GÖDEL A TEZA CHURCHA

Można być pewnym, że jeśli aktualnie istnieje Pan Bóg, to Gödel ma z nim bezpośredni kontakt. Jak pisze R. Murawski[1], słowa powyższe wypowiedział Andrzej Mostowski podczas wykładu 12.10.1973 roku, a zatem jeszcze za życia Gödla.[2] Ciekawe, co miał Mostowski na myśli, wypowiadając takie słowa? Można jedynie spekulować, ale chyba pierwszą narzucającą się myślą jest ta, że chciał w ten sposób podkreślić wnikliwość i nieomylność intuicji Gödla. Wydaje się, że chciał również wskazać nadzwyczajność austriackiego logika, sam przy tym będąc wybitnym logikiem. Wypowiedź ta pokazuje także, iż Gödel cieszył się wielkim autorytetem w środowisku logików. Z jego opiniami się liczono, a często wyznaczały one kierunki rozwoju logiki ubiegłego stulecia. W niniejszym artykule, chciałbym zapoznać polskiego czytelnika z opinią Gödla na temat tego, co zwiemy dzisiaj Tezą Churcha (w skrócie TC).[3]

1. W tej części artykułu przedstawimy krótko sformułowanie i historię TC. Alonzo Church (1903-1995) od momentu, jak wspominają jego uczniowie Kleene i Rosser, zbudowania tzw. lambda-rachunku i zbadania jego własności, zastanawiał się nad potrzebą zdefiniowania intuicyjnego pojęcia *efektywnej obliczalności*. Świadczy to chyba o dużej kulturze i wrażliwości filozoficznej tego logika i matematyka. Kiedy zostało w Princeton dowiedzione, przez Churcha, Kleenego i Rossera, że klasy funkcji lambda-definiowalnych i ogólnie rekurencyjnych są identyczne, Church sformułował swą tezę w następującej postaci:

(TC) *Jak się okaże, definicja efektywnej obliczalności może być podana w każdej z dwóch następujących i równoważnych form:*
(1) że dowolna funkcja liczb naturalnych będzie nazwana efektywnie obliczalną , jeśli jest lambda-definiowalną ...,
(2) że dowolna funkcja liczb naturalnych będzie nazwana efektywnie obliczalną, jeśli jest [ogólnie] rekurencyjną ... .[4]

Pierwsze sformułowanie TC zostało dokonane w abstrakcie skierowanym do *American Mathematical Society,* noszącym datę **22.03.1935.** Oficjalnie TC opublikowana została w artykule ***An unsolvable problem of elementary number theory***[5]. W tej właśnie pracy, wspomina Church (w przypisie 18) o tym, iż pytanie o relację pomiędzy efektywną obliczalnością i rekurencyjnością zostało postawione przez Gödla w rozmowie z nim. Pytanie o relację pomiędzy efektywną obliczalnością, a lambda-definiowalnością zostało postawione niezależnie przez Churcha. Gödel był zainteresowany relacją pomiędzy efektywną obliczalnością, a rekurencyjnością z tego powodu, że to drugie pojęcie pochodziło od niego. Termin *rekursiv* pojawia się w

---

[1] R. Murawski, *Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki*, UAM, Poznań 1990; motto książki.
[2] Przypominam, że Kurt Gödel żył w latach 1906-1978.
[3] Nazwa Teza Churcha pochodzi od S. C. Kleene'ego z następujących publikacji: *Recursive predicates and quantifiers*, Transactions of the American Mathematical Society, 53 (1943), ss. 41-73; *Introduction to Metamathematics*, Amsterdam 1952, rozdział XII; zobacz również: *Origins of Recursive Function Theory*, Annals of the History of Computing, vol.3, nr.1 (1981), s. 59.
[4] Church ujmował swą tezę raczej w terminach definicji pojęć. Jego teza miała być definicją pojęcia *efektywnej obliczalności*. To powyższe sformułowanie jest cytatem z artykułu Churcha (zob. następny przypis), choć występuje w literaturze wiele wersji równoważnych. Często TC formułuje się jako identyczność ekstensji dwóch pojęć. Wszystkie tłumaczenia tekstów obcojęzycznych pochodzą ode mnie.
[5] Opublikowane w: The American Journal of Mathematics, vol. 58 (1936), ss. 345-363.

najsłynniejszej pracy Gödla dotyczącej niezupełności arytmetyki liczb naturalnych.[6] W odniesieniu jednak do funkcji znaczyło to, co znaczy dzisiaj termin *pierwotnie rekurencyjny*. Dopiero podczas swych wykładów w Princeton, zdefiniował Gödel obszerniejszą klasę funkcji, idąc za pewnymi sugestiami J. Herbranda, które zwiemy dzisiaj *funkcjami rekurencyjnymi*.[7] Kiedy M. Davis przygotowywał swój słynny wybór najważniejszych prac na temat rozstrzygalności, jako drugi w kolejności artykuł umieścił (spisaną przez Kleenego i Rossera) wersję wykładów Gödla z Princeton (1934). Gödel dodał do pierwszego wydania wykładów przypis trzeci, który brzmi:

Odwrotność tego[8] wydaje się być również prawdziwa, jeśli oprócz [pierwotnej][9] rekursji ... dodana zostanie rekursja o innej postaci (np. względem dwóch zmiennych równocześnie). Nie może to zostać dowiedzione, ponieważ pojęcie skończonego obliczania nie jest zdefiniowane, ale może służyć jako zasada heurystyczna.[10]

Miejsce to zostało przez Davisa zrozumiane, jako pewne sformułowanie TC. W prywatnej korespondencji Gödel odciął się zdecydowanie od takiego rozumienia:

... i nie jest prawdą, że przypis 3 jest sformułowaniem Tezy Churcha. Wyrażone tam przybliżenie odnosi się jedynie do równoważności 'skończonej procedury (obliczania)' i 'procedury rekurencyjnej'. Ja sam, w czasie tych wykładów, nie byłem wcale przekonany, że moje pojęcie rekursji zawiera wszystkie możliwe rekursje;...[11]

Church opisał, wspomnianą powyżej, dyskusję z Gödlem na temat definicji *efektywnej obliczalności* w liście do Kleenego z dnia 29.11.1935:

Jeśli chodzi o Gödla, i pojęcia: rekurencyjności i efektywnej obliczalności, to historia jest następująca. W dyskusji z nim, na temat lambda-definiowalności, okazało się, że nie ma dobrej definicji efektywnej obliczalności. Moją propozycją, że lambda-definiowalność mogłaby służyć za taką definicję, uznał Gödel za całkowicie niesatysfakcjonującą (thoroughly unsatisfactory). [...] Jego jedyną ideą w tym czasie była ta, że możliwe byłoby, przyjmując efektywną obliczalność za pojęcie pierwotne, przyjąć zbiór aksjomatów, które wyrażałyby ogólnie przyjęte własności tego pojęcia, i zrobienie czegoś na takiej bazie. Później ewidentnie zdał sobie sprawę z tego, że Herbranda definicja rekurencyjności [...] może zostać zmodyfikowana w kierunku efektywnej obliczalności i taka propozycję podał w swoich wykładach. W tym czasie stawiał pytanie o związek pomiędzy rekurencyjnością, w tym nowym sensie, a efektywną obliczalnością. Powiedział jednak, że nie uważa, iż te dwie idee mogłyby być w sposób satysfakcjonujący zidentyfikowane - 'jednie heurystycznie'.[12]

---

6 K. Gödel, *Ueber formal unetscheindbare Saetze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, Monatshefte fuer Mathematik und Physik, 38 (1931), ss. 173-198.

7 Definicja tej klasy funkcji nazywa się w literaturze definicją Herbranda-Gödla. Zob. na przykład: A. Kościelski, *Teoria obliczeń*, Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego 1997, ss. 48-71.

8 Tzn., że funkcje rekurencyjne mają tą ważną własność, iż dla dowolnego ustalonego argumentu wartość funkcji może być obliczona za pomocą skończonej procedury.

9 Słowo *pierwotnej* należy dodać, aby dobrze rozumieć wypowiedź Gödla. Por. M. Davis, *Why Gödel Didn't Have Church's Thesis*, Information and Control, 34 (1982), ss. 5-6.

10 *The Undecidable*, M. Davis (ed.), Raven Press, New York 1965, s. 44. Przypis ten został w antologii Davisa włączony do tekstu. W pierwszym wydaniu tej pracy przypis ten został przez Gödla dopisany w tzw. 'notes and errata'. Już po przygotowaniu antologii do druku Gödel zgłosił korekcję tego przypisu: *{to stwierdzenie jest nieaktualne; zobacz 'Postscript'.}*; por. M. Davis, *The Undecidable*, s. 74.

11 M. Davis, *Why Gödel Didn't ...*, s. 8.

12 M. Davis, *Why Gödel Didn't ...*, s. 9.

Można chyba stwierdzić na podstawie powyższych tekstów, że stanowisko Gödla odnośnie TC było, w tym okresie, bardzo ostrożne. Koresponduje to chyba dość dobrze z osobowością Gödla. Jak wspominają niektórzy logicy, był on człowiekiem bardzo oszczędnym w słowach i w formułowaniu ostatecznych opinii. Dyskusja, o której wspomina Church, zdziwiła Davisa; nie swym przedmiotem, lecz tym, że się w ogóle odbyła.[13]

2. W poglądach Gödla na TC nastąpiła zmiana, kiedy zapoznał się z analizami A. Turinga tyczącymi procesu obliczania. Turing, jak uważał Kleene, w przeciwieństwie np. do E. Posta (czy J. Pepisa[14]), działał całkowicie niezależnie od grupy Princeton.[15] Praca Turinga z 1936 roku zatytułowana *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem*[16] zawiera intuicyjną (dokładniej odwołującą się do intuicji) analizę procesu obliczania przez człowieka.[17] Była ona przekonywująca dla Gödla, który w 'Postscriptum' do publikacji swych wykładów z Princeton, w antologii Davisa, pisze:[18]

