa T, który nie posiada bezpośredniego poprzednika. W drzewie przodek jest elementem najmniejszym względem relacji R i jest tylko jeden.

Drzewo T nazywamy **uporządkowanym**, gdy zbiór następników bezpośrednich jakiegoś punktu tworzy ciąg. Dzięki temu możemy mówić o pierwszym, drugim i n-tym bezpośrednim następniku rozważanego punktu, poczynając od lewej strony.

Uporządkowane drzewo T można rozumieć jako zwykłe drzewo z funkcją, której argumentami są punkty drzewa zaś wartościami skończone ciągi punktów będących ich bezpośrednimi następnikami.

Drzewo T nazywamy **drzewem dwójkowym,** gdy dowolny punkt drzewa posiada zero, jeden lub co najwyżej dwa bezpośrednie następniki.

Punkt drzewa T nie posiadający żadnego bezpośredniego następnika nazywamy **punktem końcowym** drzewa T.

Jeśli T jest dowolnym drzewem z przodkiem A, to można zdefiniować **poziomy** drzewa T, którymi są podzbiory U. **Poziom 1** = {A}. **Poziom N+1** tworzą wszystkie bezpośrednie następniki wszystkich punktów **poziomu N**. Korzyścią bezpośrednią z definicji poziomów drzewa jest możliwość dowodzenia twierdzeń o drzewach przez indukcję ‘biegnącą’ po poziomach drzewa.

Drzewo T nazywamy **drzewem skończonym**, gdy zbiór wszystkich punktów drzewa T jest zbiorem skończonym. Gdy zbiór wszystkich punktów drzewa T jest zbiorem nieskończonym, to drzewo T nazywamy **drzewem nieskończonym.**

Słowo ***nieskończon****y* w odniesieniu do zbiorów jest wieloznaczne.[23]
Zbiór X nazywamy ***skończonym*** gdy istnieje ciąg różnowartościowy o n wyrazach, którego zbiorem wartości jest zbiór X. Ciąg różnowartościowy jest funkcją różnowartościową.
Symbolem |X|, gdy X jest zbiorem, oznaczamy liczność (liczbę elementów) zbioru X i nazywamy **liczbą kardynalną** zbioru X.
Zbiór X nazywamy ***skończonym,*** gdy istnieje takie $n \in N$, że $|X|=n$.
Zbiór X nazywamy ***nieskończonym,*** gdy nie jest skończony.
Zbiór X nazywamy ***nieskończonym w sensie Dedekinda*** gdy X zawiera podzbiór Y taki, że ciąg $f\colon N \to Y$ jest różnowartościowy.
Z teorii mnogości (wraz z aksjomatem wyboru) wiadomo, że oba pojęcia nieskończoności są równoważne.
Zbiór X nazywamy ***przeliczalnie nieskończonym,*** gdy istnieje odwzorowanie $f\colon N \to X$ różnowartościowe i ‘na’. Mówiąc inaczej zbiór X jest przeliczalnie nieskończony gdy jest równoliczny ze zbiorem N, tzn. gdy, $|X| = |N|$

UWAGA. Od teraz, jeśli nie zostanie to inaczej zaznaczone, pisząc *zbiór nieskończony* będziemy rozumieli *zbiór przeliczalnie nieskończony*.

Drzewo T nazywamy **skończenie generowalnym**, gdy każdy punkt drzewa T ma tylko skończenie wiele bezpośrednich następników.

Zachodzi następujące twierdzenie, zwane lematem Königa:

LEMAT KÖNIGA:[24]
Każde drzewo T = $\langle U; R\rangle$, które jest nieskończone (przeliczalnie) i skończenie generowalne, ma gałąź nieskończoną.

[23] Dla zrozumienia tego fragmentu proszę zaglądnąć najpierw do fragmentu niniejszego rozdziału skryptu poświęconego funkcjom i znaleźć określenie ciągu.
[24] Z założeń odnośnie drzewa T występującego w lemacie wynika, że musi być ono przeliczalne.

Dowód:[25]

(1) Podzielmy zbiór punktów U drzewa T na *zbiór punktów **dobrych*** i *zbiór punktów **złych***. Punkt nazywamy *dobrym* wtw posiada nieskończenie wiele następników; *złym* wtw posiada tylko skończenie wiele następników.

(2) Przodek drzewa jest dobry, bo jego następnikami są wszystkie punkty drzewa, których jest z założenia nieskończenie wiele.

(3) Każdy punkt dobry, musi mieć chociaż jeden dobry bezpośredni następnik. Gdyby nie miał, to wszystkie bezpośrednie następniki byłyby złe, a wtedy sam rozważany punkt musiałby być zły, gdyż każdy punkt ma tylko skończenie wiele bezpośrednich następników.

(4) Konstruujemy teraz nieskończony ciąg punktów w następujący sposób: s_0 – przodek drzewa T, s_1 – dobry następnik przodka (który istnieje na mocy (3)), s_2 – dobry następnik dobrego następnika (istnieje na mocy (3)), ... , itd. dochodzimy do całego nieskończonego ciągu. Gdyby bowiem ciąg był skończony, to jakiś punkt drzewa nie miałby dobrego bezpośredniego następnika, co jest niezgodne z (3) .

Bardziej formalny dowód lematu Königa:

(1) Symbolem N_x oznaczmy zbiór wszystkich następników (niekoniecznie bezpośrednich) punktu x drzewa T.

(2) Punkt x drzewa T nazywamy dobrym wtw $|N_x| = |N|$. Punkt x drzewa T nazywamy złym, gdy nie jest dobry tzn. $|N_x| = n$, dla pewnego $n \in N$.

(3) Przodek s_0 drzewa T jest dobry, bo $|U| = |N|$ i zatem $|N_{s0}| = |N|$.

(4) Jeśli dowolny punkt x drzewa T jest dobry, to istnieje jego bezpośredni, dobry następnik. Niech wszystkimi bezpośrednimi następnikami x będą punkty $y_1, y_2, ..., y_n$. Jest ich skończenie wiele, co wynika ze skończonej generowalności drzewa. Gdyby wszystkie te punkty były złe, to wtedy zbiór punktów drzewa $(...(N_{y1} \cup N_{y2}) \cup ... \cup N_{yn})$ byłby skończony (bo skończona suma zbiorów skończonych jest zbiorem skończonym). Wtedy jednak punkt x nie byłby dobry lecz zły.

(5) Konstruujemy teraz ciąg G (gałąź) punktów drzewa: s_0 – przodek drzewa. Jeśli ciąg (gałąź) jest skonstruowany do punktu s_n,, to bierzemy dobry następnik punktu s_n (taki punkt istnieje na mocy (4)) i dołączamy do budowanego ciągu G jako s_{n+1}.

(6) Ciąg G jest nieskończony, bo w przeciwnym razie jakiś punkt drzewa nie miałby bezpośredniego, dobrego następnika (niezgodne z (4)) lub całe drzewo byłoby skończone (niezgodne z założeniami).

UWAGA

Jeśli drzewo T z lematu Königa jest uporządkowane, to nie potrzeba korzystać w jego dowodzie z aksjomatu wyboru. Jeśli zaś drzewo nie jest uporządkowane, to trzeba korzystać z aksjomatu wyboru przy wyborze dobrego bezpośredniego następnika.

Pojęcie drzewa można wprowadzić jeszcze inaczej wychodząc od pojęcia grafu, choć jest to również podejście teoriomnogościowe. *Grafem nieskierowanym* nazywamy zbiór punktów (zwanych *wierzchołkami*) wraz liniami (zwanymi *krawędziami*) łączącymi niektóre z wierzchołków. *Grafem oznakowanym* nazywamy graf, w którym wierzchołki (i krawędzie) są specjalnie oznaczone. *Ścieżką* grafu nazywamy ciąg wierzchołków grafu połączonych krawędziami. *Cyklem* grafu nazywamy ścieżkę tego grafu, której pierwszy i ostatni wierzchołek są identyczne. Cykl grafu nazywamy *prostym* gdy żaden wierzchołek nie występuje w nim więcej niż raz, oprócz wierzchołka pierwszego i ostatniego. Graf nazywamy *spójnym* gdy dowolne jego

[25] Dowód za Smullyanem i Königem. Por. J. König, '*Zum Kontinuumproblem*', Mathematische Annalen, 60 (1904), ss. 177-180. Por. [Smullyan 1995; 32].

dwa wierzchołki są połączone ścieżką. ***Drzewo* =: graf spójny, bez cykli prostych.** Istnieje mocno rozwinięty dział matematyki zwany *teorią grafów*.

Dalszym krokiem, w teoriomnogościowym ujęciu najważniejszych pojęć matematyki, jest sprowadzenie najważniejszego pojęcia matematyki – pojęcia funkcji – do pojęcia zbioru.

Najpierw definicje pomocnicze:

DZIEDZINA LEWOSTRONNA RELACJI BINARNEJ R := w skrócie mówimy **dziedzina** relacji R, symbolicznie:

$$D_L(R) = \{x: \exists y\ (xRy)\}.$$

DZIEDZINA PRAWOSTRONNA RELACJI BINARNEJ R := w skrócie **przeciwdziedzina** relacji R, symbolicznie:

$$D_P(R) = \{x: \exists y\ (yRx)\}.$$

FUNKCJA JEDNOARGUMENTOWA := relację binarną $U \times U \supset R \neq \emptyset$ nazywamy funkcją jednoargumentową ze zbioru $X \subset U$ w zbiór $Y \subset U$, gdy:

(f_1) $D_L(R) = X$,

(f_2) $D_P(R) \subset Y$,

(f_3) $\forall x,y,z \in U\ (xRy \wedge xRz \rightarrow y = z)$.

Inne określenia na funkcję to: *przekształcenie,* odwzorowanie.

Funkcje przyjęto oznaczać małymi literami f, g, h.

Zbiór X nazywa się zbiorem **argumentów** lub **dziedziną** funkcji f, zaś Y zbiorem **przeciwdziedziną** funkcji f.

Fakt następujący ‘f jest funkcją ze zbioru X w zbiór Y’ notować będziemy symbolicznie w taki sposób $f: X \rightarrow Y$.

Jeśli x jest elementem X, to f(x) nazywać będziemy *wartością funkcji* f *dla argumentu* x lub *wartością funkcji* f *w punkcie* x. Zbiór wszystkich *wartości funkcji* f oznaczać będziemy symbolem f(X).

Symbol $\rightarrow$ jest używany w skrypcie na dwa sposoby, jako znak dla implikacji oraz w zapisie funkcji z jednego zbioru w drugi. Z kontekstu będzie zawsze jasne o jakie użycie chodzi i nie powinno prowadzić to do nieporozumień. Należy jednak o tym pamiętać.

Mówić się będzie również, że *funkcja* f *jest określona (jest zdefiniowana) na zbiorze* X.

Uogólnieniem pojęcia funkcji jednoargumentowej jest **funkcja n-argumentowa** ze zbioru X^n w zbiór Y.

Szczególnym zaś przypadkiem funkcji n-argumentowej jest **działanie**, będące funkcją przeprowadzającą zbiór X^n w sam zbiór X. Działanie takie nazywamy **działaniem n-argumentowym**.

Jeden z działów matematyki – algebra abstrakcyjna - zajmuje się badaniem struktur, których relacje są działaniami określonymi w uniwersum struktury i jest ich skończenie wiele. Takie struktury zwie się **algebrami**.

PRZYKŁAD
Niech U = {0,1} i niech działania $\bullet: U^2 \rightarrow U$; $+: U^2 \rightarrow U$; $-:U\rightarrow U$ określone będą następująco: +(0,1) = +(1,0) = +(1,1) = 1 oraz +(0,0) = 0; •(0,0) = •(0,1) = •(1,0) = 0 oraz •(1,1) = 1; -(1) = 0 oraz -(0) = 1. Strukturę z tym uniwersum i działaniami $\underline{U}=\langle\{0.1\}; \bullet, +, -\rangle$ nazywamy (dwuelementową) **algebrą Boole'a**. Innym przykładem algebry Boole'a jest $\underline{U} = \langle P(U); \cap, \cup, '\rangle$, gdzie P(U) jest zbiorem wszystkich podzbiorów zbioru U, zaś działania to kolejno teoriomnogościowe operacje iloczynu zbiorów, sumy zbiorów i dopełnienia.

Konsekwencją powyższej definicji funkcji jest to, że funkcja, jako szczególny przypadek relacji, jest również zbiorem. Ten właśnie fakt, między innymi, pokazuje rolę teorii zbiorów jako podstawowej teorii matematycznej.

Funkcja f nazywa się **jednoznaczną** lub **różnowartościową** albo współcześnie **injekcją** jeśli zachodzi:

$$f: X \xrightarrow[1\text{-}1]{} Y \quad \text{wtw} \quad f: X \rightarrow Y \land \forall x \in X\, \forall y \in Y\, (f(x) = f(y) \rightarrow x = y).$$

Warunek jednoznaczności jest w pewnym sensie warunkiem odwrotnym do warunku na bycie funkcją. Ten pierwszy (jednoznaczność) wymaga by funkcja przyjmowała dla identycznych wartości, identyczne argumenty, zaś ten drugi warunek wymaga by funkcja dla identycznych argumentów przyjmowała identyczne wartości. Albo równoważnie: warunek pierwszy wymaga by funkcja dla różnych argumentów przyjmowała różne wartości, zaś warunek na funkcję, by dla różnych wartości przyjmowała różne argumenty.

Pokażemy to na rysunku.

Funkcją f nazywamy funkcją ze zbioru X **na** zbiór Y, współcześnie używa się terminu **surjekcja**, [symbolicznie $f: X \xrightarrow{na} Y$] gdy:

$$f: X \xrightarrow{na} Y \quad \text{wtw} \quad f: X \rightarrow Y \land \forall y \in Y\, \exists x \in X\, (f(x) = y).$$

Funkcję f nazywamy funkcją **wzajemnie jednoznaczną** lub **bijekcją**, gdy jest funkcją **jednoznaczną** z X w Y oraz funkcją z X **na** Y.

Zbiór liczb naturalnych N da się zdefiniować w teorii mnogości. Jako pierwsi dokonali tego R. Dedekind oraz G. Frege w drugiej połowie dziewiętnastego wieku. W ich konstrukcji liczbom odpowiadają pewne zbiory zaś zbiór N jest w istocie rodziną zbiorów. Ściśle rzecz biorąc kiedy mówi się o 'definicji zbioru liczb naturalnych N w teorii mnogości' ma się na myśli rodzinę zbiorów, której elementy zachowują się izomorficznie, czyli tak samo względem opisu matematycznego jak liczby naturalne znane z intuicji.

Ciągiem nieskończonym nazywa się każdą funkcję $f: N \rightarrow X$, gdzie X jest dowolnym niepustym zbiorem.

Zgodnie z wcześniejszą umową n-tkę uporządkowaną nazywać się będzie ciągiem n-elementowym. Pojawia się tutaj pewien problem z zerem. Mianowicie liczba 0 jest elementem zbioru N, ale nie jest elementem zbioru N^+. Czasem wygodniej jest myśleć o ciągu f jako o funkcji $f: N^+ \to X$. Przy tym drugim ujęciu łatwiej jest operować indeksami wyrazów ciągu. Właśnie umowa pozwalająca nazywać zamiennie n-tki skończone ciągami n-elementowymi jest sensowna dzięki takiej możliwości.

5. NAZWY

Nazwy, jak wspomniano, tworzą podobnie jak zdania jedną z dwóch podstawowych kategorii semantycznych. Ze względu właśnie na ten fundamentalny charakter trudno jest podać poprawną definicję nazwy jako takiej. Obecnie nie ma w logice, ani w filozofii języka jednej, ustalonej teorii nazw.

Nazw w ogólności nie można w sposób adekwatny scharakteryzować metodami czysto syntaktycznymi.

Intuicyjnie najbardziej korzystnym określeniem nazwy wydaje się być następujące: *Nazwą jest to wyrażenie języka, które da się podstawić do schematu zdaniowego* 'x jest zielone' *za zmienną wolną* x *i wtedy schemat przejdzie w zdanie sensowne.* To określenie nazwy nie jest precyzyjną jej definicją, ale w wystarczający sposób naprowadza naszą intuicję na właściwe tory myślenia o nazwach. Inne określenie nazwy, które odwołuje się do naszych potocznych intuicji brzmi: *nazwą jest takie wyrażenie języka, które coś nazywa*.

5.1 EKSTENSJONALNA TEORIA NAZW.

Ta teoria nazw jest w istocie sprytnym trickiem. Pozwala ona bowiem na mówienie o nazwach za pośrednictwem zbiorów, o których już mówić umiemy. Bezpośrednią korzyścią z tej teorii nazw jest możliwość jednorodnego ujęcia teorii zdań kategorycznych (sylogistyka) oraz teorii definicji.

Fundamentalne znaczenie ma pojęcie desygnatu.

DESYGNAT := obiekt, który nazwa nazywa.

Ważnym zagadnieniem o charakterze filozoficznym jest kwestia istnienia desygnatów nazw. W tym zagadnieniu mieści się problem *uniwersaliów* - znany od początku filozofii, a szczególnie rozważany w średniowieczu.

Zmienne, których zakresem zmienności będą nazwy, oznaczamy symbolami: $\underline{n}$, $\underline{m}$, $\underline{p}$, ...

DENOTACJA NAZWY $\underline{n}$ **:=** zbiór wszystkich desygnatów nazwy $\underline{n}$.

Denotację nazwy $\underline{n}$ oznaczamy symbolem D($\underline{n}$).

Dzięki tej definicji możemy wypowiadać się na temat nazw wypowiadając się o zbiorach.

Oto niektóre z tradycyjnych podziałów nazw:

PODZIAŁ NAZW	CHARAKTERYSTYKA DENOTACJI LUB DESYGNATÓW	KRYTERIUM PODZIAŁU
1. NAZWY PUSTE	Denotacja jest zbiorem pustym.	Kryterium podziału: liczba desygnatów.

2. NAZWY JEDNOSTKOWE 3. NAZWY OGÓLNE	Denotacja jest zbiorem jednoelementowym. Denotacja ma więcej niż jeden element.	
1. NAZWY KONKRETNE 2. NAZWY ABSTRAKCYJNE	Nazywają obiekty czasoprzestrzenne. Nazywają pozostałe obiekty.	Kryterium podziału: specyfika tego do czego się odnoszą
1. NAZWY INDYWIDUALNE 2. NAZWY GENERALNE	Np. ten oto pies; lub tzw. nazwy własne jak: Adam Mickiewicz, Stefan Banach itp. Np. 'Największy polski matematyk dwudziestego wieku'	Kryterium podziału: sposób wskazywania desygnatów.
1. NAZWY PROSTE 2. NAZWY ZŁOŻONE	Zbudowane są z jednego wyrazu. Zbudowane więcej niż z jednego wyrazu.	Kryterium podziału: liczba wyrazów tworzących nazwę.

Jak zobaczymy poniżej wygodnie jest przyjmować, że każdy obiekt posiada swą nazwę indywidualną.

Denotację nazwy n nazywać będzie się czasem również **ekstensją** lub **zakresem nazwy** n.

Niniejsze sposób mówienia o nazwach nazywa się ekstensjonalnym z tego powodu, że mówiąc o nazwach czynimy to poprzez mówienie o ich ekstensjach. Pomija się tutaj tzw. *intensję* czyli *treść* nazwy.

PRZYKŁADY.

1. Desygnatem nazwy *słoń* będzie każdy egzemplarz słonia. Zaś denotacją tej nazwy będzie zbiór wszystkich słoni. Jak widać denotacja nazwy jest przedmiotem abstrakcyjnym – takim jak zbiór.
2. Nazwa *największa liczba naturalna* jest nazwą pustą, ponieważ nie istnieje jej desygnat. Denotacja tej nazwy jest zbiorem pustym.

Dzięki wprowadzeniu denotacji można scharakteryzować tzw. **stosunki zakresowe (relacje)** pomiędzy nazwami:

- Nazwa n jest **podrzędna** względem nazwy m wtw D(n) ⊂ D(m).
- Nazwa n jest **nadrzędna** względem nazwy m wtw D(m) ⊂ D(n).
- Nazwa n jest **równoważna** nazwie m wtw D(n) = D(m).
- Nazwa n **krzyżuje się** z nazwą m wtw D(n) # D(m).

- Nazwa n **wyklucza się** z nazwą m wtw D(n) ⊃⊂ D(m).

Powyższe ustalenia posiadają pewne mało intuicyjne konsekwencje. Jak widać każda nazwa pusta jest podrzędna względem każdej innej nazwy, ponieważ zbiór pusty zawiera się w każdym zbiorze. Na przykład, (zakładając, że krasnoludki nie istnieją) nazwa *krasnoludek* jest podrzędna względem nazwy *samochód*.

PRZYKŁADY.

1. Nazwa *ssak* jest nadrzędna względem nazwy *koń*, gdyż zbiór wszystkich koni zawiera się w zbiorze wszystkich ssaków. Równocześnie nazwa *koń* jest podrzędna względem nazwy *ssak*.
2. Nazwa *zwierzę posiadające nerki* jest równoważne nazwie *zwierzę posiadające serce*, gdyż ich denotacje są identyczne.
3. Nazwa *pojazd szynowy* krzyżuje się z nazwą *tramwaj*, gdyż istnieją pojazdy szynowe nie będące tramwajami (pociągi), istnieją tramwaje będące pojazdami szynowymi i istnieją tramwaje nie będące pojazdami szynowymi (tramwaje wodne, konne).
4. Nazwa pusta wyklucza się z każdą inną nazwą. Dlatego ten przypadek jest trywialny. Przykładem na wykluczanie się dwóch nazw jest para nazw: *widelec* i *nóż*. Nie istnieje żaden obiekt, który równocześnie byłby nożem i widelcem.

Diagramy Venna.[26] Są to specjalne rysunki na których można przedstawiać stosunki zachodzące pomiędzy zakresami dwóch (lub więcej) nazw. Można je również stosować do badania praw algebry zbiorów.

Diagram dla dwóch i trzech zbiorów wygląda następująco:

TUTAJ WSTAWIĆ DIAGRAMY VENNA DLA DWOCH I TRZECH ZBIOROW

Jak widać okręgi na diagramach Venna dla dwóch zbiorów dzielą wyjściowy prostokąt na cztery obszary, zaś dla trzech zbiorów na osiem obszarów. Relację zachodzącą pomiędzy zwykłymi zbiorami lub denotacjami nazw zaznaczamy na diagramie w ten sposób, że jeśli wiem z pewnością, że jakiś obszar jest niepusty to w odpowiedni obszar wpisujemy znak +. Jeśli zaś wiemy z pewnością o pewnym obszarze, że jest pusty, to wpisujemy znak --. Jeśli zaś co do jakiego obszaru nie mamy pewności czy jest pusty, czy też nie jest pusty, to nie wpisujemy w tym obszarze żadnego znaku.

5.2 TREŚĆ NAZWY.

Wiemy to z posługiwania się językiem, że każda nazwa oprócz tego, że nazywa obiekty posiada pewną treść. Może być nawet tak, że dwie różne nazwy mają te same desygnaty. Tym co je różni jest ich treść. Podstawowa intuicja odnośnie treści nazwy jest taka, że treść to zespół cech przysługujących **wszystkim** desygnatom tej nazwy.

[26] Termin ten pochodzi od angielskiego logika o nazwisku John Venn (1834-1923).

TREŚĆ NAZWY $\underline{n}$ **:=** zbiór wszystkich form zdaniowych jednej zmiennej, z których powstaje zdanie prawdziwe po wstawieniu w miejsce zmiennej, nazwy indywidualnej dowolnego desygnatu nazwy $\underline{n}$. Treść nazwy $\underline{n}$ oznaczmy symbolem $T(\underline{n})$. Symbolicznie:

$$T(\underline{n}) = \{A(x): \forall a \in D(\underline{n})\ (A(a))\}.$$

Zatem do treści nazwy, która jest zbiorem, należą jako elementy formy zdaniowe jednej zmiennej.

PRZYKŁAD.

Do treści nazwy *krowa* należą, między innymi, następujące formy zdaniowe jednej zmiennej: x jest ssakiem, x jest roślinożerny, x daje mleko; ale do treści nazwy *krowa* nie należą formy zdaniowe: x jest koloru czarno-białego, x ma na imię Krasula, gdyż nie wszystkie desygnaty nazwy *krowa* posiadają wymienione cechy.

Pomiędzy denotacjami nazw i ich treściami zachodzi zależność, którą można ściśle udowodnić. Wyraża ona to, że im bardziej denotacja jakiejś nazwy niepustej jest większa (względem relacji inkluzji), tym treść tej nazwy mniejsza jest mniejsza.

TWIERDZENIE.

Dla dowolnych nazw niepustych $\underline{n}$ oraz $\underline{m}$:

$$D(\underline{n}) \subset D(\underline{m}) \quad \text{wtw} \quad T(\underline{m}) \subset T(\underline{n}).$$

Dowód:

($\Rightarrow$)

Załóżmy, że zachodzi $D(\underline{n}) \subset D(\underline{m})$.

Załóżmy dodatkowo, że $A(x) \in T(\underline{m})$.

$\forall a \in D(\underline{m})\ (A(a))$. [z def. treści nazwy]

(4) $\forall a\ (a \in D(\underline{m}) \rightarrow A(a))$. [z def. kwantyfikatora]

(5) $\forall a\ (a \in D(\underline{n}) \rightarrow a \in D(\underline{m}))$. [z (1) i def. inkluzji]

(6) $\forall a\ (a \in D(\underline{n}) \rightarrow A(a))$. [z (5) I (6) oraz sylogizmu]

(7) $\forall a \in D(\underline{m})\ (A(a))$. [z (6)]

($\Leftarrow$)

(1) Załóżmy, że zachodzi $T(\underline{m}) \subset T(\underline{n})$.

(2) Załóżmy, że $a \in D(\underline{n})$.

(3) Forma zdaniowa '$x \in D(\underline{m})$' należy do $T(\underline{m})$, bo $\forall a \in D(\underline{m})\ (a \in D(\underline{m}))$.

(4) '$x \in D(\underline{m})$' $\in T(\underline{n})$. [z (3)]

(5) $\forall a \in D(\underline{n})\ (a \in D(\underline{m}))$. [z (4)]

(6) $\forall a\ (a \in D(\underline{n}) \rightarrow a \in D(\underline{m}))$. [z def. kwantyf.]

(7) $a \in D(\underline{m})$. [z (2) i (6)]

5.3 NAZWY NIEOSTRE

Ponieważ, w naszym dotychczasowym ujęciu, denotacja nazwy jest zbiorem, zakłada się, że potrafimy rozstrzygnąć o dowolnym obiekcie z uniwersum o tym, czy dana nazwa go nazywa, czy też go nie nazywa. Jednak w praktyce językowej spotykamy takie nazwy i takie obiekty, co do których mam uzasadnioną wątpliwość, czy dana nazwa je nazywa, czy też ich nie nazywa. Możemy wtedy powiedzieć, że nazwa nazywa pewien obiekt, ale tylko w pewnym stopniu, ale również w pewnym stopniu go nie nazywa. Takie nazwy noszą nazwę **nazwy nieostre**.

PRZKŁADY.
Przykładowe nazwy nieostre: *wysoka temperatura*, *duże miasto*, *średni wzrost*, *stary człowiek*.

Teorię nazw nieostrych przestawimy z wykorzystaniem pojęcia zbioru rozmytego. Na przeciąg tych rozważań ustalamy, że wszystkie zbiory w sensie teorii mnogości są podzbiorami pewnego ustalonego uniwersum U.

Zbiór rozmyty := para uporządkowana zbiorów postaci (X, Y), gdzie $X,Y \subset U$ oraz $X \cup Y \subset U$.

Ściśle rzecz biorąc w literaturze zbiory zdefiniowane tak jak powyżej nazywa się **zbiorami przybliżonymi**.

Pojęcie zbioru rozmytego jest w pewnym sensie rozszerzeniem pojęcia zbioru w sensie teorii mnogości. Idea jest taka, że znaną z teorii mnogości relację należenia elementu do zbioru oznaczaną symbolem $\in$, zastępuje się w przypadku zbiorów rozmytych relacją *stopnia przynależności* do zbioru. O niektórych elementach uniwersum wiemy z pewnością (posiadamy wystarczającą ilość informacji), że należą do zbioru, o innych, że z pewnością do niego nie należą. Istnieją w uniwersum elementy, które należą do zbioru *w pewnym stopniu*. Mamy zbyt mało informacji, aby rozstrzygnąć z całkowitą pewnością kwestię ich przynależności.

PRZYKŁAD.
Nazwa *mężczyzna wysokiego wzrostu* jest nieostra. Mężczyzn mających 190 cm wzrostu lub więcej bez wątpliwości zaliczymy do wysokich. Tych osobników zaliczymy do ekstensji nazwy. Natomiast mężczyźni mający 170 cm wzrostu lub mniej należą do antyekstensji nazwy. Mężczyźni mający większy wzrost niż 170 cm i równocześnie mniejszy od 190 cm należeć będą do dziedziny nieokreśloności tej nazwy.

Dla danego zbiory rozmytego (X, Y), zbiór X nazywa się **ekstensją**, zbiór Y **przeciwekstensją** (antyekstensją), zaś zbiór $U - (X \cup Y)$ **dziedziną nieokreśloności** nazwy n.

Zbiory rozmyte (ang. *fuzzy sets*) i skorelowana z nimi logika rozmyta (ang. *fuzzy logic*), mają szerokie zastosowania. Stosuje się je do takich zagadnień, gdzie zawodzi logika klasyczna w tym sensie, że niemożliwe jest zebranie wystarczającej informacji. Przybliża to zresztą faktyczne działanie ludzkiego sposobu przetwarzania informacji, które zazwyczaj dokonuje się w sytuacji ograniczonej informacji, np. z powodu zasady nieoznaczoności Heisenberga. Przykładami zastosowań są:

- nazwy nieostre,
- metody wnioskowania w oparciu o niekompletny opis obiektów,
- inteligentne systemy informatyczne,

- w technice w różnego rodzaju sterownikach.

Na zbiorach rozmytych można wykonywać następujące operacje, analogiczne do operacji na zwykłych zbiorach OR (suma zbiorów rozmytych), AND (iloczyn zbiorów rozmytych), MIN (różnica zbiorów rozmytych) oraz NOT (dopełnienie zbioru rozmytego), które zdefiniowane są następująco:

[suma: OR] (X, Y) OR $(X_1, Y_1) := (X \cup X_1, Y \cap Y_1)$.

[iloczyn: AND] (X, Y) AND $(X_1, Y_1) := (X \cap X_1, Y \cup Y_1)$.

[różnica: MIN] (X, Y) MIN $(X_1, Y_1) := (X \cap Y_1, X_1 \cup Y)$.

[dopełnienie: NOT] NOT$(X, Y) := (Y, X)$.

DEFINICJE

Arystoteles uważał, że każda definicja jest *per genus proximum et differentiam specificam*, czyli przez rodzaj bliższy i różnicę gatunkową. Przykładem takiej definicji jest następujące sformułowanie

(D) *Człowiek jest to zwierzę rozumne.*

gdzie nadrzędnym gatunkiem jest *zwierzę* zaś różnicą gatunkowa jest *rozumość*.