W konsekwencji późniejszych osiągnięć, w szczególności wyniku, który zawdzięczamy pracy A. M. Turinga, może zostać obecnie podana precyzyjna i adekwatna definicja ogólnego pojęcia systemu formalnego. Istnienie nierozstrzygalnych zdań arytmetyki i niemożliwości dowiedlności niesprzeczności w tym samym systemie mogą zostać ściśle dowiedzione, dla <u>*każdego*</u> *niesprzecznego systemu formalnego zawierającego pewien fragment skończonej (finitary) teorii liczb.*
Praca Turinga daje analizę 'mechanicznej procedury' (alias 'algorytmu' lub 'procedury obliczania' lub 'skończonej procedury obliczania'). To pojęcie okazało się być równoważne z pojęciem 'maszyny Turinga'. [...] (Należy zauważyć, że pytanie o to czy istnieją skończone <u>*nie-mechaniczne*</u> *procedury*[19] *nierównoważne żadnemu algorytmowi, nie ma nic do adekwatności definicji 'systemu formalnego' ani 'mechanicznej procedury').*[20]

Wydaje się, że Gödel w tym fragmencie wyraża przekonanie, iż analiza Turinga jest poprawna, a co za tym idzie, Gödel w tym czasie uznawał TC. To, że był przekonany co do adekwatności tej analizy, wyraża choćby w swym liście do Kreisla z 01.05.1968:

But I was completely convinced only by Turing's paper.[21]

---

[13] W podobnym tonie wypowiadał się S. Feferman, w czasie wykładu wygłoszonego przed kilku laty na Uniwersytecie Jagiellońskim. Przedmiotem wykładu było, między innymi, porównanie Gödla z Tarskim.
[14] Polski logik z okresu miedzywojennego, działający we Lwowie. Korespondował z Churchem. Praca doktorska na temat nierozstrzygalności węższego rachunku predykatów, opublikowana w 1937 roku we Lwowie. Promotorem był E. Żyliński, zaś referentami (recenzentami?) S. Banach i L. Chwistek.
[15] Zob. *Reminiscences of Logicians*, (rep. by J. N. Crossley), w: *Lecture Notes in Mathematics* 450, Springer-Verlag, New York/Berlin 1975, ss. 6-7; również: M. Davis, *Why Gödel Didn't ...*, s. 14.
[16] W: Proceedings of the London Mathematical Society, ser. 2, vol. 42 (1936-7), ss. 230-265; przedruk w antologii M. Davisa, *The Undecidable*, ss. 116-151, do tej publikacji pracy Turinga będą się odnosiły numery stron.
[17] Turing, *On Computable ...*, ss. 135-140.
[18] Data napisania 'Postscriptum' to 03.06.1964.
[19] Tutaj Gödel daje przypis: *I.e. takie, które wymagają użycia abstrakcyjnych terminów (terms) w zależności od ich znaczenia. Zob. mój artykuł w* <u>*Dialectica*</u>*, 12 (1958), s. 280.*
[20] M. Davis (ed.), *The Undecidable*, s. 71-72.
[21] Cytuję za: R. I. Soare, *Computability and Recursion*, The Bulletin of Symbolic Logic, vol. 2, nr. 3 (1996), s. 295. Po polsku: *Ja zostałem całkowicie przekonany dopiero artykułem Turinga.*

Formalizacja pojęcia obliczalności, dokonana przez Turinga okazała się być równoważna formalizacji Churcha, Herbranda-Gödla, Kleenego i Posta. Można pytać o to, co ostatecznie przekonało Gödla w argumentacji Turinga. Davis, w cytowanym artykule o Gödlu i TC sugeruje, że Turing, odwołując się do intuicji, zrealizował właściwie ówczesny zamiar Gödla zaksjomatyzowania pojęcia obliczalności. Aksjomaty miały wyrażać 'oczywiste' własności pojęcia obliczalności (zob. wyżej).

Ciekawym jest to, że już w 1935 roku Gödel, w referacie wygłoszonym w Wiedniu, poczynił pewne spostrzeżenia odnośnie funkcji obliczalnych (rechenbar) w pewnym systemie formalnym.[22] Pojęcie *funkcje obliczalne*, w taki sposób zostało scharakteryzowane w pewnym systemie formalnym *S*:

... funkcja $\varphi(x)$ może być nazwana obliczalną w S, jeśli każdemu liczebnikowi m odpowiada liczebnik n taki, że $\varphi(m) = n$ jest dowiedlne w S. W szczególności, np. wszystkie rekurencyjnie (recursively) zdefiniowane funkcje są obliczalne w klasycznej arytmetyce (i.e. w systemie S_1 ciągu systemów zdefiniowanego poniżej).[23]

Zgodnie z koncepcją Gödla dysponujemy pozaskończonym ciągiem, coraz to silniejszych systemów formalnych S_i, gdzie $1 \leq i$. Pojęcie obliczalności funkcji jest absolutne w następującym sensie:

Można pokazać, że funkcja, która jest obliczalna w którymś z systemów S_i lub nawet w systemie pozaskończonego typu, jest ona już obliczalna w S_1.[ten pierwszy system zawiera na przykład arytmetykę Peano (A.O.)] *Tak więc pojęcie 'obliczalność' jest w pewnym określonym sensie 'absolutne', podczas gdy praktycznie wszystkie inne znane metamatematyczne pojęcia (np. dowiedlność, definiowalność, etc.) zależą istotnie od systemu, w którym zostały zdefiniowane (with respect to which they are defined).*[24]

Z powyższym fragmentem koresponduje ta oto znana wypowiedź Gödla:

Tarski podkreślił w swoim wykładzie (i myślę, że słusznie) wielką wagę pojęcia ogólnej rekurencyjności (lub obliczalności w sensie Turinga). Mnie się wydaje, że ta ważność pochodzi głównie stąd, że po raz pierwszy udało się podanie absolutnej definicji pewnego interesującego, epistemologicznego pojęcia, i.e. niezależnej od wybranego formalizmu. We wszystkich innych dotychczasowych przypadkach, takich jak dowiedlność lub definiowalność, można je było zdefiniować tylko relatywnie względem danego języka, i dla każdego konkretnego języka jest jasnym, że taka definicja nie jest tą o jaką nam chodzi. W wypadku obliczalności jednakże, chociaż jest ona zaledwie specjalnym rodzajem dowiedlności lub rozstrzygalności, sytuacja jest inna. Dzięki rodzajowi cudu, nie jest koniecznym rozróżnianie typów (orders), a procedura przekątniowa nie wyprowadza poza definiowane pojęcie.[25]

---

[22] *Ueber die Laenge der Beweise*, Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums, heft 7 (1936), ss. 23-24; przedruk w: M. Davis, *The Undecidable*, ss. 82-83.
[23] M. Davis, *The Undecidable*, s. 82.
[24] M. Davis, *The Undecidable*, s. 83.
[25] K. Gödel, *Remarks before the Princeton Bicentennial Conference on Problems in Mathematics*, w: M. Davis, *The Undecidable*, s. 84.

W tym miejscu warto zauważyć, że Gödel bardzo rzadko używał określenia *funkcje rekurencyjne*. Szczególnie od momentu zapoznania się z analizą Turinga. Oto relacja pewnego zdarzenia:

Podczas dyskusji z Gödlem w Institute for Advanced Study w Princeton, kiedyś w latach 1952-54, Martin Davis od niechcenia (casually) użył terminu 'teoria funkcji rekurencyjnych' jak to było wtedy używane. Davis opowiadał; 'Ku mojemu zdumieniu Gödel zareagował ostro mówiąc, że ten termin powinien być używany w stosunku do dzieła, które dokonała Rozsa Peter.'[26]

Jest jeszcze jeden wątek związany z Gödlem bezpośrednio, zaś pośrednio z TC. A. Turing w swej pracy z 1936 roku (ss. 135-138) podaje argument za tym, że procedury umysłowe nie mogą doprowadzić dalej, niż procedury mechaniczne. Argumentacje swą opiera na założeniu, które uzasadnia topologicznie, iż umysł człowieka może mieć jedynie skończoną liczbę tzw. stanów wewnętrznych. Gödel sprzeciwiał się temu twierdząc, iż procedury umysłowe są bogatsze od procedur mechanicznych. *Umysł, w jego użyciu, nie jest statyczny, lecz dynamiczny[27].* Według niego, choć na każdym etapie rozwoju umysł dysponuje jedynie skończoną ilością stanów wewnętrznych, to jednak może owa ilość zmierzać do nieskończoności. W dyskusji z H. Wangiem Gödel miał sformułować dwa założenia, przy których argument Turinga działa: pierwsze, że umysł człowieka nie może istnieć bez materii; drugie, że zasadniczo mózg funkcjonuje jak komputer cyfrowy.[28] Pierwsze z założeń Gödel uważał ponoć za przesąd naszych czasów, który zostanie naukowo odrzucony.

W 25-tym Josiah Willard Gibbs Lecture wygłoszonym 26.12.1951 roku Gödel umieścił dwa twierdzenia:[29]

a) *Niekompletność, niewyczerpywalność (incompletability, inexhaustibility) matematyki - Umysł człowieka nie jest w stanie sformalizować całej swej matematycznej intuicji* (reguły inferencji według Gödla miały charakter konstruktywistyczny). W formie komentarza powiemy, że wobec tego, być może TC jest takim właśnie przypadkiem?

b) *Albo umysł człowieka przekracza możliwości wszystkich maszyn, albo istnieją teorioliczbowe zagadnienia nierozstrzygalne przez umysł*. Być może wtedy TC, albo nie byłaby formalizowalna (matematyzowalna), albo jest nierozstrzygalna przez umysł.