W logice tradycyjnej sformułowano cztery warunki, które miała spełniać każda poprawna definicja:

[1] Definicja wyraża istotę tego, co ma być zdefiniowane.

Przykładem na taki rodzaj definicji jest (D).

[2] Definicja nie powinna być kolista.

Przykładem definicji kolistej jest: Dąb jest to drzewo mające bazie i wyrastające z żołędzia czyli orzechu dębu.

[3] Definicja nie powinna mieć postaci negatywnej, o ile może mieć postać pozytywną.

Na przykład taka definicja łamie warunek [3]: *Siła nie jest pojęciem kinematycznym.*

[4] Definicja nie powinna być wyrażona w ani języku metaforycznym ani niejasnym (mętnym).

Na przykład taka definicja łamie warunek [4]: *Piękno jest to wieczność przeglądająca się w lustrze*.

Termin definiowany nazywać będziemy **definiendum**, zaś wyrażenie, które go definiuje nazywamy (zgodnie z tradycją filozoficzno-logiczną) **definiensem**.

Dla naszych nieformalnych rozważań przyjmiemy mocne założenie, że definicja dowolnego terminu da się przedstawić w postaci definicji nazwy.

PRZYKŁADY.

7. LOGIKA PIERWSZEGO RZĘDU.

Rozdział ten poświęcony jest wykładowi syntaktycznych i semantycznych aspektów logiki pierwszego rzędu. Najpierw zostanie przedstawiony klasyczny rachunek zdań, a po nim klasyczny rachunek predykatów (kwantyfikatorów).
Po wykładzie klasycznego rachunku zdań zostaną przedstawione, według pewnego schematu, inne – nieklasyczne – zdaniowe rachunki logiczne. Ów schemat wygląda następująco:

0. Motywacja filozoficzna dla danego rachunku.
1. Język rachunku: alfabet oraz zbiór wyrażeń sensownych.
2. Aparat dedukcyjny w wersji Hilberta: aksjomaty oraz reguły inferencji.
3. Aparat dedukcyjny w postaci tablic semantycznych.
4. Niektóre ważne twierdzenie metalogiczne o danym rachunku dla wersji tablic.

W tym miejscu zostanie podana definicja tablicy analitycznej (Smullyan) (inaczej: drzewa rozkładu albo tablicy semantycznej (Beth)).[27] Wykorzystamy do tego celu naszą wiedzę o drzewach dwójkowych.

Terminy *tablica semantyczna, drzewo rozkładu* czy *tablica analityczna* są dość często używane w literaturze. Sam idea koncepcji, takich obiektów jak tablice analityczne, pochodzi od Betha, Hintikki oraz Lisa. Ponieważ niniejsze ujęcie wzoruje się na ujęciu Smullyana często termin *tablica analityczna* (w skrócie *tablica*) lub *drzewo rozkładu* będzie używana. Z tego powodu, iż stwierdzono większą dydaktyczną skuteczność wprowadzającego wykładu logiki metodą tablic aniżeli aksjomatyczną metodą Hilberta wiele współczesnych podręczników logiki używa tej metody; na przykład krakowski podręcznik Porębskiej i Suchonia *Elementarny wykład logiki*, a z zagranicznych Priesta *An Introduction to Non-Classical Logic*.

Na przeciąg obecnego fragmentu (poświęconego typom dowodów) pod terminem **twierdzenie** bez bliższego określenia rozumieć się będzie zdanie jakiejś nieformalnej teorii, które posiada w niej **dowód**[28] lub inaczej; d**owód** (jakiegoś twierdzenia) jest argumentem, nie przedstawiającym najmniejszych wątpliwości co do swej logicznej poprawności, że zdanie dowodzone jest prawdziwe na bazie pewnej wiedzy. Proszę zwrócić uwagę na to, że 'rodzajem bliższym' dla dowodu jest 'argument' i to spostrzeżenie jest ważnym odkryciem dokonanym na gruncie pragmatyki.[29]
Zazwyczaj wiadomo o jaką teorię chodzi. Może to być na przykład teoria mnogości (nieformalna) lub metateoria rachunku zdań (nieformalna).
Jeśli twierdzenie ma postać warunkową (po angielsku to się nazywa *conditional*) $Z \Rightarrow Z'$, to zdanie Z nazywamy **założeniem twierdzenia**, zaś Z' **tezą twierdzenia**. Taka jest praktyka terminologiczna w obrębie matematyki (i nauk ścisłych tzn. takich gdzie da się dowodzić twierdzeń) i będziemy się jej trzymać. Często w naukach ścisłych w takim przypadku mówi się o założeniu Z jako **warunku wystarczającym dla** Z', zaś o tezie Z' jako o **warunku koniecznym dla** Z.

UWAGA
Odróżniamy to znaczenie terminu *teza* i *twierdzenie* od podobnych określeń w obrębie systemu KRZ, czy też innego systemu formalnego, gdzie używa się ich często zamiennie.

[27] Terminów tych używa się zamiennie.
[28] Termin dowód jest tutaj rozumiany ogólnie. Dla danej teorii formalnej pojęcie dowodu da się zdefiniować całkiem ściśle.
[29] Nawiązuję tutaj do definicji w sensie arystotelesowskim *per genus proximum et differentiam specificam.*

Już od czasów starożytności dowody przeprowadzane są według pewnych charakterystycznych typów lub metod. Najbardziej spotykane to:

(i) dowód przez sprowadzenie do absurdu (niewprost),
(ii) dowód wprost,
(iii) dowód przez konstrukcję,
(iv) dowód przez indukcję.

Ad. (i) Metoda tablic wywodzi się od **metody niewprost** dowodzenia twierdzeń matematycznych, zwanej też **reductio ad absurdum** (sprowadzenie do niedorzeczności, absurdu, sprzeczności) lub inaczej **dowodem apagogicznym** (od greckiego słowa *apagoge*= odprowadzać). Metoda ta pochodzi od Platona, który zastosował ją w swoim dialogu *Fedon* oraz od Euklidesa.
Metoda niewprost wygląda następująco: zakładamy, że zachodzi Z oraz czynimy założenie niewprost czyli zakładamy zaprzeczenie (negację) tezy twierdzenia (nieprawda, że Z'). Jeśli zaprzeczenie tezy doprowadzi do sprzeczności z założeniami, albo z innymi udowodnionymi twierdzeniami (lub aksjomatami), to twierdzenie wyjściowe uważa się za udowodnione.

Metoda tablic semantycznych zaliczana jest do metod niewprost dowodzenia formuł KRZ z tego powodu, że aby dowieść za jej pomocą formuły A zakładamy niejako, że dowiedlna jest formuła $\neg A$ i dla niej budujemy tablicę analityczną. Sprowadzenie tego założenia do sprzeczności, co w przypadku tablic odpowiada zamknięciu tablicy, prowadzi do wniosku, że formuła A jest twierdzeniem KRZ.

Ad. (ii) Metodę niewprost odróżniamy od metody dowodzenia **wprost**, która wygląda mniej więcej następująco:
Załóżmy, że chcemy dowieść twierdzenia o postaci okresu warunkowego $Z \Rightarrow Z'$..
Zakładamy, że zachodzi Z (że Z jest prawdziwe) i próbujemy za pomocą rozumowania 'wydobyć' z niego tezę, czyli Z'. Oczywiście owo rozumowanie musi być poprawne logicznie.

Ad. (iii) Metoda przez konstrukcję dotyczy tzw. twierdzeń egzystencjalnych, postulujących istnienie pewnych obiektów. Dowód takich twierdzeń zazwyczaj polega na tym, że istnienia postulowanego obiektu dowodzimy podając metodę konstrukcji owego obiektu.
Przykładem takiego dowodu jest dowód lematu Königa podany wyżej.

Ad. (iv) Metoda dowodu przez indukcję została omówiona w rozdziale pierwszym.

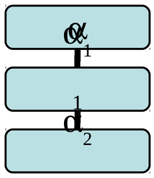
Tablice analityczne oznaczać będziemy dużą literą T, ewentualnie wraz z indeksem, od angielskiego słowa *tree* = drzewo.

Określenie wstępne tablicy analitycznej dla języków rachunków zdaniowych. W języku dowolnego rachunku zdaniowego dysponujemy regułami, które pozwalają rozkładać formuły bardziej złożone na formuły prostsze.[30] Właśnie owe reguły pozwalają budować tablicę semantyczną dla danej formuły.

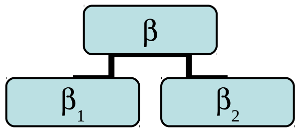
Dla rachunku zdań mamy tylko dwa typy reguł: reguły typu α oraz reguły typu β. Typy reguł różnią się sposobem konstruowania drzewa. Rozkładając na drzewie T formułę A, za

[30] Stąd inna nazwa tablic semantycznych – *tablice rozkładu*.

pomocą reguła typu α, do każdego punktu końcowego każdej gałęzi przechodzącej przez formułę A, dołączamy (na jednej gałęzi) wszystkie formuły uzyskane z rozkładu A; tzn**.** kolejno α_1 oraz α_2. Graficznie reguła typu α wygląda tak:



Natomiast jeśli rozkładamy formułę A za pomocą reguły typu β, to do punktu końcowego każdej gałęzi przechodzącej przez punkt A dołączamy dwie gałęzie β_1 oraz β_2. Graficznie można przedstawić to następująco**:**



Formułę A nazwiemy **formułą typu α**, gdy można ją rozłożyć regułą typu α; formułę A nazwiemy **formułą typu β**, gdy można ją rozłożyć regułą typu β.

TABLICA ANALITYCZNA jest to uporządkowane drzewo dwójkowe, którego punktami są formuły (dokładnie wystąpienia formuł) języka rachunku zdań. Prócz tego każda formuła A będąca punktem tego drzewa musi mieć uzasadnienie dla swej obecności na drzewie i może być:

przodkiem,

uzyskana została z formuły B leżącej (wcześniej względem relacji R) na tej samej gałęzi (na której leży A) w wyniku zastosowania do B jednej z reguł - typu α lub typu β.

7.1 KLASYCZNY RACHUNEK ZDAŃ.

W tym podrozdziale przedstawiony zostanie system formalny Klasycznego Rachunku Zdań (KRZ) nad którym nadbudowana jest logika pierwszego rzędu. Termin ‘klasyczny’ w nazwie rachunku odnosi się do sposobu rozumienia spójników logicznych, w szczególności najbardziej podstawowego spójnika, którym jest implikacja.

7.1.0. Motywacja filozoficzna dla KRZ.

Przypomnijmy, że KRZ opiera się na dwóch zasadach. Na zasadzie istnienia dwóch wartości logicznych: ***Istnieją dwie i tylko dwie wartości logiczne; Prawda (oznaczana za pomocą 1) oraz Fałsz (oznaczany za pomocą 0)***; oraz zasadzie dwuwartościowości, która brzmi: ***Dla dowolnego zdania Z, Z ma wartość logiczną prawdy lub Z ma wartość logiczną fałszu***. Inna postać tej zasady brzmi: ***Każde zdanie jest prawdziwe lub fałszywe i żadne nie jest równocześnie prawdziwe i fałszywe.*** Trzeba zwrócić uwagę na to, ze obie zasady są od siebie niezależne. Zasada dwuwartościowości ma wiele wspólnego z tzw. logiczną koncepcję zdania.

7.1.1. JĘZYK KRZ.

ALFABET JĘZYKA KRZ := 1) przeliczalny nieskończony zbiór zmiennych zdaniowych o postaci p_1, p_2, p_3, ..., p_n,... ; 2) stałe logiczne (spójniki zdaniowe i nawiasy): $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$,), (.

DEFINICJA ZBIORU FROMUŁ KRZ ($\mathrm{FORM}_{\mathrm{KRZ}}$**) :=**

1) $V \subset \mathrm{FORM}_{\mathrm{KRZ}}$;

2) $A, B \in \mathrm{FORM}_{\mathrm{KRZ}} \Rightarrow (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), \neg A \in \mathrm{FORM}_{\mathrm{KRZ}}$.

Zwracam uwagę na to, że definicja zbioru formuł uległa zmianie. Usunięty został spójnik równoważności z alfabetu języka. Ma to swoją motywację. Chodzi o to, iż spójnik ten ma charakter pochodny we wszystkich systemach logicznych, które będziemy rozważać. Rozumieć go będziemy tak: $(A \equiv B)$ =df $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$. Przy budowie tablic semantycznych spójnik równoważności przeszkadza w pewnych bardzo wygodnych ujęciach.

7.1.2. SYSTEM KRZ W WERSJI HILBERTA.

Obecna prezentacja systemu KRZ różni się od wersji poprzedniej tym, że wcześniej aksjomaty systemu hilbertowskiego były formułami KRZ i było ich skończenie wiele.

Obecnie zapiszemy aksjomaty, których będzie nieskończenie wiele, za pomocą schematów aksjomatów. Schemat aksjomatów KRZ jest to wyrażenie, w którym zamiast zmiennych zdaniowych ze zbioru V występują metazmienne, które oznaczmy znakami A, B, C, ... Owe metazmienne są symbolami (niesformalizowanego) metajęzyka języka KRZ, których zakresem zmienności jest zbiór $FORM_{KRZ}$. Schematy aksjomatów nie są aksjomatami! Korzyść z takiej prezentacji jest taka, że choć zwiększa się nam liczba aksjomatów i to istotnie (ze skończonej do nieskończonej) to pozbywamy się jednej z pierwotnych reguł inferencji – reguły podstawiania.

Schematy aksjomatów (Hilbert-Łukasiewicz):

A1. $((A\to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)))$.

A2. $((A \to (A \to B)) \to (A \to B))$.

A3. $(A\to (B \to A))$.

A4. $((A \wedge B) \to A)$.

A5. $((A \wedge B) \to B)$.

A6. $((A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to (B \wedge C))))$.

A7. $(A \to (A \vee B))$.

A8. $(B \to (A \vee B))$.

A9. $((A \to B) \to ((C \to B) \to ((A \vee C) \to B)))$.

A10. $((\neg B \to \neg A) \to (A \to B))$.

Reguły wnioskowania:

$\dfrac{A \to B, \quad A}{B}$; Reguła Odrywania (Modus Ponens).