3. W ostatniej części artykułu chciałbym rozważyć pewne szczegółowe zagadnienie. Jak widać z powyższego przedstawienia, zarówno twórca TC – Church (explicite), Turing, jak i Gödel (implicite), uważali TC za definicję. Możliwe są inne rozumienia TC: jako tezy właśnie, czyli stwierdzenia o na pół matematycznym, na pół filozoficznym charakterze[30]; jako twierdzenia empirycznego[31]; jako roboczej

---

[26] R. I Soare, *Computability and ...*, ss. 307-308.

[27] Por. H. Wang, *From Mathematics to Philosophy*, Routledge & Kegan Paul, London 1974, ss. 324-326; ten cytat dokładnie s. 325. Tekst tam przytoczony przez Wanga pochodzi prawdopodobnie z korespondencji z Gödlem.

[28] Zob. H. Wang, *From Mathematics to ...*, ss. 325-326. W pewien naturalny sposób nasuwa się tutaj pytanie o to, czy Gödel był człowiekiem wierzącym. Nie znam odpowiedzi na to pytanie, wiem jednak, że istnieje jego dowód na istnienie Boga, oparty na dowodzie św. Anzelma.

[29] Zob. H. Wang, *From Mathematics to ...*, ss. 324-325; K. Gödel, *Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications,* w: *Collected Works. Vol.III. Unpublished essays and lectures,* (ed.) S. Feferman, Oxford University Press 1995, ss. 302-321.

[30] Tak uważał prawdopodobnie Kleene. Obecnie można mówić o 'tezach', jako o zjawisku.

[31] Tak uważał na przykład J. Pepis, *O zagadnieniu rozstrzygalności w zakresie węższego rachunku funkcyjnego*, Lwów 1937, s. 169.

hipotezy lub prawa natury[32]. Jeśli jednak przyjmiemy, że TC jest definicją, to pytamy: jakiego rodzaju definicją?

Bardzo ściśle z tym problemem, związane jest zagadnienie formalizacji intuicyjnych pojęć. Tego właśnie przykładem jest TC i jako taka, wymaga usprawiedliwienia. Jeśli bowiem przyjmiemy, że TC jest prawdziwa?, (trafna?), to istnieje intuicyjne pojęcie, którego formalna charakterystyka wyczerpuje treść?, (znaczenie?), jakie ono w języku potocznym posiada. Jeśli jest to możliwe w jednym przypadku, to być może jest też możliwe w innych przypadkach. Wprawdzie Gödel mówił o rodzaju cudu w tym przypadku, ale w swym artykule *O długości dowodów* zarysował jakby program podobnych definicji dla dowiedlności i definiowalności. Należy rozważyć, czy coś takiego jest w ogólnym przypadku możliwe. *Jeśli mamy na początku niewyraźne (vague), intuicyjne pojęcie, jak możemy znaleźć ostre pojęcie, które mu wiernie odpowiada?* – pytał Gödel.[33] Odpowiedź Gödla jest bardzo prosta, a nawet trywialna. Uważał mianowicie, że pojęcie to (tzn. efektywnie obliczalnej funkcji) było zawsze ostre, ale myśmy go takim jedynie nie postrzegali. Gödel zauważa daleko idące podobieństwo pomiędzy postrzeganiem zmysłowym, a umysłowym. Różnica leży głównie w tym, że to pierwsze jest mniej bezpośrednie, niż to drugie. TC, była dla Gödla argumentem za swoistym optymizmem teoriopoznawczym i realizmem (w sensie platońskim). Zwrot: *próbować zobaczyć (i.e. zrozumieć) jakieś pojęcie jasno*, jest precyzyjniejszym oddaniem zwrotu: *zdaniem sprawy z tego co rozumiemy przez jakieś słowo (examining what we mean by a word).*[34] Gödel był zwolennikiem platonizmu w filozofii matematyki, obiektywnego istnienia obiektów matematycznych, i miał dla niego poważne racje. Równoczesne przyjęcie TC i platonizmu może jednak prowadzić do pewnych trudności.[35]

Powracamy jednak do zasadniczego wątku tej części artykułu, mianowicie do rozważenia jakiego rodzaju definicją miałaby być TC. Przytoczmy jeszcze jeden fragment z artykułu Churcha:[36]

Zdefiniujemy teraz pojęcie [...] *efektywnie obliczalnej funkcji nieujemnych liczb całkowitych przez identyfikację jej z pojęciem funkcji rekurencyjnej określonej w zbiorze nieujemnych liczb całkowitych (lub z lambda-definiowalną funkcją* [...]*). Definicja ta ma być uzasadniona, przez dalsze rozważania, w takim stopniu, w jakim można uzasadnić wybór formalnej definicji, która może korespondować z intuicyjnym pojęciem.*

Jak widać Church definiował pojęcie, a nie zbiór. Kiedy jednak obecnie przytacza się TC, to mówi się o identyczności dwóch zbiorów tj. zbioru funkcji efektywnie obliczalnych i rekurencyjnych. W takiej też formie myślał o swej tezie sam Turing.[37] Należy wpierw zauważyć i podkreślić to, że w uniwersum wszystkich funkcji

[32] Zob. E. Post, *Finite combinatory processes. Formulation I*, The Journal of Symbolic Logic, 1 (1936), s. 105.
[33] Por. H. Wang, *From Mathematics to* ..., s. 84.
[34] Por. H. Wang, *From Mathematics to* ..., s. 85.
[35] Por. A. Olszewski, *Teza Churcha a Platonizm*, Zagadnienia Filozoficzne w Nauce, t. XXIV (1999), ss. 95-102.
[36] A. Church, *An unsolvable* ..., w: M. Davis, *The Undecidable*, s. 100.
[37] Por. R. I. Soare, *Computability and* ..., s. 295. TC jest równoważna tzw. Tezie Turinga.

określonych w zbiorze liczb naturalnych[38] oba te pojęcia mają być ekstensjonalnie równoważne, nie jest tak jednak w ogólnym przypadku[39].

Teoria definicji, w przypadku logiki w szerszym sensie, nie jest obecnie opracowana w sposób zadowalający. Podczas wykładu kursowego z logiki, w większości przypadków, informuje się studentów jedynie o tradycyjnych podziałach definicji, na przykład następujących: nominalne – realne, semantyczne – syntaktyczne, analityczne – syntetyczne, explicite – implicite, ekstensjonalne – intensjonalne, ostensywne – werbalne, predykatywne – niepredykatywne, zupełne - niezupełne.[40] Kryteria odpowiednich podziałów są słuszne i oparte na poprawnych spostrzeżeniach. R. Robinson, w wymienionej książce, przytacza osiemnaście określeń na rodzaje definicji, którymi posługiwali się różni autorzy. Jednak jakiejś ogólnej teorii definicji na razie brak. Na terenie logiki w sensie węższym (formalnej) występuje natomiast pojęcie definiowalności. Dokładnie chodzi o dwa <u>różne</u> pojęcia: o definiowalność w sensie syntaktycznym i definiowalność w sensie semantycznym.[41]

Gdyby próbować umieścić TC jako definicję, w tym 'gąszczu' terminologicznym, to wpierw należałoby stwierdzić co jest definiowane (definiendum - Dfd), a co definiensem (Dfs). Wydaje się, że TC definiuje <u>pojęcie</u> funkcji efektywnie obliczalnej, zaś definiensem jest <u>pojęcie</u> funkcji rekurencyjnej. Możemy zatem zapisać schematycznie, że w wypadku TC:

Dfd = pojęcie funkcji efektywnie obliczalnej;
Dfs = pojęcie funkcji rekurencyjnej.

Gdy pojęcie jest ostre, to ma ostrą ekstensję. W TC Dfs wyznacza ostrą ekstensję, problemem jest Dfd. Gödel, jak już wspomniano, uważał, że Dfd ma również ostrą ekstensję, choć nie była ona od początku tak postrzegana. Jeśli się tego nie przyjmie, tzn. że Dfd TC jest ostre, to TC byłaby tzw. definicją regulującą.[42] Gdyby tak jednak było, to pytanie o prawdziwość TC byłoby bardzo złożone. Zgodnie z własnościami pojęć nieostrych, ich ekstensja jest zbiorem rozmytym, dokładnie parą uporządkowaną zbiorów, gdzie do pierwszego zbioru należą te elementy, które na pewno podpadają pod dane pojęcie, zaś do drugiego te, które na pewno pod dane pojęcie nie podpadają.[43] Dodatkowo istnieją przedmioty (których zbiór zwiemy obszarem nieokreśloności) co do których nie potrafimy rozstrzygnąć, czy pod dane pojęcie podpadają czy też nie podpadają.[44] Taka sytuacja stwarzałaby możliwość spekulacji odnoszących się do pewnych funkcji, należących właśnie do dziedziny nieokreśloności. Właściwie jednak takiej sytuacji a priori wykluczyć nie można. Zgodnie z zasadami metodologicznymi odnoszącymi się do poprawności definicji regulujących, TC byłaby niepoprawna gdyby: albo wskazano funkcję, która jest rekurencyjna i równocześnie efektywnie nieobliczalna, albo funkcję, która jest efektywnie obliczalna i równocześnie

[38] Liczba zero nie jest zaliczana do zbioru liczb naturalnych, tak zazwyczaj przyjmują matematycy, zaś w teorii obliczalności liczba zero należy do zbioru liczb naturalnych.
[39] Na przykład numeracja Gödla nie jest funkcją z tego uniwersum (zatem nie jest funkcją rekurencyjną), choć jest efektywnie obliczalna. Dlatego należy zawsze dodawać, formułując TC, o jakim uniwersum mówimy.
[40] Zobacz: R. Robinson, *Definition*, Oxford 1954; D. P. Gorsky, *Definition (Logico - Methodological Problems)*, Progress Publishers, Moscow 1981, (angielskie, przejrzane wydanie rosyjskie z 1974 roku).
[41] Por. A. Mostowski, *Thirty Years of Foundational Studies*, w: A. Mostowski, *Selected Works,* PWN, Warszawa 1979, t.I, s.26.
[42] Por. M. Tokarz, *Wprowadzenie do logiki*, Uniwersytet Śląski, Katowice 1984, ss. 156-158.
[43] Jest to właściwie przeniesienie analogicznych ustaleń dla tzw. nazw nieostrych.
[44] Lub też potrafimy to rozstrzygnąć, ale przedmioty podpadają w jakimś określonym stopniu.