Ważniejsze tezy dające się wyprowadzić z powyższych schematów i reguły odrywania:

1. $A\to A$ (prawo tautologii (względnie tożsamości lub repetycji))
2. $B\to (A\to A)$
3. $(A\to (B\to C))\to ((A\to B)\to (A\to C))$ (sylogizm Fregego)
4. $((A\to B)\to (A\to C))\to (A\to (B\to C))$ (odwrócenie sylogizmu Fregego)
5. $(A\to (B\to C))\to (B\to (A\to C))$ (prawo komutacji)
6. $(B\to C)\to ((A\to B)\to (A\to C))$ (prawo sylogizmu hipotetycznego)
7. $((A\to A)\to B)\to B$
8. $\neg\neg A\to A$ (prawo podwójnego przeczenia)
9. $(A\to \neg B)\to (B\to \neg A)$ (prawa transpozycji (lub kontrapozycji))

   $(A\to B)\to (\neg B\to \neg A)$

   $(\neg A\to B)\to (\neg B\to A)$

$(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

10. $A \to (\neg A \to B)$ (prawa przepełnienia)

$\neg A \to (A \to B)$

11. $(A \wedge \neg A) \to B$ (koniunkcyjna postać prawa przepełnienia)

12. $\neg(A \to B) \to A$

$\neg(A \to B) \to \neg B$

13. $(A \to \neg A) \to \neg A$ (słabe prawo redukcji do absurdu)

14. $(\neg A \to A) \to A$ (mocne prawo redukcji do absurdu)

15. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$

16. $(\neg A \to B) \to ((A \to B) \to B)$

17. $((A \to B) \to A) \to A$ (prawo Peirce'a)

18. $(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$ (prawo skracania)

19. $A \to (B \to A \wedge B)$

20. $(A \to (B \to C)) \to (A \wedge B \to C)$ (prawo importacji)

21. $(A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C))$ (prawo eksportacji)

22. $A \wedge B \to B \wedge A$

23. $\neg(A \to B) \to (A \wedge \neg B)$

24. $\neg(A \wedge \neg B) \to (A \to B)$

25. $(A \wedge \neg(A \wedge \neg B)) \to B$

26. $\neg(A \wedge \neg A)$ (prawo sprzeczności (lub niesprzeczności))

27. $((A \to B) \wedge A) \to B$

28. $(A \to B) \to ((A \wedge C) \to (B \wedge C))$ (prawo prawostronnego mnożenia członów implikacji)

29. $(A \to B) \to ((C \wedge A) \to (C \wedge B))$ (prawo lewostronnego mnożenia członów implikacji)

30. $((A \to C) \wedge (B \to D)) \to ((A \wedge B) \to (C \wedge D))$ (prawa mnożenia implikacji stronami)

$((A \to C) \wedge (B \to D)) \to ((B \wedge A) \to (D \wedge C))$

31. $(A \to B) \to \neg(A \wedge \neg B)$

32. $(A \to \neg B) \to \neg(A \wedge B)$

33. $((A \wedge B) \wedge C) \to (A \wedge (B \wedge C))$ (prawo łączności dla koniunkcji)

34. $(A \wedge (B \wedge C)) \to ((A \wedge B) \wedge C)$ (odwrotne prawo łączności dla koniunkcji)

35. $(A \vee B) \to (B \vee A)$ (przemienność alternatywy)

36. $(A \vee B) \to (\neg A \to B)$

37. $(\neg A \vee B) \to (A \to B)$

teza odwrotna: $(A \to B) \to (\neg A \vee B)$

38. $(A \vee B) \to ((A \to B) \to B)$

teza odwrotna: $((A \to B) \to B) \to (A \vee B)$

39. $(A \vee B) \to \neg(\neg A \wedge \neg B)$

teza odwrotna: $\neg(\neg A \wedge \neg B) \to (A \vee B)$

40. $\neg(\neg A \vee \neg B) \to (A \wedge B)$

teza odwrotna: $(A \wedge B) \to \neg(\neg A \vee \neg B)$

41. $\neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$

teza odwrotna: $(\neg A \vee \neg B) \to \neg(A \wedge B)$

42. $A \vee \neg A$ (prawa wyłączonego środka)

$\neg A \vee A$

43. $(A \to B) \to ((A \vee C) \to (B \vee C))$ (prawo prawostronnego dodawania do członów implikacji)

44. $(A \to B) \to ((C \vee A) \to (C \vee B))$ (prawo lewostronnego dodawania członów implikacji)

45. $((A \to B) \wedge (C \to D)) \to ((A \vee C) \to (B \vee D))$ (prawa dodawania implikacji stronami)

$((A \to B) \wedge (C \to D)) \to ((C \vee A) \to (D \vee B))$

46. $(A \vee (B \vee C)) \to ((A \vee B) \vee C)$ (prawa łączności dla alternatywy)

teza odwrotna: $((A \vee B) \vee C) \to (B \vee (C \vee A))$

47. $(A \vee (B \wedge C)) \to (A \vee B) \wedge (A \wedge C)$ (prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji)

teza odwrotna: $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \to (A \vee (B \wedge C))$

48. $A \equiv A$ (prawo równoważności)

49. $((A \equiv B) \wedge (B \equiv C)) \to (A \equiv C)$ (prawo przechodniości dla równoważności)

50. $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$

51. $(A \wedge (B \wedge C)) \equiv ((A \wedge B) \wedge C)$

52. $(A \vee B) \equiv (B \vee C)$

53. $(A \vee B) \equiv (\neg A \to B)$

54. $(A \to B) \equiv (\neg A \vee B)$

55. $(A \vee B) \equiv ((A \to B) \to B)$

56. $(A \vee B) \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$

57. $(A \wedge B) \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$

58. $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$ (prawa De Morgana)

$\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$

59. $(A \wedge B) \equiv \neg(A \to \neg B)$

60. $(A \to B) \equiv \neg(A \wedge \neg B)$

61. $(A \equiv B) \to ((A \to B) \wedge (B \to A))$

62. $((B \to A) \wedge (A \to B)) \to (B \equiv A)$

63. $(A \equiv B) \to (B \equiv A)$ (przemienność tożsamości)

64. $\neg\neg A \equiv A$

65. $(A \wedge A) \equiv A$

66. $(A \wedge (B \wedge C)) \equiv ((A \wedge B) \wedge C)$

67. $(A \vee (B \vee C)) \equiv ((A \vee B) \vee C)$

68. $(A \vee A) \equiv A$

69. $(A \equiv B) \to ((A \wedge C) \equiv (B \wedge C))$

70. $(A \equiv B) \to ((C \equiv A) \to (B \equiv C))$

71. $(A \equiv B) \to ((C \equiv A) \equiv (C \equiv B))$

7.1.3. SYSTEM KRZ W WERSJI TABLIC SEMANTYCZNYCH.

W języku KRZ, który został przyjęty za wyjściowy (bez $\equiv$) dowolna formuła może posiadać tylko jedną z następujących postaci: może być negacją jakiejś formuły, implikacją lub koniunkcją lub alternatywą zbudowaną z dwóch formuł.

Zachodzi twierdzenie **o jednoznaczności przedstawienia formuły**, którego dowód można znaleźć w każdym poważniejszym podręczniku logiki matematycznej:
Jeśli A jest formułą KRZ (i nie jest zmienną zdaniową), to da się przedstawić w jednej i tylko jednej z następujących postaci; $\neg B$, $(B \to C)$, $(B \wedge C)$, $(B \vee C)$; gdzie formuły B, C są jednoznacznie określone.

Reguły rozkładu, którymi powinniśmy dysponować przy konstruowaniu tablicy semantycznej muszą pozwolić na rozłożenie dowolnej formuły spotkanej na drzewie. Reguł takich jest siedem. Oto one:

[¬]	$\neg\neg A$ A	
[→]	$A \rightarrow B$ $\neg A$ B	$\neg(A \rightarrow B)$ A $\neg B$
[∧]	$A \wedge B$ A B	$\neg(A \wedge B)$ $\neg A$ $\neg B$
[∨]	$A \vee B$ A B	$\neg(A \vee B)$ $\neg A$ $\neg B$

Liczba reguł związana jest z liczbą spójników logicznych języka i możliwą postacią formuły. Formuła o dowolnej postaci może być wzięta jako prawdziwa (co odpowiada wzięciu formuły niezanegowanej) lub fałszywa (co odpowiada formule zanegowanej). I tak np. jeśli na drzewie pojawi się formuła $A \rightarrow B$ rozumiemy to tak jakby implikacja była prawdziwa, zaś sytuację $\neg(A \rightarrow B)$ interpretujemy jako implikację fałszywą. Dla przekonania Czytelnika, że rzeczywiście taka była intencja przy ustalaniu powyższych reguł rozkładu zauważmy, iż implikacja $A \rightarrow B$ jest fałszywa tylko w jednym przypadku; mianowicie wtedy, gdy jej poprzednik jest prawdziwy, zaś następnik fałszywy. Reguła rozkładu dla formuły $\neg(A \rightarrow B)$ daje formuły A i $\neg B$. Zaś dla formuły $A \rightarrow B$ (która jest prawdziwa wtw poprzednik jest fałszywy lub następnik prawdziwy) dostajemy formuły $\neg A$ lub B.

WARUNKI PRAWDZIWOŚCI DLA TYPÓW FORMUŁ KRZ := Zachodzą następujące **warunki prawdziwości**:
[W_1] Formuła typu α jest prawdziwa wtw α_1 oraz α_2 są prawdziwe.

$[W_2]$ Formuła typu β jest prawdziwa wtw β_1 jest prawdziwa lub β_2 jest prawdziwa.

Całą sprawę da się lepiej wytłumaczyć za pomocą tzw. *formuł sygnowanych*. *Sygnaturą* formuły języka KRZ nazywamy każdy z dwu symboli T oraz F. Dowolna formuła A (w której opuszczono nawiasy zewnętrzne) nazywa się *sygnowana* jeśli jest zapisana bezpośrednio po którejś z sygnatur. Na przykład niech A będzie formułą KRZ w której opuszczono nawiasy zewnętrzne, wtedy zarówno TA jak i FA są formułami sygnowanymi. Dla formuł sygnowanych intuicyjna interpretacja reguł rozkładu jest znacznie łatwiejsza. Sygnowanie formuły A sygnaturą T, co daje TA, odpowiada założeniu prawdziwości A, zaś sygnowanie A sygnaturą FA odpowiada założeniu fałszywości formuły A.

UWAGA Nie wolno sygnować formuł sygnowanych!

PRZYKŁADY.

1. Formułę p możemy sygnować Fp lub Tp.
2. Formułę p

Ponieważ w dalszym ciągu będziemy często posługiwać się formułami sygnowanymi, a nawet dowodzić z ich użyciem twierdzeń, prezentujemy reguły rozkładu dla formuł sygnowanych. Trzeb zwrócić uwagę na to, że tych reguł rozkładu jest osiem podczas gdy dla formuł niesygnowanych było siedem.

Reguły rozkładu dla formuł sygnowanych.

	T$\neg$A FA	F$\neg$A TA 1
$[\rightarrow]$	TA$\rightarrow$B FA TB	FA$\rightarrow$B TA FB
$[\wedge]$	TA$\wedge$B TA TB	FA$\wedge$B FA FB
$[\vee]$	TA$\vee$B TA TB	FA$\vee$B FA FB

Niech A będzie formułą KRZ zaś v wartościowaniem boolowskim. Dla formuł sygnowanych zachodzą następujące **warunki prawdziwości**:

- Formuła typu TA jest prawdziwa przy wartościowaniu boolowskim v wtw v(A) =**1**.
- Formuła typu FA jest prawdziwa przy wartościowaniu boolowskim v wtw v(A) =**0**.

Zamiennie będzie się stosować zwroty: ‘formuła prawdziwa przy wartościowaniu boolowskim ...’ i ‘formuła prawdziwa dla wartościowania boolowskiego...’.

Mając dowolną formułę A zbudujmy drzewo rozkładu dla $\neg$A. Oznaczamy je skrótowo symbolem $T_{\neg A}$, gdzie indeks dolny wskazuje formułę dla jakiej budowane jest drzewo. Czynimy to w sposób następujący:

1. Etap pierwszy. Przodkiem drzewa jest formuła $\neg$A co odpowiada założeniu niewprost, że A jest fałszywa.
2. do formuły $\neg$A stosujemy odpowiednią regułę rozkładu (o ile jest to możliwe), a następnie gwiazdką zaznaczamy z prawej strony $\neg$A fakt iż formuła została rozłożona.
3. Etap drugi. Załóżmy, że drzewo dla $\neg$A jest jakoś rozbudowane. Szukamy idąc od góry drzewa formuły, która nie została jeszcze rozłożona, co stwierdzimy po braku gwiazdki z prawej strony tego punktu drzewa. Niech będzie to jakaś formuła B. Rozkładamy tę formułę stosując odpowiednią regułę typu α lub β. Formułę (formuły) uzyskane z rozkładu ‘doklejamy’ w odpowiedni sposób zależny od reguły którą używamy do każdego punktu końcowego każdej gałęzi drzewa przechodzącej przez B.
4. Tę procedurę z punktu 3 powtarzamy tak długo aż wszystkie formuły zostaną rozłożone co zostanie potwierdzone gwiazdką. Formuły, których nie da się rozłożyć (jak np. zanegowana zmienna zdaniowa) również zaznaczamy gwiazdką.
5. Kiedy $T_{\neg A}$ jest w ten sposób ukończona liczymy punkty końcowe drzewa. Drzewo ma tyle gałęzi ile jest punktów końcowych.

Uporządkowane drzewo dwójkowe nazwiemy T_2 nazwiemy **bezpośrednim rozszerzeniem** drzewa T_1 wtw T_2 powstaje z T_1 przez jednokrotne zastosowanie którejś z reguł (α) lub (β).

TABLICA ANALITYCZNA DLA FORMUŁY A (T_A) := Drzewo uporządkowane i dwójkowe T_A dla którego istnieje ciąg skończony $\langle T_1, T_2, \ldots, T_n=T_A\rangle$ drzew uporządkowanych i dwójkowych taki, że T_1 jest drzewem jednoelementowym, którego jedynym elementem jest A, zaś T_{i+1} jest bezpośrednim rozszerzeniem T_i dla każdego $i<n$.

Gałąź drzewa nazywamy **zamkniętą** gdy znajdują się na niej równocześnie; jakaś formuła B i jej negacja $\neg$B.

Gałąź drzewa nazwiemy **otwartą** gdy nie jest zamknięta.

Drzewo nazwiemy **zamkniętym** gdy wszystkie jego gałęzie są zamknięte.

Oto pojęcie dowodu dla formuł KRZ sformułowane z użyciem tablic semantycznych:

DOWÓD FORMUŁY := **Dowodem formuły** A nazywamy zamknięte drzewo zbudowane dla $\neg$A, czyli $T_{\neg A}$. Zbiór wszystkich formuł języka KRZ posiadających dowód za pomocą drzew rozkładu (tablic analitycznych) oznaczmy symbolem Dow_{TA}. Jeśli posługujemy się formułami sygnowanymi to dowodem formuły A nazywamy zamkniętą tablicę analityczną dla FA, czyli T_{FA}.

Formuły należące do zbioru Dow_{TA} nazywać będziemy **dowiedlnymi**.

Gałąź G tablicy analitycznej nazwiemy **zupełną** gdy:

- Jeśli znajduje się na niej formuła typu α, to są na niej również formuły α_1 oraz α_2.
- Jeśli znajduje się na niej formuła typu β, to przynajmniej jedna z formuł β_1, β_2 również się na niej znajduje.

Tablicę analityczną (drzewo rozkładu) T nazywamy **zupełną** gdy każda gałąź jest zamknięta albo zupełna.

7.1.4. KRZ W POSTACI RACHUNKU SEKWENTÓW

Rachunek sekwentów dla KRZ został wynaleziony przez **Gerharda Gentzena** (1909-1945) około roku 1936 i został nazwany LK.

Przyjmujemy, że dany jest język KRZ w postaci z punktu 7.1.1. Dla opisania rachunku sekwentów LK potrzebny są dodatkowo następujące metazmienne:

1) Symbole Γ, Δ oznaczają ciągi formuł języka KRZ. Dopuszczamy przypadek, że są one puste.
2) Znaku |- używamy do zapisania sekwentu. Znak ten oddziela **poprzednik** (antecedent) **sekwentu** od **następnika** (consequent) **sekwentu**. Zwracamy uwagę na to, by odróżnić terminy *poprzednik* i *następnik sekwentu* od *poprzednika* i *następnika implikacji*.

Sekwent zapisujemy w postaci: $\Gamma \mid\!- \Delta$. Nieformalne rozumienie sekwentu jest następujące: jeśli $\Gamma = \langle A_1, ..., A_m\rangle$ oraz $\Delta = \langle B_1, ..., B_n\rangle$, to sekwent $A_1, ..., A_m \mid\!- B_1, ..., B_n$ rozumieć będziemy jako: $A_1 \wedge ... \wedge A_m \mid\!- B_1 \vee ... \vee B_n$.

AKSJOMAT. Jedynym aksjomatem LK jest sekwent:

$$A \mid\!- A, \text{ gdzie } A \in FORM_{KRZ}.$$

REGUŁY INFERENCJI:

7.1.5. NIEKTÓRE WAŻNIEJSZE TWIERDZENIA METALOGICZNE O KRZ.

TWIERDZENIE O NIESPRZECZNOŚCI.
Niech A będzie formułą KRZ.

$$A \in Dow_{TA} \Rightarrow A \in TAUT_{KRZ}$$

Dowód:
Załóżmy, że $A \in Dow_{TA}$ tzn. istnieje zamknięte drzewo rozkładu dla $\neg A$.

1. Definicja pomocnicza: drzewo nazwiemy **spełnialnym**, gdy chociaż jedna z jego gałęzi jest **spełnialna**. Gałąź G drzewa nazwiemy **spełnialna**, gdy istnieje wartościowanie boolowskie dla którego wszystkie formuły gałęzi G przyjmą równocześnie wartość logiczną prawdy. Innymi słowy gałąź G nazwiemy spełnialną, gdy zbiór formuł leżących na G jest spełnialny.
2. FAKT. Jeśli drzewo uporządkowane i dwójkowe T_i jest spełnialne i jego bezpośrednim rozszerzeniem jest drzewo dwójkowe i uporządkowane T_{i+1}, to T_{i+1} jest również spełnialne, dla każdego wartościowania, dla którego T_i jest spełnialne. DOWÓD FAKTU. T_i posiada otwartą gałąź G na mocy tego, że jest spełnialne. T_{i+1} powstaje z T_i przez jednokrotne zastosowanie reguły α lub β. Jeśli będzie to reguła α, to odpowiednio 'doklejamy' do stosownej gałęzi formuły α_1 i α_2. W przypadku gdy owa stosowna gałąź G_1 jest różna od gałęzi G, to dowodzony fakt oczywiście zachodzi, bo spelnialną gałęzią jest G. Jeśli zaś gałąź G_1=(G, α_1, α_2) tzn. gałąź G_1 jest rozszerzeniem gałęzi G, to G_1 jest spełnialna, bo ze spełnialności α dla wartościowania v wynika, że α_1 oraz α_2 są prawdziwe dla tego samego wartościowania v. Jeśli by zaś gałąź G była rozszerzona z użyciem reguły typu β tzn. obie gałęzie postaci (G, β_1) oraz (G, β_2) należą do drzewa T_{i+1}, to przynajmniej jedna z nich jest spełnialna.
3. Jeśli drzewo dla $\neg A$ jest zamknięte, to nie może być spełnialne i na mocy faktu z punktu 2. dowodu, przodek (drzewo T_1) nie może być spełnialny, dla żadnego wartościowania boolowskiego. Dla każdego wartościowania boolowskiego v, $v(\neg A) = \mathbf{0}$. Stąd $v(A) = \mathbf{1}$.

Zmierzać będziemy obecnie do odpowiedzi na pytanie odwrotne do zagadnienia niesprzeczności. Czy z tego, że dana formuła jest tautologią wynika logicznie, że ma ona dowód? Jest to pytanie o pełność systemu formalnego. W języku angielskim, który dominuje w literaturze światowej z zakresu logiki, niesprzeczność systemu w sensie wyżej dowiedzionego twierdzenia o niesprzeczności nazywa się *soundness* (co tłumaczę jako *trafność*). Pełność systemu w sensie dowiedlności wszystkiego co prawdziwe nazywa się *completeness*.

ZBIÓR HINTIKKI := zbiór X formuł języka KRZ nazywa się **zbiorem Hintikki** (lub inaczej: *zbiór nasycony w dół*), gdy spełnia warunki:
(H0) żadna zmienna zdaniowa wraz ze swoją negacją nie należą równocześnie do X.
(H1) $\alpha \in X \Rightarrow \alpha_1 \in X$ oraz $\alpha_2 \in X$.
(H2) $\beta \in X \Rightarrow \beta_1 \in X$ lub $\beta_2 \in X$.

ZBIÓR HINTIKKI DLA FORMUŁ SYGNOWANYCH := zbiór formuł sygnowanych X nazywa się zbiorem Hintikki, gdy spełnia warunki:
(H0)' dla żadnej zmiennej zdaniowej p, Tp i Fp nie należą równocześnie do zbioru X.
(H1) $\alpha \in X \Rightarrow \alpha_1 \in X$ oraz $\alpha_2 \in X$.
(H2) $\beta \in X \Rightarrow \beta_1 \in X$ lub $\beta_2 \in X$.

LEMAT HINTIKKI.
Każdy zbiór Hintikki $X \subset FORM_{KRZ}$ (skończony lub nieskończony) jest spełnialny.

Dowód:
Załóżmy, że X jest zbiorem Hintikki.

1. Zbudujemy wartościowanie boolowskie v które spełnia **równocześnie** wszystkie formuły zbioru X.
2. Dla zdefiniowania wartościowania boolowskiego wystarczy zadać wartości jakie przyjmuje na zmiennych zdaniowych. Dla dowolnej zmiennej zdaniowej p zachodzi jeden z następujących przypadków:

- $p \in X \Rightarrow v(p) = \mathbf{1}$,
- $\neg p \in X \Rightarrow v(p) = \mathbf{0}$.
- $p \notin X, \neg p \notin X \Rightarrow v(p) = \mathbf{1}$.

3. Wykażemy za pomocą **indukcji porządkowej** (por. str. 12) biegnącej po stopniu n złożenia formuły, że dla dowolnej formuły $A \in X$, $v(A) = \mathbf{1}$. Dla n=0, czyli dla formuł A o długości 0, którymi są zmienne zdaniowe, lemat zachodzi na mocy definicji wartościowania. Załóżmy, że twierdzenie zachodzi dla wszystkich formuł krótszych od n>0. Chcemy wykazać, że twierdzenie zachodzi dla dowolnej formuły A o długości n. Dla n=1 formuła może mieć postać zanegowanej zmiennej, ale wtedy jest prawdziwa na mocy definicji wartościowania. Oprócz tego przypadku dowolna formuła A o długości n, jest formułą typu α lub typu β. Musimy sprawdzić oba przypadki. Niech A ma postać α. Wtedy α_1 oraz α_2 należą do zbioru X (na mocy (H1)), są krótsze niż A i są prawdziwe dla wartościowania v, na mocy założenia indukcyjnego. Z ich prawdziwości wnosimy o prawdziwości formuły A na podstawie warunków prawdziwości [W_1]. Jeśli zaś formuła A jest typu β, to przynajmniej jedna z formuł β_1 lub β_2 należy do zbioru X (na mocy (H2)), i, jako krótsza od formuły wyjściowej, jest prawdziwa. Stąd formuła A jest prawdziwa na podstawie warunków prawdziwości [W_2].

Tutaj jednak pojawia się problem z formułą o postaci implikacji nie zanegowanej np. $B \rightarrow C$. Jest to formuła typu β i z niej uzyskujemy formuły $\neg B$ lub C. Nie zawsze jest tak, iż $\neg B$ będzie krótsza od całej formuły. Na przykład formuła $B \rightarrow p$ jest równej długości z formułą $\neg B$. Trzeba ten krytyczny przypadek rozpatrzyć osobno. Załóżmy, że B ma postać zmiennej np. q oraz formuła $\neg q$ należy do zbioru X. Wtedy $v(\neg q)=\mathbf{1}$ i $v(q)=\mathbf{0}$, a stąd mamy $v(q \rightarrow p)=\mathbf{1}$. Jeśli zachodzi $B=\neg D$, to $\neg B=\neg\neg D$. Formuła $\neg\neg D$ należy do X , D należy do X , $v(D)=\mathbf{1}$ i oczywiście $v(\neg D \rightarrow p)=\mathbf{1}$. Jeśli zaś formuła B jest inną formułą typu α lub β, to $\neg B$ rozłoży się na formuły krótsze od niej i twierdzenie zachodzi na mocy założenia indukcyjnego.

Wykazaliśmy przez konstrukcję istnienie takiego wartościowania boolowskiego, które na wszystkich formułach zbioru Hintikki X przyjmuje wartość logiczną prawdy czego właśnie należało dowieść.

Lemat ten dla X będącego zbiorem formuł sygnowanych ma prostszy dowód. Definiujemy wartościowanie v następująco: v(p)=**1**, gdy Tp$\in$X; v(p)=**0** gdy Fp$\in$X; v(p)=**1** gdy Tp$\notin$X i Fp$\notin$X. Wykażemy, że dla każdej formuły A$\in$X; sygnowana formuła A jest prawdziwa przy wartościowaniu boolowskim v. Dowód jest indukcyjny po długości formuły A, ale bez sygnatury. Dla n=0 mamy do czynienia ze zmiennymi sygnowanymi i są one prawdziwe przy v na mocy definicji wartościowania v. Załóżmy, że twierdzenie zachodzi dla formuł krótszych od pewnego n>0. Wykażemy, ze zachodzi ono dla formuł o długości n. Każda taka formuła jest albo formułą typu α lub β. Jeśli jest formułą typu α, to krótsze od niej formuły α_1 i α_2 należą do X (na mocy (H1)). Z założenia indukcyjnego α_1, α_2 są prawdziwe co z warunków prawdziwości [W_1] dla formuł sygnowanych daje prawdziwość formuły α. I podobnie zachodzi dla formuły β. Jedna z formuł β_1,β_2 (prawdziwych dla v i krótszych od β) należy do X (na mocy (H2)). Na mocy założenia indukcyjnego i warunków prawdziwości dla formuł sygnowanych [W_2] β również jest prawdziwa dla wartościowania v. Dla wartościowania boolowskiego wszystkie formuły zbioru X są prawdziwe czyli zbiór X jest spełnialny. I tego właśnie należało dowieść.

TWIERDZENIE O SPEŁNIALNOŚCI.
Każda zupełna i otwarta gałąź G tablicy analitycznej jest spełnialna.

Dowód:
Zbiór formuł leżących na zupełnej i otwartej gałęzi G jest tworzy zbiór Hintikki. Na mocy lematu Hintikki jest on spełnialny.

Wpierw udowodnimy lemat potrzebny do udowodnienia twierdzenia o pełności:

LEMAT O PEŁNOŚCI. [wersja sygnowana]
Jeśli A jest tautologią KRZ, to każda zupełna tablica analityczna T_{FA} zamknie się.

Dowód (lematu o pełności):
Zał. A$\in$TAUT$_{KRZ}$.
Zał. załóżmy dla dowodu niewprost, że jakaś zupełna T_{FA} nie zamknie się.
1. Z definicji tablicy analitycznej zatem istnieje na niej otwarta gałąź G.
2. Z tego że T_{FA} ma być zupełna i otwarta wynika, że gałąź G jest zbiorem Hintikki.
3. G jest spełnialna dla pewnego wartościowania boolowskiego v na mocy twierdzenia o spełnialności.
4. Dla tego wartościowania v przodek drzewa FA ma być prawdziwy, co znaczy że v(A) =**0**. Sprzeczność z założeniem o tautologiczności A.

TWIERDZENIE O PEŁNOŚCI. [wersja sygnowana dla tablic analitycznych]

$$A \in TAUT_{KRZ} \Rightarrow A \in Dow_{TA}.$$

Dowód (twierdzenia o pełności):
Zał. A$\in$TAUT$_{KRZ}$.
1. Z lematu o pełności mamy, że każda zupełna T_{FA} zamknie się. Weźmy taką zupełną i zamkniętą tablicę analityczną T_{FA}. T_{FA} jest dowodem dla formuły A, zatem A$\in$Dow$_{TA}$.

Twierdzenie o pełności dla KRZ wraz z twierdzeniem o niesprzeczności dla KRZ dowodzą tego, że formalizacja własności dla spójników zdaniowych jest adekwatna. Analogiczny wynik metalogiczny jest najważniejszym problem w przypadku dowolnego systemu formalnego dla którego podano charakteryzację semantyczną.

Niech X będzie skończonym lub przeliczalnie nieskończonym zbiorem formuł sygnowanych KRZ. Dla zbioru X zachodzi:

TWIERDZENIE O ZWARTOŚCI DLA KRZ.
Jeśli każdy skończony podzbiór zbioru X jest spełnialny, to zbiór X jest spełnialny.

Dowód:
Twierdzenie potrzebuje dowodu tylko dla przypadku kiedy X jest nieskończony.

1. Wszystkie elementy zbioru X ustawia się na nieskończoną listę A_1, A_2, ... , A_n, ...
2. Indukcyjny opis budowy tablicy analitycznej (drzewa) T dla zbioru X w następujący sposób: (1) Krok bazowy; weź jako przodka formułę A_1 i dobuduj dla niej drzewo zupełne T_1. Drzewo tak zbudowane dla A_1 nie może się zamknąć i musi mieć przynajmniej jedną gałąź otwartą, gdyż w przeciwnym przypadku A_1 byłoby niespełnialne. Do punktu końcowego każdej otwartej gałęzi dopisz A_2 i rozszerz T_1 rozkładając A_2 do drzewa zupełnego T_2. Tak rozszerzone drzewo znowu musi mieć gałąź otwartą. (2) Krok indukcyjny; załóżmy, że mamy gotowe drzewo na dla n formuł z naszej listy obecnych na drzewie T_n . Drzewo tu musi mieć chociaż jedną gałąź otwartą w przeciwnym razie zbiór skończony {A_1, ... , A_n} byłby niespełnialny. Do punktu końcowego każdej otwartej gałęzi dołączmy formułę A_{n+1} z listy. I rozbudowujemy drzewo T_n do drzewa zupełnego T_{n+1}.
3. Procedura ta nie może się skończyć, gdyż w przeciwnym razie pewien skończony podzbiór zbioru X byłby niespełnialny co jest sprzeczne z założeniem twierdzenia. Niekończący się proces pozwala budować drzewo T na którym znajdą się wszystkie formuły nieskończonego zbioru X.
4. Drzewo T jest nieskończone (z 3.), skończenie generowalne (z definicji reguł rozkładu) zatem na mocy lematu Königa posiada nieskończoną gałąź G.
5. Na gałęzi G drzewa T znajdują się wszystkie formuły zbioru X (co widać ze sposobu konstrukcji T).
6. Gałąź G jest otwarta, gdyż w przeciwnym razie jakiś skończony podzbiór X byłby niespełnialny.
7. Gałąź G jest zbiorem Hintikki. Wynika to otwartości G oraz tego iż budując T dbaliśmy o zupełność drzewa na każdym etapie konstrukcji.
8. G jest spełnialna co wynika z lematu Hintikki.

Twierdzenie o zwartości ma ciekawy aspekt filozoficzny. Pozwala ono bowiem ze znajomości pewnej własności zbioru formuł KRZ o charakterze lokalnym (skończonym) wnioskować o własności globalnej (nieskończonej).

Jest znany jeszcze inny dowód twierdzenia o zwartości wykorzystujący lemat Lindenbauma.[31]. Jest to ważne dlatego, że lemat Lindenbauma wykorzystuje się w dowodzie Henkina twierdzenia o pełności dla logiki pierwszego rzędu. Dlatego zaprezentowany zostanie wspomniany lemat.

[31] Lindenbaum był wybitnym polskim logikiem zamordowanym podczas drugiej wojny światowej.

Zbiór formuł niesygnowanych (!) X nazywamy **niesprzecznym,** gdy dowolny skończony jego podzbiór jest spełnialny.[32]

Zbiór formuł niesygnowanych X nazywamy **sprzecznym**, gdy nie jest niesprzeczny tzn. gdy istnieje skończony podzbiór zbioru X, który jest niespełnialny.

Zbiór formuł niesygnowanych (!) X nazywamy **maksymalnie niesprzecznym** gdy nie istnieje niesprzeczny zbiór formuł (niesygnowanych) Y taki, że $X \subset Y$ i $X \neq Y$.