nierekurencyjna. W takiej sytuacji problematyczna byłaby teza, klasycznie równoważna TC:

Funkcja f jest nierekurencyjna, wtedy i tylko wtedy, gdy nie należy do zbioru funkcji rekurencyjnych, wtedy i tylko wtedy, gdy f jest nieobliczalna.

Ze względu na ostrość ekstensji (brak obszaru nieokreśloności) pojęcia funkcji rekurencyjnej, zbiór funkcji rekurencyjnych wyznacza ekstensję jednoznacznie. Gdyby pojęcie funkcji efektywnie obliczalnej miało rozmytą ekstensję, to dopełnienie (w sensie teoriomnogościowym) klasy funkcji rekurencyjnych na pewno nie pokrywałoby się z klasą funkcji, które są intuicyjnie nieobliczalne. Ten ostatni zbiór byłby różny od zbioru funkcji, które nie są efektywnie obliczalne, gdyż nie zawierałby obszaru nieokreśloności rozmytej ekstensji klasy funkcji efektywnie obliczalnych. Mielibyśmy paradoksalną sytuację, gdzie TC pozostaje prawdziwa (ponieważ postulowane zbiory są identyczne), ale pojęcia są różne.

Aby zaklasyfikować TC do którejś ze znanych klas definicji, należy odpowiedzieć na jeszcze jedno pytanie: czy obiekt definiowany istnieje uprzednio w stosunku do procedury definicyjnej, czy też pojawia się jako skutek tejże? Jest to trudne pytanie, zakłada ono bowiem pewne istotne rozstrzygnięcia w teorii rozwoju poznania. Nie chcemy wchodzić w te zagadnienia zbyt głęboko, dlatego przyjmiemy zgodnie z potoczną intuicją, że zarówno klasa funkcji efektywnie obliczalnych w intuicyjnym sensie (również ten termin), intuicja człowieka, jak i sam człowiek (gatunkowo) istnieją uprzednio w stosunku do procesu formułowania TC.[45] W przypadku TC, definiujemy pewien obiekt, który istnieje uprzednio w rzeczywistości i w definicji chcemy podać jego charakterystyczne własności.[46] Taka definicja nazywa się realną, ponieważ zarówno Dfd jak i Dfs są użyte w supozycji formalnej. Każdą definicję realną można przetłumaczyć na definicję nominalną taką, w której Dfd jest użyte w supozycji materialnej, zaś Dfs w supozycji formalnej.[47] Przez zastosowanie wspomnianego tłumaczenia uzyskujemy definicję analityczną, tzn. taką, która wyraża wprost znaczenie terminu wprowadzonego uprzednio w jakiś sposób do języka.[48] Możemy się chyba zgodzić na to, że TC jest taki rodzajem definicji. Definicjom takim przysługuje wartość prawdy lub fałszu (możliwość orzekania o nich prawdy lub fałszu).[49] Zgodnie z tym ustaleniem, TC zawiera implicite twierdzenie, że zbiory odpowiadające Dfd i Dfs są w rzeczywistości identyczne. Takie postawienie sprawy czyni z TC stwierdzenie empiryczne, jest ona bowiem falsyfikowalna. Po pierwsze może się okazać, że istnieje algorytm obliczający funkcję nie należącą do klasy funkcji rekurencyjnych. Po drugie (o czym już wiadomo) pewne funkcje są rekurencyjne, ale są one 'praktycznie' nieobliczalne, tzn. czas trwania obliczeń lub ich stopień skomplikowania jest tak duży, że wyniku obliczeń prawdopodobnie nigdy nie poznamy. Czy takie funkcje są obliczalne w intuicyjnym sensie? W ścisłym związku z powyższym pozostaje fakt, że definicja terminu *funkcja rekurencyjna* ma zupełnie inny charakter. Jest definicją nominalną, syntetyczną. W tych definicjach znaczenie terminu definiowanego jest nowo ustalane.

Jeszcze jedno spostrzeżenie: Dfd TC wywodzi się z języka nieformalnego, zaś termin *funkcja rekurencyjna*, czyli Dfs TC jest terminem formalnym. Formalny charakter Dfs

---

[45] Nie są to zagadnienia trywialne i wymagają osobnego opracowania; por. Gorsky, *op. cit.*, szczególnie rozdziały 6 i 7, ss. 197-243.

[46] Również termin *funkcja efektywnie obliczalna* istnieje uprzednio, w stosunku do procedury definiowania, w języku potocznym.