Zbiór formuł niesygnowanych X nazywamy **prawdziwościwym** wtw spełnia następujące warunki:
(S0) Z dwóch formuł A, $\neg A$ dokładnie jedna należy do X.
(S1) Formuła typu α należy do X wtw α_1 oraz α_2 należą do X.
(S2) Formuła typu β należy do X wtw β_1 należy do X lub β_2 należy do X.

FAKTY. a) Zbiór prawdziwościowy X formuł KRZ jest zbiorem formuł KRZ, które dla pewnego wartościowania boolowskiego v przyjmują wartość logiczną prawdy.
b) Zbiór prawdziwościowy formuł KRZ jest zbiorem maksymalnie niesprzecznym.

LEMAT O ZBIORACH MAKSYMALNYCH. [dla formuł niesygnowanych]
Każdy zbiór maksymalnie niesprzeczny jest zbiorem prawdziwościowym.

Dowód:
Niech X będzie maksymalnie niesprzecznym zbiorem. Chcemy o nim udowodnić, że musi być zbiorem prawdziwościowym Wystarczy wykazać, że X ma własności (S0)-(S2).

1. Z dwóch dowolnych formuł A, $\neg A$ obie nie mogą równocześnie należeć do X bo byłby sprzeczny. Ten i poniższy argument (z 2.) dotyczą w szczególności zmiennej i jej negacji, gdyż zachodzą dla dowolnej formuły języka KRZ.
2. Z dwóch formuł A, $\neg A$ co najmniej jedna należy do X, gdyż zbiór $X \cup \{A\}$ lub zbiór $X \cup \{\neg A\}$ jest niesprzeczny. Gdyby bowiem oba te zbiory były sprzeczne to istniałyby skończone podzbiory X_1 i X_2 zbioru X takie, że $X_1 \cup \{A\}$ byłby niespełnialny oraz $X_2 \cup \{\neg A\}$ byłby niespełnialny. Biorąc $X_3 = X_1 \cup X_2$ mielibyśmy skończony podzbiór zbioru X taki, że zbiory $X_3 \cup \{A\}$ oraz $X_3 \cup \{\neg A\}$ byłyby niespełnialne. Z tego zaś wynika, że X_3 byłby niespełnialny. Gdyby bowiem X_3 byłby spełnialny, to istniałoby wartościowanie boolowskie v takie, że dla niego wszystkie formuły zbioru X_3 przyjmowałyby równocześnie wartość logiczną. Dla wartościowania v zachodzi dodatkowo: v(A)=**1** albo v(A)=**0**. Wtedy dołączenie do zbioru X_3 formuły A albo $\neg A$ dawałoby zbiór spełnialny przez wartościowanie v. Zatem X_3 musi być niespełnialne, a stąd X byłby niespełnialne, bo X_3 jest skończonym podzbiorem zbioru X. Sprzeczność.
3. Dla wykazania implikacji $\Rightarrow$ z (S1) załóżmy, że α należy do X i niewprost, że któraś z α_1 lub α_2 nie należy do X. Przyjmijmy, że jest to α_1 (dla α_2 dowód jest analogiczny). Jeśli $\alpha_1 \notin X$, to $\neg\alpha_1 \in X$ (z 1. i 2.). Ale z [W_1] wiadomo, że $\{\alpha, \neg\alpha_1\}$ jest niespełnialny. Zatem $\alpha_1 \in X$. Podobnie wykazuje się prawdziwość implikacji $\Leftarrow$

[32] Wszystkie poniższe określenia definicyjne i twierdzenia które sformułowano dla formuł niesygnowanych można sformułować dla formuł sygnowanych.

z (S1). Załóżmy, że $\alpha_1 \in X$ oraz niewprost iż $\alpha \notin X$; wtedy $\neg\alpha \in X$ (z 1. i 2.), ale z $[W_1]$ zbiór $\{\alpha_1, \neg\alpha\}$ jest niespełnialny. Sprzeczność, zatem $\alpha \in X$.

4. Wykażemy równoważność (S2). Najpierw część $\Rightarrow$. Niech $\beta \in X$ oraz niewprost zarówno $\beta_1 \notin X$ jak i $\beta_2 \notin X$. Na mocy 1. oraz 2. byłoby równocześnie $\neg\beta_1 \in X$ oraz $\neg\beta_2 \in X$ co jest niemożliwe ze względu na $[W_2]$. Wobec tego w odwrotną stronę $\Leftarrow$: załóżmy, że $\beta_1 \in X$ lub $\beta_2 \in X$ oraz niewprost, że $\beta \notin X$. Stąd na mocy 1. i 2. $\neg\beta \in X$. Z $[W_2]$ wiadomo, że jakiegoś wartościowania boolowskiego; β_1 jest prawdziwe lub β_2 jest prawdziwe wtw β jest prawdziwe. Zatem założenia doprowadziły do sprzeczności co pozwala z wnosić, że $\beta \in X$. I to kończy cały dowód lematu.

Możemy przejść do lematu Lindenbauma.

LEMAT LINDENBAUMA. [dla formuł niesygnowanych]
Każdy niesprzeczny zbiór może zostać rozszerzony do zbioru maksymalnie niesprzecznego.

Dowód:
Niech X będzie niesprzecznym zbiorem formuł KRZ.
Rozszerzymy go poprzez specjalną konstrukcję do zbioru X_+, który będzie jego maksymalnie niesprzecznym nadzbiorem.

1. Wszystkie formuły poprawnie zbudowane języka KRZ ułóżmy na listę nieskończoną: $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$.
2. Indukcyjnie zdefiniujemy nieskończony ciąg zbiorów $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$; w następujący sposób:

$$X_0 = X.$$

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n \cup \{A_{n+1}\}, & \text{gdy } X_n \cup \{A_{n+1}\} \text{ jest niesprzeczny;} \\ X_n, & \text{gdy } X_n \cup \{A_{n+1}\} \text{ jest sprzeczny.} \end{cases}$$

3. Weźmy teraz sumę nieskończoną $\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ wszystkich zbiorów X_n. Na mocy definicji: $A \in \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ wtw $A \in X_n$, dla pewnego $n \in N$.

3. Niech $X_+ = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$. Wykażemy, że X_+ jest niesprzecznym i maksymalnym nadzbiorem X. Załóżmy niewprost, że X_+ jest sprzeczny i zawiera skończony podzbiór niespełnialny, który oznaczymy symbolem S. Zatem istnieje takie n, że $S \subset X_n$ co wynika z faktu, iż wszystkie elementy S po skończonej liczbie kroków zostaną dołączone do naszej konstrukcji. Jeśli S jest niespełnialny i skończony, to jest sprzeczny. Sprzeczny byłby wtedy również zbiór X_n co jest niezgodne z jego definicją. Wnioskujemy na tej podstawie, że X_+ jest niesprzeczny.

4. Dla wykazania maksymalności X_+ zwróćmy uwagę na to, że konstruując X_+ zapytywaliśmy się o każdą formułę sensowną KRZ dołączając ją do konstruowanego zbioru (jeśli nie niszczy niesprzeczności zbioru) lub ją odrzucając (w przypadku gdy ową niesprzeczność niszczy). Jeśli założymy, że X_+ nie jest maksymalny, to istniałaby formuła np. A którą można dołączyć do X_+ nie niszcząc jego niesprzeczności. Formuła A musiała być podczas konstrukcji zbioru X_+ rozpatrywana w odpowiednim kroku (gdyż musiałaby się ona znajdować na liście wszystkich formuł) i albo została dołączona do konstruowanego zbioru (i w nim już jest) albo odrzucona ponieważ niszczy niesprzeczność.

Podamy obecnie zarys dowodu twierdzenia o zwartości dla KRZ z użyciem lematu Lindenbauma.

Zarys dowodu **twierdzenia o zwartości dla KRZ**:
Niech X będzie nieskończonym zbiorem, którego każdy skończony podzbiór jest spełnialny. Zatem X jest niesprzeczny. Chcemy wykazać, że X jest spełnialny. Na mocy lematu Lindenbauma można X rozszerzyć do maksymalnie niesprzecznego zbioru X_+. Z lematu o zbiorach maksymalnych wiemy, że X_+ jest zbiorem prawdziwościowym, zaś zbiór prawdziwościowy jest spełnialny.

7.2 KLASYCZNY RACHUNEK PREDYKATÓW

7.2.0. Motywacja filozoficzna

KRZ a w ogólności rachunki zdaniowe określają sposób funkcjonowania spójników zdaniowych takich jak np. *jeżeli ..., to...*; *... i ...*; *... lub ...*; *możliwe, że ...*, o kategoriach syntaktycznych *z/zz* lub *z/z*. W takim przypadku pojęcie zdania złożonego jest zrelatywizowane do pewnej klasy spójników zdaniowych, a zatem istocie do języka. Pozostając przy logice klasycznej i standardowej liście spójników tej logiki pewne zdania pozostaną niezłożone. Taki zdaniem jest na przykład: *Każdy koń jest ssakiem.* Schematem tego zdania względem spójników KRZ będzie przykładowo zmienna zdaniowa p. Jak wiemy już z wykładu o sylogistyce arystotelesowskiej to zdanie jako zdanie kategoryczne ogólno-twierdzące podpada pod schemat: $\underline{n}$ a $\underline{m}$. Sylogistyka nie pozwala jednak na całkiem swobodne operowanie tego typu zdaniami, gdyż literze ‘a’ w schemacie tego zdania odpowiada dość złożony obiekt językowy mianowicie *każdy ... jest ...* . Głównie dzięki pracom G. Boole’a i G. Fregego wiemy dzisiaj jak analizować logicznie tego typu zdania. Analizy te umożliwiają uzasadnienie poprawności następującego wnioskowania, które z punktu widzenia rachunku zdań jest niepoprawne:

Każdy koń jest ssakiem. Zatem głowa konia jest głową ssaka.

Klasyczny rachunek predykatów (KRP), który zostanie przedstawiony nazwę swą bierze od terminu *predykat*. Ponieważ nie istnieje definicja *predykatu* w ogólności, podobnie zresztą jak było to w przypadku nazw, zadaniem poniższych uwag jest naprowadzenie intuicji na właściwe tory. Biorąc pod uwagę rozróżnienie na *syntaktykę*, *semantykę* i *pragmatykę* możemy mówić odpowiednio o *języku*, *świecie* i *podmiocie*. Jeśli założymy, że relacje ‘zamieszkują’ świat, to tym co odpowiada relacjom (w szczególności własnościom czyli relacjom jednoargumentowym) po stronie języka są właśnie *predykaty*.

7.2.1. Język KRP.

ALFABET JĘZYKA KRP :=

1) Nieskończony przeliczalny zbiór **zmiennych indywiduowych:** o postaci x_1, x_2, ... , x_n, ... Zbiór ten oznaczamy symbolem V i określamy $V = \{x_n: n \in N_+\}$.
2) Nieskończony przeliczalny zbiór **parametrów:** oznaczany symbolem $C = \{a_n: n \in N_+\}$;
3) **Spójniki zdaniowe:** $\neg$, $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$;
4) Nieskończony przeliczalny zbiór **liter predykatowych** (lub krótko **predykatów**) oznaczany symbolem Pr: $Pr = \{P_m^n : n,m \in N_+\}$. Górny indeks n wskazuje tzw. argumentowość predykatu, zaś dolny indeks kolejny numer na liście n-argumentowych predykatów;
5) Symbole **kwantyfikatora:** $\forall$ (symbol kwantyfikatora ogólnego), $\exists$ (symbol kwantyfikatora szczegółowego lub egzystencjalnego);
6) Nawiasy:), (.

UMOWA. Dla wygody będziemy używać na zmienne indywiduowe symboli x, y, z; na parametry symboli a, b, c. Na predykaty używać będziemy liter P, Q, R, bez zaznaczenia liczby argumentów predykatu. Nie będzie to prowadziło do żadnych problemów, gdyż zawsze z kontekstu będzie wiadomo ilu argumentowy jest dany predykat.

Język rachunku predykatów może być bardziej lub mniej obszerny. W naszym przypadku, ze względu na to, ze chcemy zachować jedność metodyczną podręcznika i wykład KRP oprzeć na metodzie tablic semantycznych, przyjmujemy okrojony język. W pełnym języku KRP występują dodatkowo symbole funkcyjne, których jest przeliczalnie nieskończenie wiele. Oprócz tego predykat identyczności oznaczany symbolem = traktuje się jako symbol logiczny i stały. Mówi się wtedy o *rachunku predykatów z identycznością*. KRP nazywany jest również *Klasycznym Rachunkiem Kwantyfikatorów*. Nazwa ta pochodzi stąd, że w tym właśnie rachunku w sposób formalny uchwycono reguły posługiwania się najważniejszymi wyrażeni kwantyfikującymi jak: *każdy* oraz *pewien*. Jeszcze inna nazwa to *Logika Pierwszego Rzędu*, która nawiązuje do typu indywiduów o których można mówić na gruncie tego rachunku. Mianowicie można mówić o indywiduach (dowolnych), ale nie można równocześnie mówić już o zbiorach tych indywiduów. Do tego potrzebna jest logika drugiego rzędu pozwalająca mówić równocześnie o jakichś przedmiotach (indywiduach) i zbiorach tych przedmiotów.

Definicja wyrażenia sensownego KRP jest bardziej złożona niż w KRZ i jest dwuetapowa.

FORMUŁA ATOMOWA KRP := Dla dowolnego $n \in N_+$; niech P będzie n-argumentowym predykatem ($P \in Pr$), zaś każda z d_1, d_2, ... , d_n będzie zmienną indywiduową lub parametrem ($d_1, \ldots , d_n \in V \cup C$), to $Pd_1d_2 \ldots d_n$ jest formułą atomową KRP.

Zbiór formuł atomowych oznaczamy symbolem At, zaś zbiór wszystkich formuł KRP oznaczamy symbolem $FORM_{KRP}$.

DEFINICJA ZBIORU FORMUŁ KRP ($FORM_{KRP}$) **:=** 1) $At \subset FORM_{KRP}$; 2) A , $B \in FORM_{KRP} \Rightarrow (A \rightarrow B)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $\neg A \in FORM_{KRP}$; 3) $x \in V$, $A \in FORM_{KRP} \Rightarrow \forall xA$, $\exists xA \in FORM_{KRP}$.

Jak można zauważyć punkt drugi definicji zbioru formuł KRP przypomina punkt drugi definicji zbioru formuł KRZ. Różnica leży w innym zakresie zmienności metazmiennych A, B.

Formułą czystą nazywać będziemy formułę KRP bez parametrów.

Jak już zostało zaznaczone w wypadku KRP mamy do czynienia z wnikaniem w strukturę logiczną zdania prostego. Narzędzie logiczne, którym jest KRP, jest znacznie subtelniejsze niż KRZ.

Obecnie zmierzamy do zdefiniowania kluczowego pojęcia języka KRP, mianowicie do zdefiniowania pojęcia zdania.

Zdefiniujemy operację podstawiania parametrów za zmienne indywiduowe. Formułę $[A]^x_a$ rozumieć będziemy jako wynik podstawienia za zmienną x parametru a. Ścisła definicja ma postać indukcyjną, a indukcja biegnie po stopniu złożenia formuły A.

Najpierw indukcyjnie zdefiniujemy **stopień złożenia formuły** A oznaczany symbolem d(A) zwany czasem **długością formuły** A.

1) $A \in At \Rightarrow d(A)=0$.
2) $d(A \vee B) = d(A \wedge B) = d(A \rightarrow B) = d(A) + d(B) + 1$.
3) $d(\neg A) = d(\forall xA) = d(\exists xA) = d(A) + 1$.