[47] Por. Gorsky, *Definition*, s. 29. Główna różnica pomiędzy definicją realną a nominalną polega na różnicy supozycji definiendum.

[48] Por. Gorsky, *Definition*, s. 33.

[49] Mówi się czasem, w podobnych przypadkach, o błędach w definiowaniu.

jest właściwie pozorny. Dla definicji klasy funkcji rekurencyjnych potrzebne jest pojęcie liczb naturalnych, zaś ów zbiór jest definiowany przy użyciu niektórych funkcji rekurencyjnych. Jeśli pojęcie funkcji występujące w Dfd i Dfs TC rozumieć będziemy jednakowo (np. za Fregem), to TC jest pochodna względem tzw. tezy Fregego mówiącej, że pojecie liczby naturalnej (intuicyjne) jest identyczne z teoriomnogościową konstrukcją liczby naturalnej (formalne).[[50]] Podobne rozważanie można poprowadzić w odniesieniu do występującego w TC pojęcia funkcji. Te spostrzeżenia mają pokazać, że w TC zamieszane jest pojęcie (*funkcja rekurencyjna*), którego definicja jest *niepredykatywna*, tzn. taka, która zawiera w sobie rodzaj *błędnego koła*.

Myślę jednak, że tego typu rozważania mogą zaprowadzić zbyt daleko. Co należy zrobić, aby uzyskać jakiś przytomny wynik? Należy opracować jakąś ogólną teorię definicji. Oto kilka intuicji, które przedstawiać mają, w sposób szkicowy, pomysł na taką teorię. Kluczową rolę pełnić w niej ma pewien oczywisty, choć zapoznany aspekt definiowania. Niektórzy logicy (formalni), z podziwu godnym uporem, nie używają terminu *pragmatyczny*. Wydaje się, że dzisiaj śmiało można mówić o 'naukowym ugruntowaniu pragmatyki'.[[51]] Dobrym, dla wprowadzanego pojęcia, byłoby określenie *definiowalność pragmatyczna*. Zgodnie bowiem z podziałem semiotyki, pragmatyka ustala zależności pomiędzy znakiem a użytkownikiem znaku. Interesująca nas definiowalność ustala zależności zachodzące pomiędzy pojęciami (umysłu użytkownika języka), a 'siłą' ekspresji języka. Owa definiowalność byłaby szczegółowym rodzajem ogólniejszego pojęcia *imitowalności (reprezentowalności)* obiektów pozajęzykowych w samym języku. Pojęcie imitowalności nie jest precyzyjne, gdyż, o ile mi wiadomo, nie zostało ono dotychczas wprowadzone. Myślę, że nawet przy tak niedokładnym opisie, filozof zrozumie o co mi chodzi. W definiowalności pragmatycznej chodziłoby o językowe (matematyczne) sformułowanie 'istotnych' własności definiowanego pojęcia. Poprzednio wymienione pojęcia definiowalności (syntaktycznej i semantycznej) byłyby szczególnymi przypadkami tego ogólnego pojęcia. Przykładem, który negatywnie (tzn. w sensie niedefiniowalności) to pojęcie aplikuje, jest Tarskiego twierdzenie o niedefiniowalności prawdy. Twierdzenie to mówi (w naszej stylizacji), że intuicyjne pojęcie prawdziwości nie jest formalizowalne (imitowalne) w pewnej klasie systemów formalnych.[[52]] TC jest przykładem takiej właśnie pragmatycznej definiowalności i w jej kategoriach powinna zostać opisana.[[53]] Co ciekawe, teoretycznie możliwa jest taka sytuacja, że TC jest fałszywa, ale nigdy nie można tego będzie wykazać żadnymi formalnymi środkami.

4. Prześledźmy raz jeszcze całość. W pierwszej części przedstawiłem historię powstania TC, stanowisko Churcha i wczesne Gödla wobec niej. W części drugiej starałem się zapoznać Czytelnika z późniejszymi poglądami Gödla, już po jego zaznajomieniu się z analizą Turinga. W części trzeciej zakwalifikowałem TC do typu definicji realnych i analitycznych. Przedstawiłem kilka intuicji do zbudowania ogólnej teorii definicji w oparciu o tzw. imitowalność obiektów w teoriach formalnych.

[50] Por. E. Mendelson, *Second Thoughts about Church's Thesis and Mathematical Proofs*, The Journal of Philosophy, 87(1990), ss. 225-233.

[51] W nawiązaniu do tytułu znanej pracy Tarskiego. Za jego czasów obawiano się używać terminu *sematyczny*.

[52] Por. Gorsky, *op. cit.*, s.147.

[53] Wymaga to jednak szczegółowych badań, które nastąpią w późniejszym czasie.

Gödel and Church's Thesis

The article was divided into three sections. First section presents short history of Church's thesis and early Gödel's view of it . In the second section I discuss Gödel's later ideas concerning Church's thesis. Third section is devoted mainly to discuss methodological status of Thesis as a definition. Therein I sketch an idea of *imitabillity* of a concept in formal theory.