UWAGA.
W przypadku KRP również będziemy posługiwać się tzw. formułami sygnowanymi. **Sygnaturą** nazywamy każdy z dwóch znaków T, F. **Formułą sygnowaną** nazywamy każdą formułę języka KRP przed którą bezpośrednio postawiono jedną z sygnatur np. $T\forall xA$, $F\neg\exists xA$, FPx, TQxy.

UWAGA.
Jeśli będziemy posługiwać się formułami niesygnowanymi to indukcja biegnie od formuł o długości 0, którymi są formuły atomowe. W przypadku indukcji po długości formuł sygnowanych formułami sygnowanymi o długości 0 są formuły atomowe sygnowane literą T oraz formuły atomowe sygnowane literą F. Ten drugi rodzaj formuł odpowiada negacjom formuł atomowych niesygnowanych. Np. formule Px odpowiada TPx; formule $\neg$Px odpowiada po stronie formuł sygnowanych FPx. Należy o tym pamiętać, gdyż odegra to rolę w dowodzie lematu Hintikki.

DEFINICJA PODSTAWIANIA := dla dowolnych $A \in FORM_{KRP}$, $x \in V$, $a \in C$:

1) $A \in At \Rightarrow [A]^x_a$ jest wynikiem zastąpienia w formule A wszystkich wystąpień zmiennej x parametrem a.
2) $[A \rightarrow B]^x_a = [A]^x_a \rightarrow [B]^x_a$.
   $[A \wedge B]^x_a = [A]^x_a \wedge [B]^x_a$.
   $[A \vee B]^x_a = [A]^x_a \vee [B]^x_a$.
   $[\neg A]^x_a = \neg [A]^x_a$.

3) $[\forall xA]^x_a = \forall xA$.
$[\exists xA]^x_a = \exists xA$.
$[\forall xA]^y_a = \forall x[A]^y_a$, gdy $x \neq y$.
$[\exists xA]^y_a = \exists x[A]^y_a$, gdy $x \neq y$.

Przypominam, że odróżniamy pomiędzy zmienną a **wystąpieniem zmiennej**. Na przykład w formule $(Pxx \rightarrow Qx)$ mamy trzy wystąpienia jednej zmiennej indywiduowej x. Wystąpienia zmiennej liczymy o początku formuły, czyli od lewej strony dzięki czemu możemy mówić o pierwszym, drugim i trzecim wystąpieniu zmiennej x.

Symbole $\forall x$ oraz $\exists x$; gdzie x jest dowolną zmienną indywiduową nazywać będziemy **kwantyfikatorami** w odróżnieniu od symboli kwantyfikatora $\forall$, $\exists$. Widać z tej konwencji, że **kwantyfikatorów** jest przeliczalnie nieskończenie wiele tyle ile jest zmiennych indywiduowych, zaś symbole kwantyfikatora są tylko dwa. O zmiennej x w kwantyfikatorze $\forall x$ lub $\exists x$ będziemy mówić jako o **związanej przez kwantyfikator** lub równoważnie, że kwantyfikator wiąże zmienną x.

Zasięgiem kwantyfikatora nazywamy najmniejszą formułę leżącą bezpośrednio po kwantyfikatorze. I tak np. zasięgiem kwantyfikatora $\forall x$ w formule $\forall xA$ jest formuła A. Analogicznie w formule $\exists xA$ zasięgiem kwantyfikatora $\exists x$ jest formuła A.

Dane wystąpienie zmiennej indywiduowej w formule KRP nazwiemy **związanym** gdy występuje w zasięgu kwantyfikatora wiążącego tą właśnie zmienną. Dane wystąpienie zmiennej indywiduowej nazwiemy **wolnym** gdy nie jest związane. Dana zmienna może mieć równocześnie w jednej formule wystąpienia wolne i związane.

ZDANIE KRP := zdaniem nazywamy formułę KRP, która nie posiada wolnych wystąpień żadnej zmiennej indywiduowej. Lub inaczej: formuła A jest **zdaniem** wtw dla dowolnego $x \in V$ oraz $a \in C$; $[A]^x_a = A$.

Niech $A \in FORM_{KRP}$. **Domknięciem** A nazywamy zdanie, które powstaje z A przez dopisanie do początku formuły A kwantyfikatorów ogólnych wiążących wszystkie wolne wystąpienia zmiennych w formule A.

7.2.2. APARAT DEDUKCYJNY DLA KRP.

Niech A(x) będzie formułą (niekoniecznie atomową) z jedną zmienną wolną; $a \in C$; $x \in V$;
$A, B \in FORM_{KRZ}$.

Aksjomaty:
1) Pierwszą grupę aksjomatów tworzą **domknięcia** wszystkich tautologii KRZ z tą jednak różnicą, że na miejscu zmiennych zdaniowych występują wyrażenia sensowne języka KRP.
2) $\forall xA(x) \rightarrow A(a)$.
   $A(a) \rightarrow \exists xA(x)$.

Reguły inferencji:

3) $\dfrac{A \to B, \quad A}{B}$ (Reguła Odrywania)

$\dfrac{B \longrightarrow A(a)}{B \longrightarrow \forall x A(x)}$ o ile parametr *a* nie występuje ani w B ani w A(x).

$\dfrac{A(a) \longrightarrow B}{\exists x A(x) \longrightarrow B}$ o ile parametr *a* nie występuje ani w B ani w A(x).

Ten system aksjomatyczny pochodzi od Smullyana i odpowiada przyjętej wersji języka KRP.

NAJWAZNIEJSZE TEZY KRP.

1. $\neg\exists x\ A(x) \equiv \forall x\ \neg A(x)$ prawo de Morgana
2. $\neg\forall x\ A(x) \equiv\ \exists x\ A(x)$ prawo de Morgana
3. $\exists x\ \forall y\ A(x,y) \to \forall y\ \exists x\ A(x,y)$
4. $\exists x\ [A(x) \vee B(x)] \equiv \exists x\ A(x) \vee \exists x\ B(x)$
5. $\exists x\ [A(x) \wedge B(x)] \to \exists x\ A(x) \wedge \exists x\ B(x)$
6. $\forall x\ [A(x) \wedge B(x)] \equiv \forall x\ A(x) \wedge \forall x\ B(x)$
7. $\forall x\ A(x) \vee \forall x\ B(x) \to \forall\ [A(x) \vee B(x)]$
8. $\forall x\ [A(x) \to B(x)] \to [\forall x\ A(x) \to \forall x\ B(x)]$
9. $\forall x\ [A(x) \equiv B(x)] \to [\forall x\ A(x) \equiv \forall x\ B(x)]$

• Założenie: funkcja zdaniowa A nie zawiera x jako zmiennej wolnej

1. $(\forall x\ B) \equiv B$
2. $\forall x\ [A(x) \vee B] \to \forall x\ A(x) \vee B$
3. $B \wedge \exists x\ A(x) \to \exists x\ [B \wedge A(x)]$
4. $[B \to \forall x\ A(x)] \to \forall x\ [B \to A(x)]$
5. $[B \to \exists x\ A(x)] \to \exists x\ [B \to A(x)]$
6. $[\exists x\ A(x) \to B] \to \forall x\ [A(x) \to B]$
7. $[\forall x\ A(x) \to B] \to \exists x\ [A(x) \to B]$

1. $\forall x\, [A(x) \to B(x)] \to [\forall x\, A(x) \to \forall x\, B(x)]$

2. $\forall x\, A(x) \to A(x)$

3. $\forall x \forall y\; A(x,y) \to \forall y \forall x\, A(x,y)$

4. $\forall x \forall y\; A(x,y) \to \forall x\, A(x,x)$ o ile A nie zawiera żadnego kwantyfikatora, który wiąże zmienną x i w którego zasięgu jest zmienna wolna y,

5. $A \to \forall x\, A$ o ile A nie zawiera zmiennej wolnej x,

6. $\forall x\, [A(x) \to B(x)] \to [\exists x\, A(x) \to \exists x\, B(x)]$

7. $A(x) \to \exists x\, A(x)$

8. $\exists x \exists y\, A\,(x,y) \to \exists y \exists x\, A(x,y)$

9. $\exists x\, A(x,x) \to \exists x \exists y\, A(x,y)$ o ile A nie zawiera żadnego kwantyfikatora, który wiąże zmienną x i w którego zasięgu znajdowałaby się zmienna wolna y

10. $\exists x\, A \to A$ o ile A nie zawiera zmiennej wolnej x

Tezy klasycznego rachunku kwantyfikatorów:

1. $(A \to \forall x\, B) \to [(\forall x\, B \to B) \to (A \to B)]$

2. $(\exists x\, A \to B) \to [(A \to \exists x\, A) \to (A \to B)]$

3. $A \to \exists x\, A$

dla dowolnych $A, B \in S_{PC}$

4. $\forall x\, A \equiv A$, gdy x nie jest wolne w A

5. $\exists x\, A \equiv A$, gdy x nie jest wolne w A

dla wszelkich $A \in S_{PC}$, $k \in N$

6. $\forall x_k\, [A \to B] \to [\forall x_k\, A \to \forall x_k\, B]$

7. $\forall x_k\, [A \to B] \to [\exists x_k\, A \to \exists x_k\, B]$

8. $\forall x_k\, [A \equiv B] \to [\forall x_k\, A \equiv \forall x_k\, B]$

9. $\forall x_k\, [A \equiv B] \to [\exists x_k\, A \equiv \exists x_k\, B]$

10. $\forall x_k\, [A \wedge B] \equiv [\forall x_k\, A \wedge \forall x_k\, B]$

11. $[\forall x_k\, A \vee \forall x_k\, B] \to \forall x_k\, [A \vee B]$

12. $\exists x_k\, [A \to B] \equiv [\forall x_k\, A \to \exists x_k\, B]$

13. $\exists x_k\, [A \wedge B] \to [\exists x_k\, A \wedge \exists x_k\, B]$

14. $\exists x_k\,[A \vee B] \equiv [\exists x_k\, A \vee \exists x_k\, B]$

dla każdego $k \in N$ i dla wszelkich $A, B \in S_{PC}$

15. $\forall x_k \forall x_s\, A \equiv \forall x_s \forall x_k\, A$

16. $\exists x_k \exists x_s\, A \equiv \exists x_s\, \exists x_k\, A$

17. $\exists x_k\, \forall x_s\, A \rightarrow \forall x_s\, \exists x_k\, A$

18. $\neg \forall x_k\, A \equiv \exists x_k\, \neg A$

19. $\neg \exists x_k\, A \equiv \forall x_k\, \neg A$

20. $\neg \exists x_k\, \neg A \equiv \forall x_k\, A$

21. $\neg \forall x_k\, \neg A \equiv \exists x_k\, A$

dla każdego $A \in S_{PC}$, $k,s \in N$

7.2.3. REGUŁY ROZKŁADU DLA FORMUŁ KRP.

Dla formuł KRP nie wystarczają dotychczasowe reguły rozkładu znane z KRZ typu α i β. W języku KRP pojawiają się jeszcze inne formuły złożone o postaci $\forall xA$, $\neg\exists xA$; $\neg\forall xA$, $\exists xA$. Dwie pierwsze nazywać będziemy formułami typu γ, zaś pozostałe dwie formułami typu δ. Potrzebować będziemy jeszcze dwóch dodatkowych reguł rozkładu dla tych formuł.

<table>
<tr><td>Reguły typu γ:</td><td>$\forall xA$
$[A]^x_a$</td><td>$\neg\exists xA$
$\neg[A]^x_a$</td><td>Notacja jednolita:
γ
$\gamma(a)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">gdzie parametr a jest dowolny</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Reguły typu δ:</td><td>$\neg\forall xA$
$\neg[A]^x_a$</td><td>$\exists xA$
$[A]^x_a$</td><td>Notacja jednolita:
δ
$\delta\,(a)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">gdzie parametr a jest nowy lub a) nie został wprowadzony za pomocą reguły typu δ; i b) nie występuje w formule δ do której stosuje się regułę; i c) żaden parametr formuły δ nie został wprowadzony za pomocą reguły typu δ.</td></tr>
</table>

UWAGA.

Zastrzeżenie odnośnie wprowadzania parametru w regule typu δ ma w tej postaci bardzo skomplikowany charakter. Można je radykalnie uprościć do zastrzeżenia: ***o ile parametr* a *jest nowy***. To prostsze zastrzeżenie (mniej liberalne) jest równoważne pierwszemu. Nie podaje się dowodu tego faktu gdyż wykracza to poza ramy niniejszego podręcznika. Powiemy jedynie, ze chodzi o ten głównie przypadek kiedy newralgiczny parametr został już w trakcie budowy drzewa wprowadzony za pomocą reguły typu γ. Wtedy zliberalizowana postać zastrzeżenia zezwala na użycie reguły typu δ, wersja zaostrzona natomiast nie zezwala na to. W niektórych przypadkach, jak np. przy budowie drzewa rozkładu, używanie reguły typu δ z zastrzeżeniem w zliberalizowanej wersji jest zdecydowanie bardziej korzystne. Jeśli zaś chodzi o dowody niektórych faktów czy twierdzeń, to korzystniej jest używać wersji krótszej zastrzeżenia i wymagać jedynie by parametr był nowy (np. w dowodzie twierdzenie o niesprzeczności dla KRP czy też w dowodzie warunków spełnialności $[S_4]$). Tak też będziemy obie formy zastrzeżenia stosować wedle uznania.

Reguły zapisane z użyciem formuł sygnowanych wyglądają następująco:

Reguły typu γ:			Notacja jednolita:
	$T\forall xA$ $T[A]^x_a$	$F\exists xA$ $F[A]^x_a$	γ $\gamma(a)$
gdzie parametr a jest dowolny			

Reguły typu δ:			Notacja jednolita:
	$T\exists xA$ $T[A]^x_a$	$F\forall xA$ $F[A]^x_a$	δ $\delta\ (a)$
gdzie parametr a jest nowy, lub nie został wprowadzony za pomocą reguły typu δ i nie występuje w formule δ do której stosuje się regułę i żaden parametr formuły δ nie został wprowadzony za pomocą reguły typu δ			

UWAGA.
Odpowiedniej zmianie musi ulec definicja tablicy analitycznej. W przypadku KRZ można było budować tablicę jedynie z użyciem reguł typu α oraz β. Obecnie tablicę analityczną można rozbudowywać za pomocą reguł α i β oraz reguł γ i δ. Podczas gdy w rachunku zdań budowa tablicy analitycznej musiała się skończyć po skończonej liczbie kroków, to w przypadku formuł KRP sytuacja jest inna. Tablica analityczna dla pewnej formuły może być nieskończona, choć będzie skończenie generowalna.

OPIS BUDOWY (KONSTRUKCJI) TABLICY ANALITYCZNEJ T **DLA FORMUŁ KRP (LUB SYGNOWANYCH FORMUŁ KRP).**

Uwaga wstępna: Jeśli jakaś formuła zostanie rozłożona (użyta) podczas budowy drzewa T, to zaznaczamy ten fakt stawiając z prawej strony rozłożonej formuły znak *.

1) Etap pierwszy. Jako przodka T umieścić formułę, której spełnialność badamy. Może to być w szczególności formuła $\neg$A (lub FA gdy posługujemy się formułami sygnowanymi), gdzie A jest formułą której tautologiczność chcemy stwierdzić.
2) Załóżmy, że ukończyliśmy budowę etapu n-tego drzewa T. Jeśli drzewo jest zamknięte lub wszystkie nieatomowe formuły na wszystkich gałęziach otwartych zostały rozłożone to kończymy budowę T. Jeśli jest inaczej to budujemy etap n+1-szy. Szukamy na drzewie T formuły A położonej najbliżej przodka drzewa, która nie została jeszcze rozłożona (bez znaku * z prawej strony). Jeśli na jednym poziomie jest więcej niż jedna nierozłożona formuła to bierzemy pierwszą z lewej. Rozkładamy A (i znaczymy z prawej jej strony znak *) do punktu końcowego każdej otwartej gałęzi G (przechodzącej przez formułę A) za pomocą jednej z następujących reguł:
   a) Jeśli A jest typu α, to rozszerzamy G do (G, α_1, α_2).
   b) Jeśli A jest typu β, to rozszerzamy G do dwóch gałęzi (G, β_1) i (G, β_2).
   c) Jeśli A jest typu δ i parametr a nie występował dotychczas na T, to rozszerzamy G do (G, δ(a)).
   d) Jeśli A jest typu γ, to bierzemy parametr a który nie pojawił się dotychczas na drzewie w formule γ(a) i rozszerzamy G do (G, γ(a), γ). Tutaj wymóg odnośnie parametru a nie jest ograniczeniem, polega na dołączając unikaniu zbędnych powtórzeń.[33]
3) Kontynuujemy procedurę w dalszym ciągu. Może ona się nie kończyć.

Niech A$\in$FORM$_{KRP}$. Tablica analityczna zbudowana według powyższego opisu dla formuły $\neg$A, tzn. $T_{\neg A}$ nazywać się będzie **systematyczną tablicą analityczną** lub **systematycznym drzewem rozkładu**.

Ściśle rzecz biorąc *systematyczna tablica analityczna* nie jest tablicą analityczną, gdyż przy budowie tablicy analitycznej nie ma reguły pozwalającej na powtarzanie formuły typu γ. Łatwo można jednak przekształcić *systematyczną tablicę analityczną* w zwykłą tablicę analityczną usuwając wszystkie niedozwolone powtórzenia formuł typu γ.

DOWÓD FORMUŁY KRP METODĄ TABLIC ANALITYCZNYCH :=
Dowodem formuły A języka KRP za pomocą metody tablic analitycznych dla KRP nazywamy zamknięte i systematyczne drzewo rozkładu dla $\neg$A (tzn. $T_{\neg A}$ o ile jest zamknięte).
Zbiór wszystkich formuł języka KRP mających dowód za pomocą tablic analitycznych dla KRP oznaczać będziemy symbolem Dow$_{TA\text{-}KRP}$.
Jeśli posługujemy się formułami sygnowanymi to dowodem formuły A nazywamy zamknięte systematyczne drzewo rozkładu dla FA (tzn. T_{FA} o ile jest zamknięte).

Formuły KRP mające dowód za pomocą metody tablic nazywamy **dowiedlnymi**.

[33] Prawdę powiedziawszy chodzi o to również, żeby drzewo nie stało się nieskończone z powodów trywialnych.

7.2.4. SEMANTYKA DLA KRP.

Semantyka jak wiadomo ustala zależności pomiędzy językiem a światem. Podstawowym pojęciem semantycznym jest pojęcie prawdy. Pojęcie prawdy logicznej (dokładniej dla języków nauk dedukcyjnych) zostało po raz pierwszy poprawnie zdefiniowane i opublikowane w 1933 roku przez Alfreda Tarskiego w słynnej pracy *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych.*

Wprowadzimy pomocnicze pojęcie U-formuły. Niech będzie ustalone uniwersum U będące zbiorem niepustym. U-formułą nazywać będziemy obiekt, który konstruuje się tak jak zwykłą formułę KRP z jednym wyjątkiem: w U-formułach nie występują parametry lecz na ich miejscu występują elementy uniwersum U. Symbolem $FORM_U$ oznaczmy zbiór wszystkich U-zdań.

WARTOŚCIOWANIE 1. RZĘDU := jest to funkcja v: $FORM_U \rightarrow \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ spełniająca warunki;

1)	v jest wartościowaniem boolowskim określonym na $FORM_U$.
2)	$v(\forall xA) = \mathbf{1}$ wtw dla każdego $k \in U$, $v([A]^x_k) = \mathbf{1}$.
3)	$v(\exists xA) = \mathbf{1}$ wtw dla pewnego $k \in U$, $v([A]^x_k) = \mathbf{1}$.

Aby uczynić definicję wartościowania 1. rzędu całkiem operacyjną należy określić kiedy atomowe U-zdania (czyli atomowe U-formuły bez zmiennych wolnych) są prawdziwe. Do tego potrzebne jest pojęcie interpretacji.

INTERPRETACJA I **W UNIWERSUM** U := interpretacja I w uniwersum U zbioru wszystkich czystych formuł KRP jest funkcją przyporządkowującą każdemu n-argumentowemu predykatowi P n-argumentową relację P* określoną w uniwersum U (tzn. $P^* \subset U^n$).

Atomowe U-zdanie $Pk_1...k_n$ nazywać się będzie **prawdziwym przy interpretacji** I **w uniwersum** U wtw uporządkowana n-tka $<k_1, ..., k_n> \in P^*$ (oczywiście I(P)=P*).

Sprawa prawdziwości dowolnej formuły KRP przedstawia się teraz tak, że jeśli jest dana interpretacja I przy ustalonym uniwersum U, to można wyznaczyć wartości logiczne atomowych U-zdań, co z kolei prowadzi do wyznaczenia tylko jednego wartościowania 1. rzędu i w konsekwencji do wyznaczenia wartości badanej formuły. Jeśli zaś dane są wartości logiczne atomowych U-zdań, to można wyznaczyć interpretację I i również wyznaczyć wartość logiczną badanej formuły.

WARUNKI PRAWDZIWOŚCI DLA FORMUŁ ZŁOŻONYCH KRP := dla dowolnej interpretacji I w uniwersum U:

[W_1] Formuła typu α jest prawdziwa wtw α_1 i α_2 są prawdziwe.

[W_2] Formuła typu β jest prawdziwa wtw β_1 jest prawdziwa lub β_2 jest prawdziwa.

[W_3] Formuła typu γ jest prawdziwa wtw formuła $\gamma(k)$ jest prawdziwa dla każdego $k \in U$.

$[W_4]$ Formuła typu δ jest prawdziwa wtw formuła $\delta(k)$ jest prawdziwa dla pewnego $k \in U$.

Niech A będzie formułą czystą. Formuła czysta nazywa się **tautologią 1. rzędu** wtw A jest prawdziwa dla dowolnej interpretacji w dowolnym uniwersum .

Formuła czysta (bez parametrów i elementów uniwersum) nazywa się **tautologią 1. rzędu** wtw dla dowolnego uniwersum U, dla każdego wartościowania 1. rzędu formuła przyjmuje wartość logiczną prawdy.

Symbolem $TAUT_{KRP}$ oznaczać będziemy zbiór wszystkich tautologii 1. rzędu.

Równoważność powyższych dwóch określeń tautologii 1. rzędu uzasadniają rozważania na temat odpowiedniości pomiędzy interpretacjami a wartościowaniami 1. rzędu. W języku polskim termin *tautologia 1. rzędu* nie jest powszechny. Używa się również określenia *tautologia rachunku predykatów*, *zdanie logicznie prawdziwe* i inne. Terminy te odpowiadają angielskiemu terminowi *valid formula*. Należy zauważyć, że istnieją formuły KRP które są tautologiami 1. rzędu z tego powodu tylko iż są podstawieniami tautologii KRZ i domknięte za pomocą kwantyfikatorów ogólnych (tak jak to zostało opisane wcześniej). Wśród tautologii KRP są jednak takie które nie są podstawieniami jakiejś tautologii KRZ jak np. $\forall x(Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\forall xPx \rightarrow \forall xQx)$.

Formuła czysta (bez parametrów i elementów uniwersum) KRP nazywa się **spełnialna 1. rzędu** gdy jest prawdziwa dla pewnej interpretacji (pewnego wartościowania 1. rzędu) w pewnym uniwersum.

Zbiór X formuł czystych KRP nazywa się **spełnialny 1. rzędu** gdy wszystkie formuły należące do X są równocześnie prawdziwe dla pewnej interpretacji (w pewnym uniwersum). W skrócie będzie się używać zwrotu ‘spełnialny’ w odniesieniu do formuł czy też zbiorów formuł jako skrót dla ‘spełnialny 1. rzędu’.[34]

WARUNKI SPEŁNIALNOŚCI ZBIORU FORMUŁ KRP (z parametrami) := X jest zbiorem formuł z parametrami, ale bez obiektów z uniwersum;

$[S_1]$ Jeśli X jest spełnialny (1. rzędu) i $\alpha \in X$, to zbiór $X \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ jest spełnialny.

$[S_2]$ Jeśli X jest spełnialny i $\beta \in X$, to co najmniej jeden ze zbiorów $X \cup \{\beta_1\}$, $X \cup \{\beta_2\}$ jest spełnialny.

$[S_3]$ Jeśli X jest spełnialny i $\gamma \in X$, to dla każdego parametru a zbiór $X \cup \{\gamma(a)\}$ jest spełnialny.

$[S_4]$ Jeśli X jest spełnialny i $\delta \in X$ i jeśli parametr a nie występuje w żadnej z formuł zbioru X, to $X \cup \{\delta(a)\}$ jest również spełnialny.

Warunki te, tak samo jak poprzednio wymienione warunki prawdziwości wymagają dowodu. Zostawiamy sobie te dowody na ‘lepsze czasy’ (tzn. w dalszych redakcjach skryptu zostanie to uzupełnione) lub dla wyjątkowo zdolnych studentów. Należy jednak wspomnieć, ze właściwie obecnie nie ma możliwości dowodu tych własności z tego powodu, ze nie zostało explicite zdefiniowane pojęcie prawdziwości dla formuł z parametrami. Niech zostaną zatem na razie przyjęte bez dowodu.

[34] Ta ostatnia umowa odnosić się będzie tylko do tej części skryptu, gdzie omawia się logikę 1. rzędu.

7.2.5. NIEKTÓRE METALOGICZNE WŁASNOŚCI KRP.

TWIERDZENIE O NIESPRZECZNOŚCI.

Niech A będzie zdaniem (czystym)[35] KRP:

$$A \in Dow_{TA\text{-}KRP} \;\Rightarrow\; A \in TAUT_{KRP}$$

Dowód:

Zał. $A \in Dow_{TA\text{-}KRP}$.

1) Z założenia systematyczne drzewo $T_{\neg A}$ zostanie zamknięte.
2) Z własności $[S_1]$-$[S_4]$ widać (przez kontrapozycję), że jeśli $T_{\neg A}$ zostanie zamknięte, to przzodek drzewa jest niespełnialny; czyli nie istnieje wartościowanie 1. rzędu dla którego $v(\neg A)=\mathbf{1}$. Gdyby istniało takie wartościowanie v, to $v(A)=\mathbf{0}$, a wtedy formuła A nie byłaby tautologią 1. rzędu.

Definicja zbioru Hintikki dla formuł sygnowanych i niesygnowanych.

ZBIÓR HINTIKKI DLA FORMUŁ KRP (dla U-formuł) := zbiór U-formuł X nazywa się zbiorem Hintikki gdy dla dowolnych formuł typu α, β, γ, $\delta \in FORM_U$ (zamknięte U-formuły czyli U-zdania) zachodzą warunki:

$[H_0]$ Żadna formuła atomowa z $FORM_U$ i jej negacja (lub formuła A języka KRP sygnowana równocześnie sygnaturą T oraz F) nie należą do X.

$[H_1]$ $\alpha \in X \;\Rightarrow\; \alpha_1, \alpha_2 \in X$.

$[H_2]$ $\beta \in X \;\Rightarrow\; \beta_1 \in X$ lub $\beta_2 \in X$.

$[H_3]$ $\gamma \in X \;\Rightarrow\;$ dla dowolnego $k \in U$, $\gamma(k) \in X$.

$[H_4]$ $\delta \in X \;\Rightarrow\;$ dla co najmniej jednego $k \in U$, $\delta(k) \in X$.

LEMAT HINTIKKI DLA LOGIKI PIERWSZEGO RZĘDU (formuły sygnowane) **:=**

Dla dowolnego zbioru $X \subset FORM_U$ i dowolnego uniwersum U, zbiór formuł X będący zbiorem Hintikki jest spełnialny w U.

Dowód:

1) Należy znaleźć wartościowanie v, że dla dowolnego $A \in X$; formuła A jest prawdziwa dla wartościowania v.
2) Niech $Pd_1d_2...d_n$ będzie atomowym U-zdaniem, wtedy $v(Pd_1d_2...d_n)=\mathbf{1}$, gdy $TPd_1d_2...d_n \in X$; $v(Pd_1d_2...d_n)=\mathbf{0}$, gdy $FPd_1d_2...d_n \in X$; oraz $v(Pd_1d_2...d_n)=\mathbf{1}$, gdy $TPd_1d_2...d_n, FPd_1d_2...d_n \notin X$.
3) Załóżmy dla dowodu indukcyjnego, że lemat zachodzi dla wszystkich formuł krótszych od pewnego ustalonego n. Jeśli formuła o długości n ma postać α oraz β, to dowód jest podobny do dowodu lematu Hintikki dla KRZ.
4) Zostanie teraz dowiedzione, że lemat zachodzi jeśli formuła o długości n jest typu γ lub δ. Niech $\gamma \in X$; wtedy $\gamma(k)$ dla dowolnego k jest krótsza od γ i dla niej zachodzi lemat na mocy założenia indukcyjnego. Istnieje zatem takie wartościowanie 1. rzędu (i uniwersum U) v dla którego γ jest prawdziwa. Z $[W_3]$ wynika, iż γ musi

[35] Proszę zwrócić uwagę na to, że mamy do czynienia ze zdaniami. W przypadku KRZ nie odróżnialiśmy pomiędzy zdaniem a formułą.

być prawdziwa dla v. Jeśli formuła ma postać δ, to $\delta(k)$ jest krótsza od δ, jest prawdziwa dla pewnego wartościowania 1. rzędu i należy do zbioru Hintikki X. Na mocy warunku $[W_4]$ formuła δ jest prawdziwa.

Systematyczną tablicą analityczną nazywać będziemy **ukończoną** gdy jest nieskończonej długości lub skończonej ale wszystkie formuły (które były do rozłożenia) zostały rozłożone.

LEMAT O UKOŃCZONYCH TABLICACH ANALITYCZNYCH. (formuły sygnowane)
Jeśli G jest otwartą gałęzią ukończonej, systematycznej tablicy analitycznej, to G jest zbiorem Hintikki.

Dowód:
Zał. G jest otwartą gałęzią ukończonej, systematycznej tablicy analitycznej.
Chcemy wykazać, że G spełnia warunki $[H_0]$-$[H_4]$. $[H_0]$ jest spełnione, bo G jest otwarta. Pozostałe warunki są spełnione na mocy systematyczności tablicy analitycznej.

LEMAT O SPELNIALNOŚCI. (formuły sygnowane)
Niech T będzie ukończoną, systematyczną tablicą analityczną; wtedy dowolna otwarta gałąź G drzewa T jest spełnialna.

Dowód:
Z lematu Hintikki i lematu o ukończonych tablicach analitycznych.

TWIERDZENIE O PEŁNOŚCI DLA KRP. (formuły sygnowane)

$$A \in TAUT_{KRP} \Rightarrow A \in Dow_{TA\text{-}KRP}$$

Dowód:
Zał. $A \in TAUT_{KRP}$.
Niech T_{FA} będzie ukończoną, systematyczną tablicą analityczną dla A. Jeśliby tablica T_{FA} nie była zamknięta, to miałaby otwartą gałąź G. Gałąź G byłaby zbiorem Hintikki na mocy lematu o ukończonych tablicach analitycznych i na mocy lematu Hintikki byłaby spełnialna. Wtedy FA byłoby prawdziwe dla pewnego wartościowania 1. rzędu v, co daje v(A)=**0**. Sprzeczność z założeniem.